



Année universitaire 2007-2008

Master 2 recherche *mécanique et énergétique* de l'INPL et de l'UHP

Modélisation d'instabilités - Méthodes non linéaires

Emmanuel Plaut

Table des matières

Introduction	1
1 Analyse linéaire de stabilité	5
1.1 Cadre général - Hypothèses de travail	5
1.2 Exemples de mise en équations	7
1.2.1 Modèle simplifié d'afficheur à cristaux liquides	7
1.2.2 Modèle Boussinesq de la thermoconvection d'un fluide	9
1.3 Principes de l'analyse linéaire de stabilité	11
1.3.1 Problème linéarisé	11
1.3.2 Résolution par décomposition modale	12
1.4 Application au modèle d'afficheurs → instabilité homogène	15
1.4.1 Précision : conditions limites latérales périodiques et modes de Fourier	15
1.4.2 Résolution	16
1.5 Introduction au rôle des symétries - Brisures de symétries	17
1.5.1 Conséquence de l'invariance par une symétrie de parité	17
1.5.2 Généralisation	18
1.5.3 Conséquence de l'invariance par symétries de translations	19
1.6 Application au modèle de thermoconvection → instabilité structurante	19
1.7 Retour sur la décomposition modale : problème adjoint	23
1.8 Applications	25
1.8.1 Méthode de calcul rapide du développement de la valeur propre critique	25
1.8.2 Au modèle d'afficheurs → exemple de problème auto-adjoint	25
1.8.3 Au modèle de thermoconvection → règle de calcul de l'adjoint	26
2 Analyse faiblement non linéaire : équations d'amplitudes	29
2.1 Cas d'instabilités stationnaires	29
2.1.1 Hypothèses de variations temporelles lentes et de domination des actifs	29
2.1.2 Élimination quasi statique des modes passifs	30
2.1.3 Équations d'amplitudes des modes actifs	31
2.1.4 Cas d'un seul mode actif	32
2.1.5 Cas d'un système non symétrique : bifurcation trans-critique	32
2.1.6 Cas d'un système « symétrique »	33
2.1.7 Premier sous cas : bifurcation (fourche) sur-critique	34
2.1.8 Application au modèle simplifié d'afficheurs	36
2.1.9 Application au modèle de thermoconvection	37
2.1.10 Deuxième sous cas : bifurcation (fourche) sous-critique	38
2.2 Cas d'une instabilité oscillante	40

3	Analyse faiblement non linéaire : équations d'enveloppes	45
3.1	Caractérisation d'une famille continue de modes actifs : longueur(s) caractéristique(s)	46
3.1.1	Systèmes bidimensionnels quasi unidimensionnels	46
3.1.2	Systèmes tridimensionnels quasi bidimensionnels	47
3.2	Équations d'enveloppe d'instabilités stationnaires	49
3.2.1	Systèmes quasi unidimensionnels « symétriques » : instabilité non structurante	49
3.2.2	Systèmes quasi unidimensionnels « symétriques » : instabilité structurante	52
3.2.3	Existence d'une énergie libre et dynamique relaxationnelle	55
3.2.4	Application : stabilité secondaire de la solution critique	56
3.2.5	Application : parois et fronts	56
3.2.6	Propriétés d'échelles de l'équation d'enveloppe	57
3.2.7	Application : instabilité secondaire d'Eckhaus	58
3.2.8	Systèmes quasi bidimensionnels « symétriques »	62
3.2.9	Existence d'une énergie libre et dynamique relaxationnelle	63
3.2.10	Application : défauts points	63
3.3	Équation d'enveloppe d'une instabilité oscillante	64
3.3.1	Équation d'enveloppe ou équation de Ginzburg-Landau complexe	64
3.3.2	Instabilités secondaires d'Eckhaus-Benjamin-Feir	65
4	Remarques de conclusion	71
4.1	Systèmes présentant plusieurs modes critiques différents	71
4.2	Analyse linéaire et faiblement non linéaire numérique	73
4.3	Analyse fortement non linéaire : méthodes de continuation	73
A	Exemples complémentaires en dimension finie	77
A.1	Modèle de laser	77
A.1.1	Présentation du modèle - Mise sous forme adimensionnelle	77
A.1.2	Analyse	78
A.2	Modèles de réactions chimiques	79
A.2.1	Présentation des modèles - Mise sous forme adimensionnelle	79
A.2.2	Étude du modèle « non-étendu »	81
A.2.3	Étude du modèle « étendu »	83
B	Exemples complémentaires en hydrodynamique : écoulements cisailés	87
B.1	Généralités	87
B.1.1	Contraintes de Reynolds	87
B.1.2	Équations régissant la stabilité d'un écoulement bidimensionnel unidirectionnel	88
B.1.3	Passage à des modes normaux - Équations linéarisées	90
B.1.4	Contrainte de Reynolds moyenne à l'ordre quadratique	90
B.2	Écoulements sujets à des instabilités « non visqueuses »	90
B.2.1	Critère d'instabilité de Rayleigh	90
B.2.2	Exemple : instabilités interfaciales de Kelvin-Helmholtz	91
B.3	Écoulement sujet à des instabilités « visqueuses » : écoulement de Poiseuille plan	93
B.3.1	Analyse linéaire de stabilité : ondes de Tollmien-Schlichting	93
B.3.2	Analyse faiblement non linéaire : nature sous-critique de la bifurcation	94
B.3.3	Analyse fortement non linéaire : des ondes non linéaires instables	95
B.4	À propos de scénarios fortement non linéaires et de structures (très) cohérentes	96

C	Introduction des modes adjoints en dimension finie	101
D	Analyse faiblement non linéaire rigoureuse d'une instabilité oscillante	103
E	Résolution analytique des équations d'amplitude	105
E.1	Cas d'une bifurcation trans-critique	105
E.2	Cas d'une bifurcation sur-critique	106
F	Exercices et problèmes	109
Ex. 1	Exemple de système dynamique « non normal »	109
Ex. 2	Modèle de réaction chimique de Lengyel & Epstein modifié	109
Pb. 1	Étude de la thermoconvection de Rayleigh-Bénard à l'aide du modèle réduit de Lorenz . . .	110
Pb. 2	Étude « énergétique » d'ondes de Tollmien-Schlichting	112
	Bibliographie	115

Introduction

'The theory has to be as simple as possible but not simpler'

Albert Einstein

Les phénomènes d'instabilités et de bifurcations sont courants en physique, en mécanique, en chimie, etc... Pour ne citer que deux exemples liés à notre vie quotidienne, l'allumage du laser de notre lecteur de CD ou de DVD et l'allumage d'un pixel de l'écran à cristaux liquides de notre téléphone portable résultent tous deux d'une instabilité et d'une bifurcation. Dans l'ignorance des bases de la théorie correspondante, le « *modélisateur* » au sens large risque de commettre de graves erreurs (oubli de certaines branches de solutions, calculs non physiques, etc...) même - surtout - s'il se confie à un logiciel de calcul numérique. L'objet de ce cours, donné dans le cadre du Master 2 Recherche de Mécanique-Énergétique commun à l'INPL et l'UHP¹, est justement de donner une *introduction aux méthodes de modélisation d'instabilités et de bifurcations dans des systèmes dynamiques spatialement étendus ou non*. Plus fondamentalement, ce cours vise à initier les étudiants à quelques phénomènes caractéristiques du vaste monde de la « *physique non linéaire* », le seul point commun finalement entre tous les systèmes pouvant présenter instabilités et bifurcations étant justement qu'ils sont « *non linéaires* ».

Ce cours se situe à l'interface entre la « *physique théorique* » et les « *mathématiques appliquées* », puisque nous allons travailler sur des modèles mathématiques, issus de la physique, posés comme tels, pour tenter de les « résoudre » efficacement et intelligemment. Nous esquisserons en particulier le résultat suivant : il existe moins de scénarios d'instabilités et de bifurcations que de systèmes physiques possibles, mais au contraire il est possible d'identifier quelques scénarios « *universels* » qu'on a beaucoup plus de chance de rencontrer que d'autres. Nous montrerons aussi que, au voisinage d'une bifurcation, une *réduction de la dynamique du système* à des équations dites d'amplitude ou d'enveloppe est souvent possible², et nous montrerons de façon systématique comment opérer effectivement cette réduction.

Contrairement au cours oral, dans lequel on commencera, pour des raisons pédagogiques évidentes, par le cas de *systèmes dynamiques « non étendus »* régis par des équations différentielles ordinaires, dans ce cours écrit le formalisme est présenté d'emblée pour une classe de système plus intéressante pour le mécanicien ou thermicien, à savoir des *systèmes dynamiques spatialement étendus* régis par des équations aux dérivées partielles de la forme (1.3). En « oubliant » la dépendance spatiale (vis à vis de \mathbf{x}) et les conditions limites (1.2), les méthodes présentées pour calculer les *équations d'amplitudes* dans un système dynamique étendu s'appliquent telles quelles à un système dynamique non étendu... sauf que les calculs sont plus simples dans le cas d'un système dynamique non étendu, puisque le vecteur d'état du système V n'est plus un champ : V évolue dans un espace de dimension finie n , le nombre de composantes de V . Des éléments sur la théorie des systèmes dynamiques non étendus, en particulier sur la théorie générale des *bifurcations* en dimension finie, peuvent être trouvés dans Manneville (1991, 2004), Strogatz (1994), Charru (2007) ou Angilella (2006) ; certains de ces

¹Plus précisément ce cours complète celui d'Angilella (2006) et constitue avec lui le module « *systèmes dynamiques, instabilités et chaos* » de l'UE303 du parcours « *modélisation et simulation numérique en dynamique des fluides* ».

²En ce sens la figure 3.9 représente un point d'aboutissement de ce cours.

ouvrages présentent aussi des éléments intéressants sur les systèmes dynamiques étendus. Signalons enfin pour terminer de rassurer l'étudiant inquiet que l'annexe A donne une présentation succincte des exemples abordés oralement non explicités dans le corps de cet ouvrage, tandis que l'annexe C présente une technique de calcul spécifique à la dimension finie.

La réduction à des équations d'amplitude et d'enveloppe n'est possible en général que *près du seuil d'une bifurcation trans-critique, sur-critique ou faiblement sous-critique*. En effet cette réduction repose sur une ***approche perturbative faiblement non linéaire*** supposant que l'écart V entre la configuration bifurquée du système et sa configuration de base ou de référence est *petit*. Ceci permet de traiter les termes non linéaires en V dans les équations de la dynamique du système, typiquement de la forme (1.3), comme des *petites perturbations* des termes linéaires. Ceci posé, les équations d'amplitudes sont directement utilisables telles quelles dans tous les cas où le spectre de l'opérateur d'évolution linéarisé est discret, c'est-à-dire pour des systèmes dynamiques non étendus ou des systèmes dynamiques étendus mais confinés. Nous n'étudierons le cas du spectre continu que dans des géométries simples, à savoir des systèmes très étendus dans une ou deux directions donc quasi uni- ou bidimensionnels, permettant l'usage de séries ou de transformées de Fourier. Nous aboutirons alors à partir des équations d'amplitudes aux équations d'enveloppes. Précisons aussi que nous nous intéressons typiquement à l'instabilité *primaire* d'une configuration de base *simple, stationnaire* en particulier. Nous aborderons cependant dans le chapitre 3 l'étude de quelques instabilités *secondaires* pouvant affecter la configuration du système adoptée une fois que la première instabilité s'est développée... le chemin est encore long avant d'arriver à la turbulence par exemple, quoique nous verrons que dans certains cas des surprises assez intéressantes nous attendent, comme les états de « turbulence faible » obtenus via certaines instabilités secondaires³.

Pour introduire cette ***analyse faiblement non linéaire***, une approche « *pragmatique* » et « *spectrale* » est adoptée⁴, dans laquelle des *hypothèses simplificatrices* sont posées concernant les propriétés mathématiques de l'opérateur d'évolution linéarisé. Ainsi, dans le cas d'instabilités stationnaires, l'existence d'un système total de vecteurs propres et la bonne correspondance supposée entre le problème direct et le problème adjoint permettront la *réécriture « spectrale »* (2.3) des équations de la dynamique du système, qui donneront les équations d'amplitude et d'enveloppe. Dans le cas d'instabilités oscillantes, la réécriture spectrale (2.3) ne sera pas utilisée, mais on aura encore recours aux modes adjoints.

De manière générale, le fait d'obtenir les équations modèles par simples « projections », sans plus recourir à des « conditions de compatibilité » ou « alternatives de Fredholm » mystérieuses⁵, me semble plus pédagogique. Un autre intérêt de l'approche présentée ici est d'éviter de poser a priori des lois d'échelles, qui sont plutôt déduites a posteriori des équations d'amplitude et d'enveloppe obtenues. D'ailleurs cette approche permet un calcul d'équations d'amplitudes même en l'absence de toute loi d'échelle, comme cela sera esquissé lors de nos remarques de conclusion.

En contrepartie, les hypothèses simplificatrices posées devront évidemment être validées. Ceci peut être fait directement dans les cas les plus simples (et les plus rares...) où un calcul analytique complet est possible, ou encore dans les cas où les équations obtenues ont une validité asymptotique, c'est-à-dire lorsqu'il existe des lois d'échelles ! Dans le cas général, la justification des équations modèles obtenues ne peut se trouver que dans une confrontation à des expériences ou à des simulations numériques directes des équations complètes.

Insistons une dernière fois sur le fait que ce cours aucunement exhaustif ne constitue qu'une initiation. Quelques prolongements possibles, concernant notamment ce qui est possible en ***analyse fortement non linéaire*** grâce aux ***méthodes de continuation***, seront présentés dans le chapitre de conclusion. On lira aussi avec beaucoup de profit l'annexe B, qui présente quelques résultats concernant le problème crucial (du début)

³Contempler à ce sujet les figures 3.11 et 3.12.

⁴Le point de vue utilisé est donc plus celui d'un « *physicien théoricien* » que celui d'un « *mathématicien appliqué* ». Ce point de vue est naturellement inspiré par ma formation personnelle, notamment par mon post-doctorat à l'Institut de physique de Bayreuth et mon travail avec Werner Pesch ; on trouvera dans Plaut & Pesch (1999) un exposé du schéma développé dans la section 2.1, et des applications à la convection thermique ou électrique dans des cristaux liquides. Un traité qui nous a guidé, et que l'on peut encore lire avec beaucoup de profits, est celui de Haken (1977).

⁵« Conditions » et « alternatives » qui sont maintenant, bien évidemment, cachées dans les hypothèses simplificatrices posées.

de la transition à la turbulence en écoulements ouverts. Cette annexe se termine par un exposé de résultats (fortement non linéaires !) très récents concernant le cas d'écoulements en conduite, et l'existence de structures (plus ou moins) cohérentes dans ces écoulements.

Signalons enfin qu'une page web dynamique présentant des informations concernant le déroulement de ce cours sur le plan pratique (emplois du temps, etc...) ainsi que des annales corrigées se trouve sur

www.ensem.inpl-nancy.fr/Emmanuel.Plaut/modinst

Je remercie Christophe Sz waj pour ses conseils avisés, qui m'ont permis de mettre au point l'exemple de modèle de laser de l'annexe A.1.

Nancy, le 15 janvier 2008.

Emmanuel Plaut.

Chapitre 1

Analyse linéaire de stabilité

1.1 Cadre général - Hypothèses de travail

Dans ce polycopié nous utilisons les notations suivantes : les caractères gras désignent des vecteurs de l'espace physique \mathbb{R}^3 , les caractères gras surmontés d'un chapeau les vecteurs unitaires de l'espace physique \mathbb{R}^3 , les caractères gras surmontés de deux barres les tenseurs d'ordre 2 i.e. les applications linéaires de \mathbb{R}^3 dans lui-même. Enfin ∂_x désigne l'opérateur de dérivation par rapport à x , ∂_x^n ce même opérateur appliqué n fois, et Δ le laplacien.

Nous nous intéressons à un système physique *étendu* et typiquement *dissipatif*¹ dans lequel on injecte de l'énergie produisant éventuellement des *instabilités*. Pour simplifier, nous allons supposer que ce système peut être décrit comme *un seul milieu continu*² occupant le volume Ω ouvert de l'espace physique \mathbb{R}^3 , ou éventuellement \mathbb{R}^2 voire \mathbb{R} lorsque la géométrie le permet. L'état du système est alors spécifié par la donnée dans $\bar{\Omega}$ (l'adhérence de Ω , $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ où $\partial\Omega$ est le bord de Ω) de champs locaux dépendant de sa nature. Nous les regroupons dans un *vecteur d'état local* V supposé *nul* dans la *configuration de base du système* correspondant à de faibles énergies injectées :

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in \Omega, V(\mathbf{x}) = 0 \text{ dans la configuration de base}}. \quad (1.1)$$

Nous supposons que les *conditions limites* prennent la forme dite *homogène*

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, C(\mathbf{x}) \cdot V(\mathbf{x}) = 0} \quad (1.2)$$

et que les *équations de la dynamique de ce système*, fournies par la physique, peuvent se mettre sous la forme d'équations aux dérivées partielles du premier ordre en temps

$$\boxed{\forall \mathbf{x} \in \Omega, D \cdot \partial_t V = L_R \cdot V + N_2(V, V) + N_3(V, V, V)}, \quad (1.3)$$

où l'on a omis de rappeler la dépendance en \mathbf{x} des opérateurs et des champs pour simplifier les notations. Insistons sur le fait que seul V dépend du temps t et que les opérateurs et les conditions limites n'en dépendent pas : on a donc affaire à un système dynamique *autonome*. Dans les équations (1.2) et (1.3) les opérateurs linéaires C , D et L_R , non linéaires quadratique N_2 et cubique N_3 sont des *opérateurs différentiels* ne faisant intervenir que V et ses dérivées spatiales ; ainsi les conditions limites (1.2) peuvent très bien être des conditions

¹En anticipant sur la section 1.3, cette hypothèse de « confort » justifie la non-considération de scénarios typiques d'un système au contraire *conservatif*, dans lequel on peut d'une part ne pas avoir existence d'un système total de modes propres, d'autre part avoir des valeurs propres qui varient de façon non standard vis-à-vis du paramètre d'écart au seuil ϵ , par exemple en $\pm\sqrt{\epsilon}$.

²Ceci écarte par exemple les problèmes diphasiques où plusieurs fluides interagissent, comme dans des instabilités de vagues ou de jets. Dans de tels cas une analyse du type que celle que nous allons présenter est possible, mais plus compliquée, voir à ce sujet la section B.2.2.

de Neumann de la forme $\partial_x V(\mathbf{x}) = 0$ par exemple. En notant \mathcal{E} l'espace vectoriel des champs V « réguliers » sur $\bar{\Omega}$, la **linéarité** de $L = L_R$ signifie que

$$\forall V \in \mathcal{E}, \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad L \cdot (\mu V) = \mu L \cdot V$$

et

$$\forall a, b \in \mathcal{E}, \quad L \cdot (a + b) = L \cdot a + L \cdot b ;$$

le point entre L et V représente un « point de contraction », notation inspirée du cas de la dimension finie où L est une matrice. Le caractère **quadratique** de N_2 signifie que N_2 est une application **bilinéaire**, i.e.

$$\forall a, b \in \mathcal{E}, \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad N_2(\mu a, b) = N_2(a, \mu b) = \mu N_2(a, b)$$

d'où $N_2(\mu V, \mu V) = \mu^2 N_2(V, V)$, et d'autre part

$$\forall a, b, c \in \mathcal{E}, \quad N_2(a + b, c) = N_2(a, c) + N_2(b, c) \quad \text{et} \quad N_2(a, b + c) = N_2(a, b) + N_2(a, c) .$$

On en déduit que

$$\forall a, b \in \mathcal{E}, \quad N_2(a + b, a + b) = N_2(a, a) + N_2(a|b) + N_2(b, b) \tag{1.4a}$$

en notant

$$N_2(a|b) = N_2(a, b) + N_2(b, a) . \tag{1.4b}$$

Enfin le caractère **cubique** de N_3 signifie que N_3 est une application **trilinéaire**, i.e.

$$\forall a, b, c \in \mathcal{E}, \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad N_3(\mu a, b, c) = N_3(a, \mu b, c) = N_3(a, b, \mu c) = \mu N_3(a, b, c)$$

d'où $N_3(\mu V, \mu V, \mu V) = \mu^3 N_3(V, V, V)$, et d'autre part

$$\begin{aligned} \forall a, b, c, d \in \mathcal{E}, \quad N_3(a + b, c, d) &= N_3(a, c, d) + N_3(b, c, d) , \\ N_3(a, b + c, d) &= N_3(a, b, d) + N_3(a, c, d) , \\ N_3(a, b, c + d) &= N_3(a, b, c) + N_3(a, b, d) . \end{aligned}$$

En règle générale (1.3) n'est qu'une **approximation** des équations complètes de la dynamique du système valable pour V « petit », obtenue justement par un **développement limité en puissances de V** ; la plupart du temps on supposera les composantes de V correctement adimensionnées de sorte que

$$V \ll \text{petit} \iff V \ll 1 . \tag{1.5}$$

D'autre part, si V est composé de n champs locaux, nous supposons que (1.3) contient n équations « scalaires » ; mentionnons aussi que dans les cas les plus simples D est l'opérateur identité³.

Les **paramètres de contrôle** caractérisant ce système sont connus par l'expérimentateur comme par le modélisateur, puisqu'ils interviennent dans les équations du système. Parmi ces paramètres nous isolons le **paramètre de contrôle principal** R gouvernant la stabilité de la configuration de base $V = 0$ des **paramètres de contrôle secondaires** non explicités dans les notations. Nous supposons toujours qu'aux valeurs faibles du paramètre principal R la solution de base $V = 0$ est stable ; R est souvent, d'ailleurs, proportionnel à l'énergie injectée dans le système. A priori, R peut éventuellement apparaître dans l'opérateur C définissant les conditions aux limites du problème et/ou dans les opérateurs D, N_2, N_3 . Moyennant des manipulations éventuelles des variables et des équations, nous supposons par la suite que R n'apparaît que dans L, N_2 et N_3 , et ne rappellerons explicitement cette dépendance que dans l'opérateur L (voir à ce sujet la remarque de la section 2.1.7).

Le but de l'**analyse linéaire de stabilité** est de calculer la valeur critique de R à partir de laquelle une instabilité peut se développer sous l'effet de petites perturbations de la configuration de base. Avant de présenter cette méthode, il convient d'insister sur le fait que la mise d'un problème réel sous la forme standard (1.1), (1.2), (1.3) suppose déjà un premier effort et, souvent, de premières approximations. Ceci va être illustré sur deux exemples ; le lecteur pressé ou cultivé peut sauter la section 1.2 correspondante.

³On pourrait être tenté de se ramener à ce cas en multipliant toujours l'équation (1.3) par D^{-1} ; ceci n'est pas forcément une bonne idée, tout simplement parce que D^{-1} n'est pas forcément un opérateur régulier. On s'en convaincra en contemplant l'exemple de l'équation (1.35).

1.2 Exemples de mise en équations

1.2.1 Modèle simplifié d'afficheur à cristaux liquides

Un pixel de l'afficheur à cristaux liquides de votre téléphone portable ou de votre calculette se compose d'une *couche de cristal liquide nématique*⁴, milieu anisotrope dont les molécules allongées s'orientent spontanément le long d'un vecteur *directeur* unitaire $\hat{\mathbf{n}}$:



Puisque la phase est symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à $\hat{\mathbf{n}}$, i.e. $\hat{\mathbf{n}}$ est équivalent à $-\hat{\mathbf{n}}$, on a représenté $\hat{\mathbf{n}}$ par une flèche double. On a aussi localement symétrie de rotations autour de $\hat{\mathbf{n}}$: le milieu est *anisotrope uniaxe d'axe $\hat{\mathbf{n}}$* . L'intérêt de ces matériaux est qu'ils se comportent comme des « polariseurs actifs » puisque que cet axe d'anisotropie peut être facilement orienté par un champ électrique \mathbf{E} . L'équation de la dynamique du directeur montrant cet effet s'écrit⁵

$$\gamma \hat{\mathbf{n}} \wedge \partial_t \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{h} \quad (1.6)$$

où γ est la viscosité rotationnelle et \mathbf{h} le *champ moléculaire*, somme d'un terme d'élasticité d'orientation et d'un terme électrique,

$$\mathbf{h} = K \Delta \hat{\mathbf{n}} - \frac{\partial F_E}{\partial \hat{\mathbf{n}}} . \quad (1.7)$$

Dans cette expression K est la constante d'élasticité d'orientation du milieu et

$$F_E = -\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$$

est l'énergie libre électrique, \mathbf{D} étant l'induction électrique. Par anisotropie uniaxiale du cristal nématique et à cause de propriétés diélectriques de ses molécules,

$$\mathbf{D} = \epsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \epsilon_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} = \epsilon_{\perp} \mathbf{E} + \epsilon_a (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \hat{\mathbf{n}}$$

où ϵ_{\parallel} et ϵ_{\perp} sont les permittivités parallèlement et perpendiculairement au directeur, $\epsilon_a = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$ est l'anisotropie diélectrique. Comme $\epsilon_a > 0$, on voit que

$$F_E = -\frac{1}{2} \epsilon_{\perp} \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2} \epsilon_a (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E})^2 \quad (1.8)$$

sera minimale lorsque $\hat{\mathbf{n}}$ sera parallèle à \mathbf{E} , ce que traduit le terme de champ moléculaire correspondant

$$-\frac{\partial F_E}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = \epsilon_a (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \hat{\mathbf{n}} .$$

Au bilan l'équation de la dynamique (1.6) se réécrit

$$\gamma \hat{\mathbf{n}} \wedge \partial_t \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \wedge [K \Delta \hat{\mathbf{n}} + \epsilon_a (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}] . \quad (1.9)$$

⁴Un ouvrage de référence récent sur les cristaux liquides est celui de Oswald & Pieranski (2000).

⁵Ce ne peut être qu'une équation de couple d'après la contrainte $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$. En effet une équation de la forme

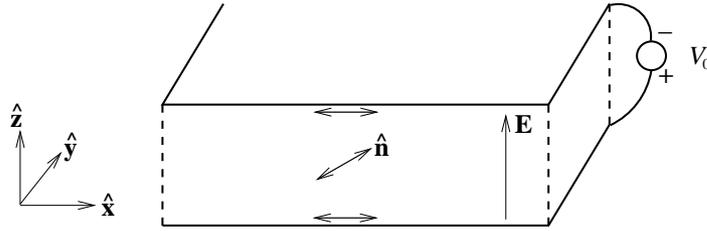
$$\gamma \partial_t \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{h} ,$$

avec \mathbf{h} contenant un terme de la forme $K \Delta \hat{\mathbf{n}}$, ne permettrait sûrement pas de conserver l'identité $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$. Par contre (1.6) est compatible avec cette contrainte, comme on peut le voir en prenant son produit vectoriel à droite avec $\hat{\mathbf{n}}$, qui donne

$$\gamma \partial_t \hat{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{h}$$

où $\overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}$ est l'opérateur de projection sur le plan perpendiculaire à $\hat{\mathbf{n}}$.

Dans un afficheur, couche de cristal nématique horizontalement étendue enserrée entre deux électrodes transparentes en lesquelles on assure un *ancrage planaire*⁶



$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}} \text{ en } z = 0 \text{ et } z = d \text{ épaisseur du pixel,} \quad (1.10)$$

le champ électrique se réduit en première approximation⁷ à celui qu'impose le générateur de tension connecté aux électrodes,

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}}V_0/d. \quad (1.11)$$

D'autre part la condition limite (1.10) permet de considérer pour simplifier que le directeur ne quitte pas le plan xz , et de poser

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \phi + \hat{\mathbf{z}} \sin \phi. \quad (1.12)$$

Le vecteur d'état local du milieu est ainsi constitué de la donnée de l'angle ϕ définissant le directeur :

$$V(\mathbf{x}) = (\phi(\mathbf{x})). \quad (1.13)$$

On a bien $V = 0$ dans la configuration de base du système, et par construction V est sans dimension. Cette propriété sympathique nous permet d'affirmer que (1.5) tient ici. La condition d'ancrage planaire (1.10) donne la condition limite homogène

$$\phi = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } d. \quad (1.14)$$

La composante suivant $-\hat{\mathbf{y}}$ de l'équation de la dynamique de $\hat{\mathbf{n}}$ fournit l'équation de la dynamique de ϕ sous la forme

$$\gamma \partial_t \phi = K \Delta \phi + \frac{\epsilon_a V_0^2}{2d^2} \sin 2\phi. \quad (1.15)$$

Adimensionnant les longueurs en unité de l'épaisseur de la couche d et les temps en unité du temps de diffusion d'orientation $d^2 \gamma / K$, on obtient en notant abusivement les grandeurs adimensionnées de la même manière

$$\partial_t \phi = \Delta \phi + \frac{1}{2} R \sin 2\phi \quad (1.16)$$

où le paramètre de contrôle

$$R = \frac{\epsilon_a V_0^2}{K} > 0 \quad (1.17)$$

caractérise la compétition entre l'effet électrique qui va servir à faire commuter le pixel et les effets d'élasticité d'orientation qui vont s'opposer à cette commutation. Pour mettre l'équation (1.16) sous la forme (1.3), il faut effectuer un développement limité en puissances de V jusqu'à l'ordre 3, c'est-à-dire écrire que

$$\sin 2\phi = 2\phi - (2\phi)^3/6 + o(V^3).$$

On obtient ainsi

$$\underbrace{\partial_t \phi}_{D \cdot \partial_t V} = \underbrace{\Delta \phi + R\phi}_{L_R \cdot V} - \underbrace{\frac{2}{3} R \phi^3}_{N_3(V, V, V)}. \quad (1.18)$$

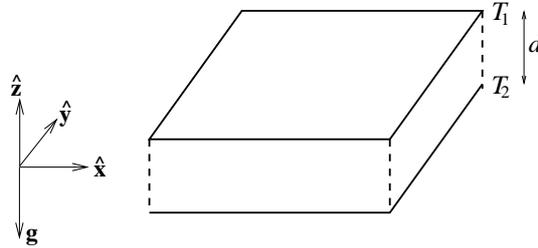
⁶C'est ici que notre modèle s'éloigne de la réalité des afficheurs effectivement utilisés, dans lesquels on impose un ancrage planaire avec *torsion*. On pourra consulter à ce sujet l'examen 2005-2006 de l'UE303 disponible sur la page web de ce cours.

⁷En négligeant les effets de polarisation.

L'absence de termes quadratiques est due à la symétrie « interne » ou « de champ » $\phi \mapsto -\phi$ qui revient à appliquer à $\hat{\mathbf{n}}$ une symétrie miroir par rapport à un plan horizontal à un point de l'espace fixé, ceci par opposition aux symétries « spatiales » discutées plus loin. En ce qui concerne les conditions limites latérales, nous nous contentons pour l'instant de spécifier qu'elles ont a priori peu d'influence puisque les bords latéraux en x et y sont lointains : la distance entre ceux-ci est de l'ordre de 1 mm à comparer à l'épaisseur de la couche $d \simeq 10 \mu\text{m}$. Nous reviendrons sur le choix de ces conditions limites section 1.4.

1.2.2 Modèle Boussinesq de la thermoconvection d'un fluide

La *thermoconvection* dite naturelle consiste en des écoulements générés par une instabilité d'un fluide stratifié thermiquement (de façon instable!) dans un champ de force volumique homogène, en général le champ de pesanteur terrestre \mathbf{g} . C'est un phénomène extrêmement important en dynamique des fluides, pour les applications thermiques par exemple⁸, mais aussi en météorologie⁹, en océanographie, en géo- et astrophysique, etc... Face à des phénomènes si compliqués une approche raisonnable consiste à s'intéresser à des configurations simples. L'une de celles-ci, dite *convection de Rayleigh-Bénard*, consiste en une couche horizontale de fluide, de dimensions latérales très grandes, soumise à une différence de température constante $\delta T = T_2 - T_1 > 0$:



Le modèle de Boussinesq considère le fluide, *newtonien*, comme « quasi-incompressible », c'est-à-dire vérifiant

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (1.19)$$

où \mathbf{v} est le champ de vitesse du fluide, tout en tenant compte dans l'équation de Navier-Stokes de variations de la *densité* ρ dans le seul terme de force de pesanteur :

$$\rho_0[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]\mathbf{g} . \quad (1.20)$$

Dans cette équation ρ_0 est la densité à la température moyenne $T_0 = (T_1 + T_2)/2$, p est la pression, $\alpha > 0$ est le *coefficient de dilatation thermique* du fluide, tandis que la *viscosité dynamique* μ provient de la loi de comportement définissant le *tenseur des contraintes*

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = -p\overline{\mathbf{I}} + 2\mu\overline{\mathbf{D}} \quad (1.21)$$

où $\overline{\mathbf{D}}$ est la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse. La dynamique de ce système est d'autre part contrôlée par celle du champ de *température* T , donnée par l'équation de l'énergie ou de la chaleur¹⁰

$$c_v(\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \nabla T) = -\operatorname{div}(\mathbf{J}_Q) = \lambda \Delta T \quad (1.22)$$

compte tenu de la *loi de Fourier* donnant le flux de chaleur

$$\mathbf{J}_Q = -\lambda \nabla T . \quad (1.23)$$

Dans ces équations c_v est la *capacité calorifique volumique* du fluide et λ sa *conductivité thermique*. Introduisant la *diffusivité thermique* $\kappa = \lambda/c_v$, on peut récrire (1.22) sous la forme plus simple

$$\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T . \quad (1.24)$$

⁸Sans convection, les radiateurs réchaufferaient beaucoup moins vite l'atmosphère d'une pièce... et votre cuisinière mettrait bien longtemps à chauffer la soupe!

⁹La thermoconvection est le « moteur » des cyclones et autres ouragans.

¹⁰En négligeant l'effet de la dissipation visqueuse.

Au vu des conditions limites en température

$$T = T_1 \text{ en } z = d, \quad T = T_2 \text{ en } z = 0, \quad (1.25)$$

la solution de base dite *conductive* des équations (1.20) et (1.24) est donnée par

$$\mathbf{v}_{cond} = \mathbf{0}, \quad T_{cond} = T_2 - (\delta T) \frac{z}{d} \text{ avec } \delta T = T_2 - T_1; \quad (1.26)$$

c'est un exemple de solution de base dépendant du paramètre de contrôle principal, dont on se doute qu'il va être proportionnel à δT . Cependant si nous introduisons l'écart au profil de température conductif

$$\theta = T - T_{cond}, \quad (1.27)$$

la configuration de base est définie par $\theta = 0$, tandis que les équations (1.20) et (1.24) peuvent se reformuler en termes de \mathbf{v} et θ seulement,

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p' + \nu \Delta \mathbf{v} + \alpha g \theta \hat{\mathbf{z}}, \quad (1.28)$$

$$\partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \kappa \Delta \theta + \frac{\delta T}{d} v_z, \quad (1.29)$$

où l'on a écrit que $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$, et introduit la *viscosité cinématique* $\nu = \mu/\rho_0$; le seul terme de force a priori non gradient, proportionnel à $\alpha g \theta$, est souvent désigné comme le terme de *poussée d'Archimède*. Utilisant comme unité de longueur l'épaisseur de la couche d , comme unité de temps le temps de diffusion thermique d^2/κ , et comme unité de température $\kappa\nu/(\alpha g d^3)$, on obtient les équations réduites :

$$P^{-1}[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p' + \Delta \mathbf{v} + \theta \hat{\mathbf{z}}, \quad (1.30)$$

$$\partial_t \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \Delta \theta + R v_z, \quad (1.31)$$

où

$$P = \frac{\nu}{\kappa} \text{ est le nombre de Prandtl, } R = \frac{\alpha g d^3 \delta T}{\kappa \nu} \text{ est le nombre de Rayleigh,} \quad (1.32)$$

paramètre de contrôle principal de ce système.

La difficulté mathématique, lorsque l'on utilise ce type de modèles de fluides « incompressibles », est de prendre en compte correctement la condition (1.19) afin d'éliminer la pression, qui n'est pas définie par une loi de comportement. Dans un premier temps, nous allons nous simplifier la tâche en remarquant que notre couche de fluide est *isotrope*, et donc que les *rouleaux de convection* attendus au seuil (voir la section 1.6 et plus particulièrement la figure 1.5) peuvent s'orienter dans n'importe quelle direction. Par choix des axes de référence, nous pouvons donc décrire des structures de rouleaux comme *bidimensionnelles* xz , i.e. supposer que

$$\partial_y = 0 \quad \text{et} \quad v_y = 0. \quad (1.33)$$

On vérifie alors facilement que l'équation de Navier-Stokes (1.30) dans la direction y est trivialement vérifiée. D'autre part, sous les hypothèses (1.33), la condition (1.19) montre l'existence d'une *fonction courant* ψ telle que

$$\mathbf{v} = \mathbf{rot}(\psi \hat{\mathbf{y}}) = -(\partial_z \psi) \hat{\mathbf{x}} + (\partial_x \psi) \hat{\mathbf{z}}. \quad (1.34)$$

L'équation de la vitesse (1.30), de la forme

$$\mathbf{S} = -\nabla p'$$

où p' est inconnue, est équivalente, dans le domaine d'écoulement simplement connexe considéré, à l'équation de la vorticité

$$\mathbf{rot}(\mathbf{S}) = \mathbf{0},$$

qui s'identifie à sa composante suivant $\hat{\mathbf{y}}$,

$$\underbrace{P^{-1} \partial_t (-\Delta \psi)}_{[D \cdot \partial_t V]_1} + \underbrace{P^{-1} [\partial_z (\mathbf{v} \cdot \nabla v_x) - \partial_x (\mathbf{v} \cdot \nabla v_z)]}_{-[N_2(V, V)]_1} = \underbrace{-\Delta \Delta \psi - \partial_x \theta}_{[L_R \cdot V]_1}, \quad (1.35)$$

d'après l'hypothèse de bidimensionnalité xz . Comme la pression a bien été éliminée par cette opération, le vecteur d'état local du fluide sera

$$V = (\psi, \theta) \quad (1.36)$$

qui est effectivement nul dans la configuration de base. L'équation (1.35) est donc la première équation de la dynamique du système sous la forme (1.3). On remarque qu'ici il n'a pas été nécessaire de faire un développement en puissances de V - celui-ci est en fait « contenu » dans les lois de comportement (1.21) et (1.23), et dans l'écriture de la densité en terme de $T - T_0$ -, et qu'il n'y a pas de termes cubiques. La deuxième équation de la dynamique est évidemment donnée par l'équation de la chaleur (1.31), que nous récrivons ici,

$$\underbrace{\partial_t \theta}_{[D \cdot \partial_t V]_2} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \theta}_{-[N_2(V, V)]_2} = \underbrace{\Delta \theta + Rv_z}_{[L_R \cdot V]_2} . \quad (1.37)$$

Les conditions limites de *parois isothermes* (1.25) en terme de θ sont, compte tenu de (1.26), (1.27) et des unités d'adimensionnement choisies,

$$\theta = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } 1. \quad (1.38)$$

Les conditions limites les plus réalistes sur \mathbf{v} sont celles d'*adhérence*

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } z = 0 \text{ et } 1 \iff \partial_x \psi = \partial_z \psi = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } 1, \quad (1.39)$$

mais elles exigent un traitement numérique des équations pour leur résolution. Afin d'obtenir un modèle permettant des calculs analytiques, on introduit souvent des conditions de *glissement sans frottements*

$$v_z = \partial_z v_x = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } 1 \iff \partial_x \psi = \partial_z^2 \psi = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } 1. \quad (1.40)$$

Nous reviendrons sur ce modèle section 1.6.

1.3 Principes de l'analyse linéaire de stabilité

1.3.1 Problème linéarisé

Dans tout système physique existent différentes sources de « *bruits* », c'est-à-dire de petites perturbations de tous les champs intervenant dans le vecteur d'état local V . On peut penser à des vibrations mécaniques ou des perturbations thermiques induites par l'« environnement », ou même à l'agitation thermique. En conséquence, la solution de base $V = 0$ des équations (1.2) et (1.3) ne sera effectivement observée que si elle est ***stable vis-à-vis de petites perturbations***, c'est-à-dire si en résolvant (1.2) et (1.3) en partant d'une condition initiale $V_0 \neq 0$ proche de 0 suivant

$$\begin{aligned} V(t=0) &= V_0 \text{ dans } \Omega, \\ C \cdot V &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ D \cdot \partial_t V &= L_R \cdot V + N_2(V, V) + N_3(V, V, V) \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \quad (1.41)$$

$V(t)$ restera effectivement proche de 0 à tout instant $t > 0$. Si cela est, on peut négliger les termes non linéaires dans l'équation de la dynamique (1.41), et résoudre le ***problème linéarisé***

$$\boxed{\begin{aligned} V(t=0) &= V_0 \text{ dans } \Omega, \\ C \cdot V &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ D \cdot \partial_t V &= L_R \cdot V \text{ dans } \Omega. \end{aligned}} \quad (1.42)$$

1.3.2 Résolution par décomposition modale

Comme, par hypothèse, les opérateurs C , D et L_R ne dépendent pas du temps, le problème (1.42) peut en général se résoudre en recherchant une dépendance la plus simple possible en temps i.e. en $\exp(\sigma t)$, c'est-à-dire en superposant les *modes propres ou normaux* complexes $V_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x})$ solutions de

$$\boxed{C \cdot V_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad \sigma(\mathbf{q}, R)D \cdot V_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x}) = L_R \cdot V_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x}) \text{ dans } \Omega} . \quad (1.43)$$

Dans les cas fréquents où D est inversible, ces modes normaux ne sont autres que les *vecteurs propres* de l'opérateur $D^{-1} \cdot L_R$ dans l'espace des champs réguliers sur $\bar{\Omega}$ satisfaisant aux conditions limites $C \cdot V = 0$ sur $\partial\Omega$, tandis que les $\sigma(\mathbf{q}, R)$ sont les *valeurs propres* correspondantes. Nous utiliserons toujours cette terminologie, sachant d'ailleurs que l'on désigne un problème de la forme (1.43) avec $D \neq I$ opérateur identité comme un *problème aux valeurs propres généralisé*. Les vecteurs et valeurs propres dépendent de R et de « nombres » (q_1, \dots, q_m) que l'on regroupe pour simplifier les notations dans un « vecteur »

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m) .$$

Notons aussi que l'on a souvent intérêt à passer en complexes pour résoudre (1.43), en posant

$$V_{réel} = 2\text{Re}(V_{complexe}) = V_{complexe} + V_{complexe}^* = V_{complexe} + c.c. ; \quad (1.44)$$

alors les valeurs propres $\sigma(\mathbf{q}, R)$ sont complexes,

$$\boxed{\sigma(\mathbf{q}, R) = \sigma_r(\mathbf{q}, R) - i\omega(\mathbf{q}, R)} . \quad (1.45)$$

Pour les problèmes « bien posés » issus de « bons modèles physiques », sauf cas exceptionnel (1.43) a de bonnes propriétés mathématiques, de sorte que ses modes propres forment un *système total* de l'espace des champs V satisfaisant aux conditions limites¹¹. Ceci signifie exactement que toute condition initiale V_0 de (1.42) peut s'écrire sous la forme d'une *décomposition modale*

$$V_0(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q})V_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x}) . \quad (1.46)$$

Dans cette formule l'usage du symbole Σ suggère que les valeurs possibles des nombres \mathbf{q} sont une infinité dénombrable, et donc que la (ou les) somme(s) sur \mathbf{q} est (sont) discrète(s) ; il s'agit alors d'une (ou de) *série(s)*. Ceci n'est en fait valable que si le système physique est *confiné*. Par contre, pour un système *non confiné* c'est-à-dire infiniment étendu dans une direction au moins, l'ensemble des valeurs possibles des nombres \mathbf{q} forme un (ou des) continuum(s). Il faut alors remplacer la (ou les) somme(s) dans (1.46) par une ou des *intégrales* éventuellement combinées avec une (ou des) somme(s) ; nous ne le ferons pas en général pour ne pas alourdir les notations, et parlerons dans tous les cas de « *séries généralisées* ».

Nous pouvons alors résoudre le problème linéarisé (1.42) pour une condition initiale V_0 « arbitraire » donnée par une famille « arbitraire » d'amplitudes $A(\mathbf{q})$ dans (1.46) - les guillemets signifient qu'il faut veiller à assurer la convergence de la « série généralisée » (1.46)! - selon

$$\boxed{V(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q})V_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x}) \exp[\sigma(\mathbf{q}, R)t]} . \quad (1.47)$$

Nous voyons alors que dans la décomposition en parties réelle et imaginaire (1.45), $\sigma_r(\mathbf{q}, R)$ est le *taux de croissance* s'il est positif *ou de décroissance* s'il est négatif du mode $V_1(\mathbf{q}, R)$, et $\omega(\mathbf{q}, R)$ sa *fréquence angulaire*. Le *critère de stabilité*

$$\forall \text{ famille } A(\mathbf{q}), \quad V(t) = \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q})V_1(\mathbf{q}, R) \exp[\sigma(\mathbf{q}, R)t] \longrightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty$$

¹¹La théorie mathématique de la *diagonalisation des opérateurs* est ce que l'on appelle la *théorie spectrale des opérateurs*. Pour un contre-exemple instructif, on se penchera avec profit sur l'exercice 1.

est donc

$$\boxed{\forall \mathbf{q}, \sigma_r(\mathbf{q}, R) < 0} . \quad (1.48)$$

On parle alors de *modes amortis*. Au contraire, une *instabilité* se produit dès qu'un mode présente un taux de croissance strictement positif; on parle alors de *mode amplifié*. À la frontière entre ces deux types de mode, un mode de taux de croissance nul est dit *neutre*.

Comme nous avons supposé qu'aux valeurs faibles de R , la configuration de base $V = 0$ est stable, l'instabilité se produira donc pour la première valeur de R pour laquelle il existe *un* mode instable; ce changement brusque de comportement s'appelle une *bifurcation*. Cette valeur de R est désignée comme la *valeur critique* R_c de R , et ce mode $V_1(\mathbf{q}_c, R_c)$ comme le *mode critique*. Notons que, dans certains cas « exceptionnels », *deux* (voire plusieurs) modes *vraiment* différents peuvent devenir instable à la même valeur de R ... le *vraiment* signifiant que lorsque l'on est passé en complexes suivant (1.44), on « identifie » un mode complexe avec le mode complexe conjugué. Nous reviendrons sur ces cas section 4.1.

Nous définissons l'*écart réduit* au seuil de l'instabilité ou de la bifurcation par

$$\boxed{\epsilon = \frac{R - R_c}{R_c}} \quad (1.49)$$

ce qui équivaut à poser $R = R_c(1 + \epsilon)$. Dans tout ce qui suit, puisque nous travaillerons près du seuil de bifurcation, ce paramètre ϵ sera supposé petit. Les hypothèses que nous avons posées conduisent en général¹² au *développement limité* suivant de la valeur propre du mode critique au voisinage de $\epsilon = 0$ ¹³

$$\boxed{\sigma(\mathbf{q}_c, R) = -i\omega_c + \sigma_0\epsilon + O(\epsilon^2)} , \quad (1.50)$$

où ω_c , l'opposé de la partie imaginaire de $\sigma(\mathbf{q}_c, R_c)$, est la *fréquence angulaire critique*, et σ_0 est un paramètre de partie réelle strictement positive.

À ce stade il importe de mentionner qu'en général¹⁴ le mode critique peut

- soit *être isolé*, c'est-à-dire le seul à avoir un taux de croissance positif pour toute une gamme de valeurs $\epsilon \in [0, \epsilon_l]$ avec $\epsilon_l > 0$; ceci arrive typiquement pour des systèmes confinés dans lesquels les nombres de modes \mathbf{q} et les valeurs propres $\sigma(\mathbf{q}, R)$ forment des ensembles discrets dénombrables.
- soit, au contraire, *faire partie d'une famille continue ou semi-continue de modes* qui vont progressivement acquérir des taux de croissance positifs lorsque ϵ va augmenter; ceci ne peut arriver que dans des systèmes non confinés ou faiblement confinés.

Cette famille de modes est alors désignée comme celles des *modes actifs*; dans le premier cas d'un mode critique isolé, celui-ci est désigné comme *seul mode actif*. Par opposition tous les autres modes sont désignés comme les *modes passifs*.

Au vu de l'équation (1.50), il importe aussi de distinguer les *instabilités stationnaires*, pour lesquelles toutes les valeurs propres des modes actifs $\sigma(\mathbf{q}, R)$ sont réelles, des *instabilités oscillantes*, pour lesquelles elles sont en général complexes et en particulier $\omega_c \neq 0$ (certains auteurs qualifient plutôt ces dernières instabilités d'*instabilités de Hopf*).

Dans le cas *stationnaire*, nous pouvons introduire le *temps caractéristique*

$$\tau = 1/\sigma_0 \quad (1.51)$$

strictement positif, de sorte qu'au voisinage du seuil de l'instabilité

$$\boxed{\sigma(\mathbf{q}_c, R) = \frac{\epsilon}{\tau} + O(\epsilon^2)} . \quad (1.52)$$

¹²C'est ici que l'hypothèse concernant le caractère *dissipatif* du système intervient, cf. la note 1 de la p. 5.

¹³Dorénavant nous utiliserons indifféremment R ou ϵ liés par (1.49) comme paramètre de contrôle principal.

¹⁴En oubliant toujours les cas où plusieurs modes peuvent devenir critiques en même temps.

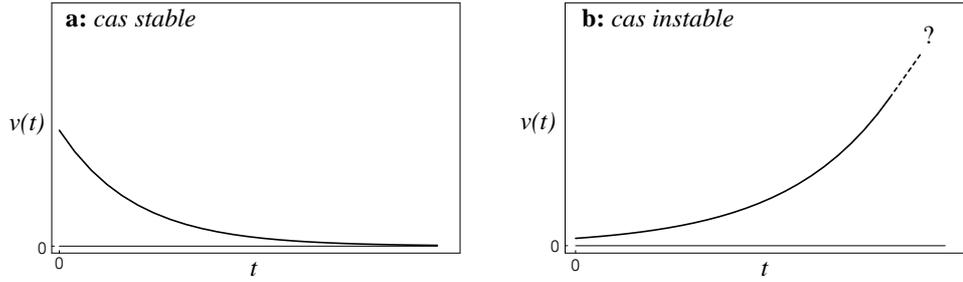


Fig. 1.1 – Comportement typique d'une composante v du vecteur d'état local V au voisinage du seuil d'une instabilité *stationnaire*. L'évolution à partir d'une valeur initiale petite est donnée d'après (1.54) par une loi en $\exp(\epsilon t/\tau)$. Dans le cas stable **a**, $\epsilon < 0$ et on observe une relaxation vers la configuration de base $V = 0$. Par contre, dans le cas instable **b**, $\epsilon > 0$ et on s'éloigne de la configuration de base $V = 0$. La loi en $\exp(\epsilon t/\tau)$ n'est bien sûr valable que durant le *régime linéaire* durant lequel V reste d'amplitude très faible. Aux temps plus longs, l'analyse linéaire n'est plus pertinente.

Partant d'une condition initiale (1.46) petite perturbation née de « bruits », donc avec des amplitudes $A(\mathbf{q})$ petite, nous pouvons maintenant donner une prédiction concernant l'évolution temporelle de la solution correspondante (1.47)

$$V(t) = \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}) V_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x}) \exp[\sigma(\mathbf{q}, R)t]. \quad (1.53)$$

En supposant le mode critique isolé¹⁵, pour ϵ proche de 0 tous les modes passifs auront un taux de croissance négatif fini, et vont donc décroître exponentiellement très rapidement par rapport au mode critique de taux de croissance ϵ/τ d'après (1.52). Il ne subsistera donc seulement dans (1.53), au bout d'un temps de l'ordre de l'inverse du taux de croissance du mode passif le moins amorti, que la contribution du mode critique

$$V(t) \sim A(\mathbf{q}_c) V_1(\mathbf{q}_c, R_c; \mathbf{x}) \exp\left(\frac{\epsilon t}{\tau}\right) = A(\mathbf{q}_c) V_1(\mathbf{q}_c, R_c; \mathbf{x}) \exp\left(\frac{t}{\tau'}\right) \quad (1.54)$$

en posant

$$\tau' = \tau/\epsilon. \quad (1.55)$$

On a donc un comportement d'exponentielle décroissante au dessous du seuil de l'instabilité, pour $\epsilon < 0$, et au contraire d'exponentielle croissante au dessus du seuil de l'instabilité, pour $\epsilon > 0$ (cf. la figure 1.1), avec un temps caractéristique τ' (1.55) qui diverge au seuil. C'est le phénomène de *ralentissement critique*; il nous mène à une estimation de la forme

$$\partial_t \sim 1/\tau' = \epsilon/\tau \quad (1.56)$$

indiquant des *variations temporelles lentes*, pour caractériser la dynamique des solutions $V(t)$ correspondantes. Notons que dans le cas instable (figure 1.1b) la solution approximative (1.54) n'est évidemment pas valable aux temps longs; ainsi l'analyse linéaire de stabilité nous dit seulement que le système va quitter la configuration de base, mais pas ce qui va se passer ensuite...

Dans le cas *oscillant*, nous devons définir le *temps caractéristique* par

$$\tau = 1/\text{Re}(\sigma_0); \quad (1.57)$$

il est toujours strictement positif. Posant en conséquence

$$\sigma_0 = (1 + is)/\tau, \quad (1.58)$$

nous obtenons au voisinage du seuil de l'instabilité

$$\sigma(\mathbf{q}_c, R) = -i\omega_c + \frac{1 + is}{\tau} \epsilon + O(\epsilon^2). \quad (1.59)$$

¹⁵Dans le cas contraire la loi modèle (1.54) sera rigoureusement valable si on part d'une condition initiale où seule $A(\mathbf{q}_c) \neq 0$ parmi les amplitudes des modes actifs.

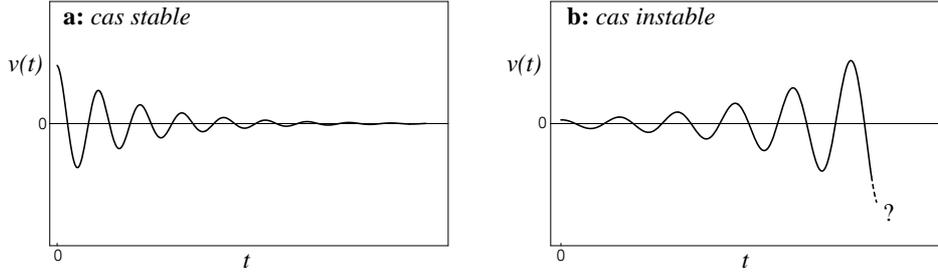


Fig. 1.2 – Comportement typique d'une composante v du vecteur d'état local V au voisinage du seuil d'une instabilité *oscillante*, tracé à partir de la loi (1.61) dans les cas stable **a**, $\epsilon < 0$, et instable **b**, $\epsilon > 0$.

En superposant le mode critique et son complexe conjugué, qui est aussi mode propre puisque les opérateurs intervenant dans les équations physiques (1.41) sont à coefficients réels, on obtient l'évolution des perturbations les plus dangereuses¹⁶ de la configuration de base :

$$\begin{aligned} V(t=0) &= A(\mathbf{q}_c)V_1(\mathbf{q}_c, R; \mathbf{x}) + A^*(\mathbf{q}_c)V_1^*(\mathbf{q}_c, R; \mathbf{x}) \\ \implies V(t) &\sim A(\mathbf{q}_c)V_1(\mathbf{q}_c, R; \mathbf{x}) \exp\left(-i\omega_c t + \frac{1+is}{\tau}\epsilon t\right) + c.c. , \end{aligned} \quad (1.60)$$

soit, pour une composante v ,

$$v(t) \sim |A(\mathbf{q}_c)| \cos\left[\left(\omega_c - s\frac{\epsilon}{\tau}\right)t - \arg(A(\mathbf{q}_c))\right] \exp\left(\frac{\epsilon t}{\tau}\right). \quad (1.61)$$

On a maintenant multiplication d'oscillations temporelles rapides se produisant sur une échelle de temps $2\pi/\omega_c$ avec la loi exponentielle lente vue précédemment, comme illustré sur la figure 1.2.

1.4 Application au modèle d'afficheurs → instabilité homogène

1.4.1 Précision : conditions limites latérales périodiques et modes de Fourier

La stabilité de la configuration planaire $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ de l'afficheur modèle introduit section 1.2.1 est régie par le problème linéarisé déduit de (1.18),

$$\sigma D\phi = \sigma\phi = L_R\phi = R\phi + \Delta\phi, \quad (1.62)$$

qu'il convient de compléter d'une part par les conditions limites (1.14),

$$\phi = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } 1, \quad (1.63)$$

d'autre part par des conditions limites latérales. Nous avons seulement spécifié section 1.2.1 que les « bords » correspondants de la cellule sont très éloignés, et ont a priori « peu » d'influence sur ce qui se passe au « cœur » de celle-ci. Ceci incite le théoricien à choisir, dans un premier temps au moins¹⁷, des conditions limites latérales permettant des calculs les plus simples possibles, à savoir des *conditions limites périodiques* : on restreint l'ouvert de travail à

$$\Omega = \{ (x, y, z) \in]0, L_x[\times]0, L_y[\times]0, 1[\}, \quad (1.64)$$

¹⁶C'est-à-dire les plus susceptibles de croître.

¹⁷Nous n'aurons malheureusement pas le temps de revenir sur cette approximation dans ce cours. Disons simplement que les conditions limites périodiques (1.65) permettent de décrire des structures homogènes en xy ou des structures périodiques en xy qui peuvent être réalisées « loin des bords » d'une cellule étendue, et que, par superposition de telles solutions grâce au *formalisme d'enveloppe* (cf. le chapitre 3), on peut construire des solutions vérifiant des conditions limites réalistes sur des bords éloignés. Ces conditions limites sur les champs locaux doivent alors être transformées en conditions limites sur l'enveloppe $A(x, y, t)$. Un exemple de telle étude se trouve dans Daniels & Ong (1990).

qui présente l'avantage d'être borné, en imposant au champ ϕ de vérifier

$$\forall(x,y,z) \in \bar{\Omega}, \quad \phi(0,y,z) = \phi(L_x,y,z) \quad \text{et} \quad \phi(x,0,z) = \phi(x,L_y,z). \quad (1.65)$$

Le caractère borné de Ω nous permettra section 1.7 de munir l'espace des champs réguliers sur $\bar{\Omega}$ d'un produit scalaire simple; quant aux conditions limites périodiques, elles permettent, après passage en complexes, de rechercher les modes propres de (1.62) sous la forme de **modes de Fourier**

$$\phi_1(x,y,z) = \exp[i(qx + py)] \tilde{\phi}_1(z) \quad (1.66)$$

où les **nombre d'ondes** q et p en x et y doivent d'après (1.65) vérifier

$$q \in 2\pi\mathbb{Z}/L_x, \quad p \in 2\pi\mathbb{Z}/L_y. \quad (1.67)$$

Ceci correspond, en supposant L_x et $L_y \gg 1$, à un système « faiblement confiné », où l'on constate comme annoncé section 1.3.2 que parmi les nombres repérant les modes propres q et p varient semi-continûment¹⁸. L'intérêt de l'usage de modes de Fourier (1.66) est de transformer les opérateurs différentiels horizontaux agissant sur ϕ_1 par la **règle de Fourier**

$$\partial_x \leftrightarrow iq \quad \text{et} \quad \partial_y \leftrightarrow ip \quad (1.68)$$

conduisant à des calculs très simples. On obtient ici, après division par $\exp[i(qx + py)]$, une réduction du problème tridimensionnel (1.62) à un problème unidimensionnel en z ,

$$\sigma \tilde{\phi}_1 = (R - q^2 - p^2) \tilde{\phi}_1 + \partial_z^2 \tilde{\phi}_1. \quad (1.69)$$

On notera cependant que cette réduction ne fonctionne que parce que les opérateurs $D = I$ et $L_R = RI + \Delta$ ne dépendent pas explicitement de x et y ; nous reviendrons sur cette remarque section 1.5.3¹⁹.

1.4.2 Résolution

Le problème (1.69) muni des conditions limites (1.63) conduit aux modes propres

$$\phi_1(q,p,n;x,y,z) = \exp[i(qx + py)] \sin(n\pi z) \quad (1.70)$$

i.e. à

$$\mathbf{q} = (q,p,n) \quad \text{où} \quad q \in 2\pi\mathbb{Z}/L_x, \quad p \in 2\pi\mathbb{Z}/L_y, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (1.71)$$

correspondant à la valeur propre

$$\sigma(\mathbf{q},R) = R - (q^2 + p^2 + n^2\pi^2). \quad (1.72)$$

Ce système de modes propres, représenté pour ce qui concerne leur profil en z figure 1.3, est bien total dans l'espace des fonctions ϕ régulières sur $\bar{\Omega}$ et vérifiant les conditions limites (1.63), (1.65). L'écriture (1.72) montre clairement la compétition entre les effets déstabilisant du champ électrique (terme $R\phi$ dans (1.62)) et stabilisant de diffusion de l'orientation (terme $\Delta\phi$ dans (1.62)). Toutes les valeurs propres étant réelles, l'*instabilité* sera *stationnaire*. Le mode critique possédant pour tout R la plus grande valeur propre est visiblement le mode $q = p = 0$ homogène en xy et possédant la structure verticale la plus simple, i.e. $n = 1$:

$$\mathbf{q}_c = (0,0,1). \quad (1.73)$$

Puisque $q_c = p_c = 0$ on désigne cette *instabilité* comme **homogène** ou **non structurante**. D'après (1.72) le mode critique acquiert un taux de croissance lorsque R dépasse la valeur seuil

$$R_c = \pi^2, \quad (1.74)$$

¹⁸On constate aussi que dans un système infini $L_x = L_y = \infty$ l'ansatz (1.66) peut encore être utilisé, avec $q,p \in \mathbb{R}$ i.e. variant continûment.

¹⁹Essayez de résoudre $\sigma\phi = R\phi + x\Delta\phi$ avec cette même méthode!...

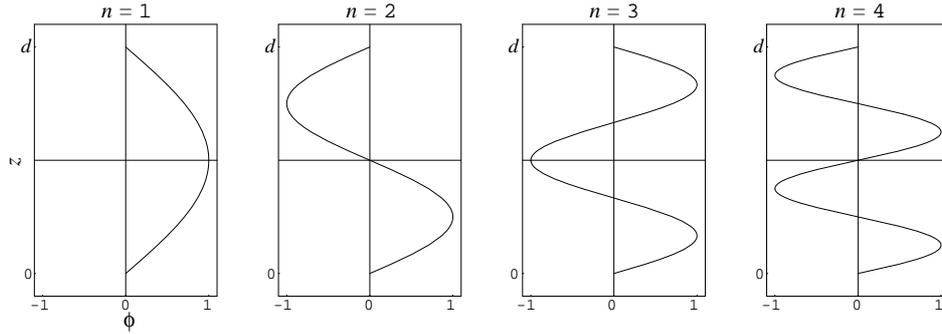


Fig. 1.3 – Profil en z des modes propres (1.70) de nombre n faible pour le problème linéarisé régissant l'évolution de l'angle ϕ repérant le directeur dans un afficheur cristaux liquides.

correspondant compte tenu de la définition de R (1.17) à un potentiel électrique appliqué V_0 critique

$$V_c = \pi \sqrt{K/\epsilon_a} .$$

Ce seuil ne dépend pas de l'épaisseur du pixel, ce qui est intéressant du point de vue « commande ». D'autre part, compte tenu des ordres de grandeurs typiques $K \simeq 10^{-11}$ N, $\epsilon_a \simeq 10 \epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-11}$ N/V² (Oswald & Pieranski 2000), on trouve

$$V_c \simeq 1,1 \text{ V}$$

soit une tension très facile à obtenir avec une pile ou une batterie.

Lorsque ce seuil est dépassé de ϵ , on a d'après (1.72) pour le taux de croissance du mode critique

$$\sigma(\mathbf{q}_c, R_c + R_c \epsilon) = R_c \epsilon ,$$

qui montre que le temps caractéristique vaut

$$\tau = 1/R_c \tag{1.75}$$

i.e. en dimensionnel

$$\tau = \gamma d^2 / (K \pi^2) . \tag{1.76}$$

Cette loi d'échelle en d^2 ne doit pas étonner, puisqu'elle provient des effets de diffusion du directeur traduits par le premier terme du membre de droite de (1.62). A priori la commutation optique associée à cette bifurcation sera donc d'autant plus rapide que le pixel est de faible épaisseur d ; la miniaturisation des afficheurs cristaux liquides est donc un atout de ce point de vue, puisque, avec $d = 10 \mu\text{m}$ par exemple, et $\gamma \simeq 0,08 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ (Oswald & Pieranski 2000), on obtient un temps de réponse caractéristique²⁰

$$\tau \simeq 0,08 \text{ s} .$$

Nous reviendrons sur la dynamique du champ de directeur en régime faiblement non linéaire section 2.1.8; mentionnons seulement que le fait que le directeur quitte pour $V_0 > V_c$ la configuration planaire $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ va permettre²¹ de passer d'un état optiquement transparent à un état opaque.

1.5 Introduction au rôle des symétries - Brisures de symétries

1.5.1 Conséquence de l'invariance par une symétrie de parité

Le tracé des modes propres (1.70) présenté figure 1.3 fait apparaître des modes soit pairs soit impairs vis-à-vis de la symétrie par rapport au plan médian de la couche, définie par $z \mapsto 1-z$. On pouvait prévoir ce phénomène.

²⁰Bref, mais pas suffisamment pour assurer par exemple une commutation à la cadence vidéo de 25 Hz. Diverses « astuces » reposant par exemple sur un « dopage » du cristal liquide ont été imaginées par les physiciens pour obtenir des temps de réponse plus courts...

²¹À cause de propriétés de guidage des ondes lumineuses par le champ de directeur, cf. Oswald & Pieranski (2000).

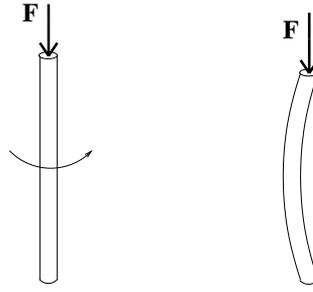


Fig. 1.4 – Phénomène de flambement d'un barreau cylindrique sous l'application d'une force verticale \mathbf{F} . *Gauche* : si $F < F_c$, le barreau reste vertical, et le système est invariant par rotation autour de l'axe du barreau. *Droite* : si $F > F_c$, la bifurcation de flambement a lieu : le barreau fléchit dans une direction particulière du plan horizontal. La symétrie de rotation autour de l'axe du barreau a été *brisée*.

Définissons en effet l'opérateur de symétrie correspondant par son action sur un champ $V(z) = (\phi(z))$, supposé homogène en xy pour simplifier, par

$$S \cdot V(z) = V(1 - z) . \quad (1.77)$$

Si V satisfait les conditions limites $V = 0$ en $z = 0$ et 1 , il en est de même pour $S \cdot V$. De plus, compte tenu de ce que, d'après (1.62), $D = I$ opérateur identité, et $L_R = \Delta + RI$, on a

$$\forall V, \quad D \cdot S \cdot V = S \cdot D \cdot V \quad \text{et} \quad L_R \cdot S \cdot V = S \cdot L_R \cdot V ,$$

c'est-à-dire les *propriétés de commutation*

$$D \cdot S = S \cdot D \quad \text{et} \quad L_R \cdot S = S \cdot L_R . \quad (1.78)$$

On dit que le problème linéarisé (1.62) est *invariant par la symétrie* S . Ces propriétés montrent que le sous-espace propre du problème linéarisé associé à une valeur propre σ est invariant par S , cf

$$\sigma D \cdot V = L_R \cdot V \implies \sigma S \cdot D \cdot V = S \cdot L_R \cdot V \iff \sigma D \cdot (S \cdot V) = L_R \cdot (S \cdot V) .$$

Or ici ces espaces propres sont non dégénérés c'est-à-dire de dimension 1. Si $V_1(0,0,n)$ est un mode propre, on doit donc avoir

$$S \cdot V_1(0,0,n) = \lambda V_1(0,0,n) \quad (1.79)$$

pour une certaine constante λ réelle. Mais comme $S^2 = I$, il vient $\lambda^2 = 1$ c'est-à-dire $\lambda = \pm 1$: **les modes propres sont soit pairs soit impairs** sous $z \mapsto 1 - z$. Ce raisonnement peut d'ailleurs être répété pour des modes de nombres d'ondes q, p fixés différents de 0, puisqu'alors on a encore non-dégénérescence des sous-espaces propres correspondants.

Contrairement à la solution de base $V = 0$, qui est à la fois *paire et impaire* sous $z \mapsto 1 - z$, on constate donc que les modes propres d'instabilité **brisent la symétrie** $z \mapsto 1 - z$. En particulier, lorsque le seuil de la bifurcation va être faiblement dépassé, on s'attend à avoir une solution proportionnelle à $V_1(0,0,1)$ à l'ordre le plus bas, c'est-à-dire une solution *paire* et non *impaire* sous $z \mapsto 1 - z$. On dit qu'il y a eu **brisure de la symétrie de parité** S .

1.5.2 Généralisation

Le fait qu'une bifurcation soit associée à une (ou des) brisure(s) de symétrie(s) est fréquemment observé, surtout lorsque l'on étudie la stabilité de solutions « simples » de systèmes « simples », l'adjectif « simple » voulant en général - en tous cas ici - dire « hautement symétrique ». Outre des **symétries discrètes** telle la **symétrie miroir ou de parité** étudiée ici, on peut aussi avoir affaire à des **symétries continues**, c'est-à-dire à un **groupe de symétrie** dépendant d'un ou plusieurs paramètres variant continûment. Un exemple typique est celui de la bifurcation de flambement d'un barreau cylindrique représenté figure 1.4; le groupe de symétrie impliqué est le **groupe des rotations** autour de l'axe vertical du barreau, qui est un groupe de symétrie à un paramètre (l'angle de la rotation considérée, qui varie dans \mathbb{R}). Nous allons étudier dans la section suivante ce qui se passe pour un **groupe de translations**.

1.5.3 Conséquence de l'invariance par symétries de translations

Si on revient en arrière sur le modèle d'afficheur considéré idéalement dans une couche latéralement infinie, on constate qu'il est *invariant par toutes les translations horizontales*, définies par exemple par

$$T_a \cdot V(x,y,z) = V(x+a,y,z) \quad (1.80)$$

avec a réel quelconque pour les translations suivant $\hat{\mathbf{x}}$. Ceci vient du fait que les opérateurs D, L_R et C associés au problème linéarisé et à ses conditions limites ne dépendent pas de x , et se traduit par des propriétés de commutation similaires à (1.78),

$$D \cdot T_a = T_a \cdot D, \quad L_R \cdot T_a = T_a \cdot L_R, \quad C \cdot T_a = T_a \cdot C.$$

On a donc invariance des sous-espaces propres du problème linéarisé par toutes les translations T_a . La fin du raisonnement mené dans le cas de la symétrie de parité n'est cependant pas valable ici, puisque le système étant non confiné les sous-espaces propres sont de dimension strictement supérieure à 1 en général. De façon plus pragmatique, on peut remarquer que **le passage en complexes et en modes de Fourier suivant (1.66) réussit exactement à cause de cette propriété d'invariance par translations**. Ceci est général, et conduit à une loi de transformation sous l'action d'une translation rappelant (1.79), à savoir :

$$\forall \mathbf{q}, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad T_a \cdot V_1(\mathbf{q}; x,y,z) = V_1(\mathbf{q}; x+a,y,z) = \lambda(a)V_1(\mathbf{q}; x,y,z)$$

avec $\lambda(a) = \exp(ika)$.

Notons enfin que la restriction à une géométrie faiblement confinée avec conditions limites latérales périodiques n'altère pas ce qui précède mais restreint seulement les valeurs possibles de a par exemple à des diviseurs entiers de la longueur de périodicité L_x .

1.6 Application au modèle de thermoconvection → instabilité structurante

Le modèle développé section 1.2.2 conduit au problème linéarisé

$$\begin{aligned} P^{-1}\sigma(-\Delta\psi) &= -\Delta\Delta\psi - \partial_x\theta, \\ \sigma\theta &= \Delta\theta + R\partial_x\psi \end{aligned} \quad (1.81)$$

gouvernant dans $\Omega = \{ (x,z) \in \mathbb{R} \times]0,1[\}$ l'évolution des perturbations $V = (\psi, \theta)$ de la solution conductive. Comme nous l'avons déjà mentionné, le calcul analytique des modes propres associés n'est possible qu'à condition de compléter les conditions limites isothermales (1.38) avec des conditions limites de *glissement*²² sur la vitesse (1.40), ce qui conduit à

$$\theta = \psi = \partial_z^2\psi = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } 1. \quad (1.82)$$

Le système (1.81) étant *invariant par translations dans la direction x* , on est conduit d'après la discussion de la section précédente à rechercher les modes propres du problème comme des modes de Fourier en $\exp(ikx)$, où $q \in \mathbb{R}$ est le nombre d'onde en x . On vérifie facilement, et cela est important, que tous les modes homogènes de nombre d'onde q nul, c'est-à-dire indépendants de x , sont non dangereux car amortis²³. Par contre, dans le cas générique $q \neq 0$, on obtient des modes indexés d'une part par un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et d'autre part par une variable pouvant prendre deux valeurs « \pm »,

$$V_1(q,n,\pm,R) = (\Psi_{\pm}, 1) \exp(ikx) \sin(n\pi z), \quad (1.83)$$

le coefficient Ψ_{\pm} s'obtenant par injection dans l'équation de la dynamique de θ ,

$$\Psi_{\pm} = [p_n + \sigma(q,n,\pm)] / (R ik) \quad (1.84)$$

²²Nous sous-entendons dorénavant le « sans frottements ».

²³En effet pour un tel mode les équations (1.81) se découpent et deviennent des équations de diffusion pure.

avec

$$p_n = q^2 + n^2\pi^2, \quad (1.85)$$

tandis que les valeurs propres $\sigma_{\pm} = \sigma(q, n, \pm)$ s'obtiennent grâce à l'équation de la dynamique de ψ par résolution de

$$p_n\sigma_{\pm}^2 + (1+P)p_n^2\sigma_{\pm} + P(p_n^3 - Rq^2) = 0. \quad (1.86)$$

On se convaincra de ce que la réunion des deux familles de modes définis par (1.83) avec celle des modes homogènes $q = 0$ forme un système total de l'espace des champs (ψ, θ) réguliers sur $\bar{\Omega}$ et vérifiant les conditions limites (1.82). On notera aussi que ces modes sont soit pairs (si n est impair) soit impairs (si n est pair) sous la symétrie $z \mapsto 1 - z$ qui est une symétrie du problème...

Le discriminant de l'équation du second degré (1.86) en σ_{\pm} est toujours positif. On en déduit que les valeurs propres σ_{\pm} sont toujours réelles, c'est-à-dire que l'instabilité sera *stationnaire*. De plus le fait que les deux racines de (1.86) vérifient

$$\sigma_+ + \sigma_- = -(1+P)p_n \quad \text{et} \quad \sigma_+\sigma_- = P(p_n^3 - Rq^2)/p_n$$

montre qu'elles sont toutes les deux négatives tant que

$$p_n^3 > Rq^2,$$

mais que la racine σ_+ devient positive dès que cette inégalité n'est plus vérifiée²⁴. Ceci donne le seuil de déstabilisation du mode correspondant, soit, compte tenu de (1.85),

$$R > R_0(q, n, +) = (q^2 + n^2\pi^2)^3/q^2. \quad (1.87)$$

Les modes les plus dangereux sont donc les modes $n = 1$ pairs sous $z \mapsto 1 - z$; par *minimisation* par rapport au nombre d'onde q le long de cette courbe neutre (cf. la figure 1.6), on trouve le nombre d'onde critique q_c et le Rayleigh critique R_c :

$$q_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad R_c = R_0(q_c, 1, +) = \frac{27\pi^4}{4}; \quad (1.88)$$

le mode critique déduit de (1.83) et (1.84) est alors

$$V_1(q_c, 1, +, R_c) = \left(-i \frac{2\sqrt{2}}{9\pi^3}, 1 \right) \exp(iq_c x) \sin(\pi z). \quad (1.89)$$

Le mode réel correspondant est

$$V = AV_1(q_c, 1, +, R_c) + c.c. = 2A \left(\frac{2\sqrt{2}}{9\pi^3} \sin(q_c x), \cos(q_c x) \right) \sin(\pi z) \quad (1.90)$$

si $A \in \mathbb{R}$, qui indique la *formation d'une structure de rouleaux* représentée figure 1.5 **brisant l'invariance par translation de la solution de base conductive**. On désigne une telle *instabilité conduisant à la formation spontanée de structures à partir d'une solution de base non structurée* comme une *instabilité structurante*. La période dimensionnelle spontanément sélectionnée est

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{q_c} = 2\sqrt{2}d$$

correspondant à des rouleaux à peu près carrés; des rouleaux plus étroits dissiperaient trop, alors que dans des rouleaux plus larges le mécanisme de l'instabilité, qui repose sur l'existence de gradients horizontaux de température et de vitesse, ne pourrait se développer (voir aussi la figure 1.6). Notons aussi que si on suppose $A = |A| \exp(i\phi)$ avec $\phi \in \mathbb{R}$ éventuellement non nul dans la solution linéaire réelle

$$V = AV_1(q_c, 1, +, R_c) + c.c.,$$

²⁴Une systématisation de ce type de raisonnements évitant de recourir au calcul complet des valeurs propres est présentée, dans le cas d'une « dimension effective » 2 comme ici, section A.2.2; on contempera aussi la figure A.2.

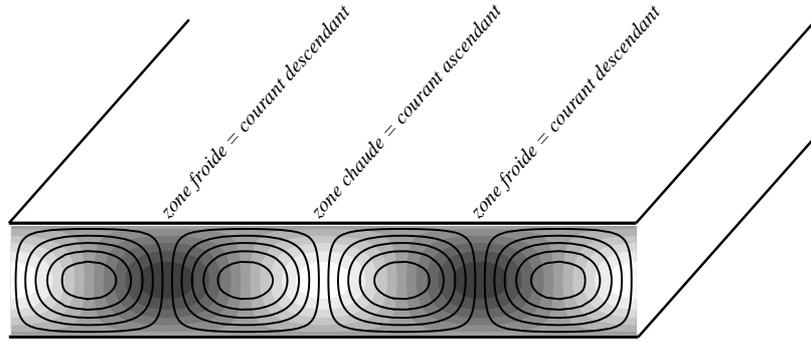


Fig. 1.5 – Structure de rouleaux critique en régime linéaire (1.90) prédite par le modèle de Boussinesq en conditions de glissement. Dans la coupe réalisée dans le plan vertical xz , les lignes noires représentent les lignes de courant (lignes iso-valeurs de ψ), et les niveaux de gris les valeurs de la perturbation de température θ . Le mécanisme de l'instabilité, $\theta > 0$ (particule + chaude donc + légère) $\implies v_z > 0$ (à cause de la poussée d'Archimède) $\implies \theta > 0$ (à cause de l'advection du profil de température de base), explique l'identité entre les zones de courants ascendants et les régions chaudes.

on obtient, plus généralement que (1.90),

$$V = 2A \left(\frac{2\sqrt{2}}{9\pi^3} \sin(q_c x + \phi), \cos(q_c x + \phi) \right) \sin(\pi z) .$$

Ceci montre que, à la bifurcation, c'est la *phase* ϕ de l'amplitude complexe A qui *va décider de la façon précise dont la symétrie de translation le long de x est brisée* ; pour cette raison on parle aussi d'*invariance de phase* à propos d'une symétrie de translation.

Calculons aussi en application l'ordre de grandeur de la différence de température δT_c à appliquer à une casserole d'eau d'épaisseur 5 cm pour la mettre en convection. D'après la définition (1.32) du Rayleigh,

$$\delta T_c = \frac{\kappa \nu}{\alpha g d^3} R_c ,$$

soit avec $\kappa = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, $\nu = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\alpha = 2,6 \cdot 10^{-4}/\text{K}$,

$$\delta T_c \simeq 3 \cdot 10^{-4} \text{ K} .$$

Ceci signifie que l'eau se met à convec ter très facilement, comme vous l'avez sans doute observé ; nous verrons que cela est heureux du point de vue des transferts thermiques, qui sont toujours facilités par la convection. Ce petit calcul prouve aussi que pour pouvoir étudier la convection près du seuil, il faut soit utiliser des couches très minces²⁵, soit des fluides très visqueux...

En retournant aux quantités adimensionnées, on notera que les valeurs du Rayleigh nécessaires pour déstabiliser une autre famille de modes, à savoir les modes $n = 2$ impairs, sont d'après (1.87) très supérieures à R_c (figure 1.6), ce qui indique au voisinage du seuil une séparation très nette entre les modes pairs et impairs. En posant comme d'habitude $\epsilon = R/R_c - 1$, et en remarquant que pour le mode critique $p_n = p_1 = 3\pi^2/2$, on obtient d'autre part, à partir de (1.86),

$$\sigma(q_c, 1, +, R) = \frac{\epsilon}{\tau} + o(\epsilon) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2}{3\pi^2} (1 + P^{-1}) . \quad (1.91)$$

Dimensionnellement le temps caractéristique de l'instabilité de convection est donc

$$\tau = \frac{2d^2}{3\pi^2 \kappa} (1 + P^{-1}) .$$

²⁵C'est par exemple le choix que fit H. Bénard, physicien français, qui mit en évidence en 1900 l'existence d'un seuil en thermoconvection grâce à des mesures portant sur des couches d'épaisseur 1 mm environ ; ses résultats furent interprétés grâce à la théorie que nous venons d'exposer par Lord Rayleigh en 1920.

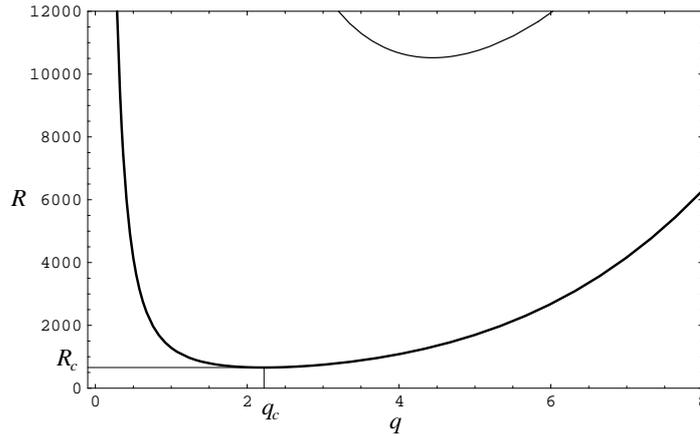


Fig. 1.6 – Pour le modèle de Boussinesq en conditions de glissement, courbes neutres de limite de déstabilisation du premier mode pair $n = 1$ (courbe épaisse) et du premier mode impair $n = 2$ (courbe fine) en fonction du nombre d'onde q .

Il est de l'ordre de grandeur du temps de diffusion thermique dans la couche $\tau_{therm} = d^2/\kappa$ pour des valeurs du nombre de Prandtl $P \gtrsim 1$; par contre pour des Prandtl faibles on peut écrire que

$$\tau \simeq \frac{2d^2}{3\pi^2\kappa} P^{-1} = \frac{2d^2}{3\pi^2\nu},$$

soit un temps de l'ordre de grandeur du temps de diffusion visqueuse dans la couche $\tau_{visq} = d^2/\nu$. Comme $P = \tau_{therm}/\tau_{visq}$, nous voyons que *c'est le champ* - température ou vitesse ici - *qui possède la dynamique la plus lente qui « contrôle » la dynamique de l'instabilité* puisqu'il définit l'ordre de grandeur de son temps caractéristique. Ce phénomène, semblable à celui qui s'est manifesté concernant la dynamique des modes propres et qui a conduit à (1.56), est général et important.

Si les conditions limites de glissement sans frottements (1.40) sont remplacées par les conditions plus réalistes d'adhérence (1.39), la forme des modes propres se complique considérablement. Il faut maintenant poser²⁶

$$V_1(q, n, +, R) = \left(\sum_{k=1}^3 \Psi_k \sinh(\lambda_k z), \sum_{k=1}^3 \Theta_k \sinh(\lambda_k z) \right) \exp(iqx),$$

où les λ_k dépendants de q et n apparaissent comme les racines d'une nouvelle équation caractéristique. Les calculs deviennent très lourds et doivent être numériques à partir d'un certain stade. Un point important est que l'on obtient des résultats *qualitativement proches* de ceux obtenus en bords libres. Ainsi

$$q_c = 3,12 \quad \text{et} \quad R_c = 1708 \quad (1.92)$$

sont du même ordre de grandeur que les valeurs (1.88); le temps caractéristique²⁷

$$\tau = 0,0509 + 0,0260P^{-1} \quad (1.93)$$

présente la même dépendance en P que (1.91).

Terminons cette section en mentionnant que des *instabilités structurantes* ('*pattern forming instabilities*' en anglais) du type de celle rencontrée ici sont toujours spectaculaires, et somme toutes assez répandues. De belles photos de systèmes chimiques ou biologiques présentant de telles instabilités sont présentées dans Rabinovich

²⁶Alternativement on peut utiliser une méthode numérique dès le début, par exemple une méthode de Galerkin telle celle qui sera exposée succinctement section 4.3.

²⁷Un résumé utile des propriétés du modèle de Boussinesq en bords rigides est donné p. 515 de l'article Daniels & Ong (1990).

et al. (2000); le lecteur est aussi invité à consulter l'annexe A.2.3. Notons enfin que le fait que l'on doive continuellement injecter de l'énergie dans un tel système pour maintenir ces structures conduit à les désigner comme des *structures dissipatives*... ceci explique par exemple le titre du traité de Manneville (1991).

1.7 Retour sur la décomposition modale : problème adjoint

La contemplation de l'équation (1.46) donnant la décomposition modale

$$V_0(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}) V_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x}) \quad (1.94)$$

d'une condition initiale « quelconque » V_0 du problème linéarisé (1.42) devrait soulever la question suivante : comment peut-on calculer les amplitudes $A(\mathbf{q})$ à partir de V_0 ? Si les modes propres $V_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x})$ formaient une base orthonormée pour un « bon » produit scalaire, la réponse serait immédiate : l'amplitude $A(\mathbf{q})$ s'obtiendrait par produit scalaire de V_0 avec $V_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x})$. Bien sûr, les choses ne sont pas aussi simples en général, et nécessitent l'introduction d'une certaine « artillerie » que nous allons maintenant développer²⁸.

Nous commençons par introduire un *produit scalaire hermitien* sur l'espace \mathcal{E} des champs « réguliers » sur $\bar{\Omega}$, satisfaisant aux conditions limites $C \cdot V = 0$ sur $\partial\Omega$, selon

$$\langle V, U \rangle = \int_{\Omega} V(\mathbf{x}) \cdot U^*(\mathbf{x}) \mu \, d\mathbf{x} \quad , \quad (1.95)$$

où l'étoile désigne la conjugaison complexe et μ un facteur éventuel de normalisation, en général l'inverse du volume de Ω de sorte que

$$\langle 1, 1 \rangle = 1 \quad .$$

À tout opérateur linéaire L de \mathcal{E} , typiquement différentiel car faisant intervenir des dérivées partielles du champ V auquel il s'applique, nous pouvons alors associer un *opérateur adjoint* L^\dagger en posant

$$\forall V, U \in \mathcal{E} \quad , \quad \langle L \cdot V, U \rangle = \langle V, L^\dagger \cdot U \rangle \quad . \quad (1.96)$$

Le *problème aux valeurs propres adjoint* au problème linéarisé (1.42) est alors défini par

$$\sigma^* D^\dagger \cdot U = L_R^\dagger \cdot U \quad \text{dans } \Omega \quad , \quad (1.97)$$

sachant bien sûr que, comme l'on reste dans \mathcal{E} , on exige toujours

$$C \cdot U = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad . \quad (1.98)$$

En général²⁹, pour des problèmes bien posés, on observe que les valeurs propres σ^* du problème adjoint (1.97), (1.98) sont effectivement les complexes conjuguées des valeurs propres du problème initial (1.42), désigné maintenant comme le problème *direct*, et que de plus les sous-espaces propres correspondants sont de même dimension. Enfin les propriétés de symétrie du problème direct sont aussi respectées par le problème adjoint. Tout ceci permet d'identifier, pour tout mode propre direct $V_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x})$ défini par (1.43), un unique *mode propre adjoint* $U_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x})$ solution de

$$C \cdot U_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x}) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad , \quad \sigma^*(\mathbf{q}, R) D^\dagger \cdot U_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x}) = L_R^\dagger \cdot U_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x}) \quad \text{dans } \Omega \quad . \quad (1.99)$$

Dans les cas « simples » de systèmes invariants par translation où l'on peut passer en modes de Fourier, on considère toujours un modèle faiblement confiné avec conditions limites périodiques (quitte à faire tendre

²⁸Les choses sont plus simples en dimension finie, comme cela est exposé dans l'annexe C dont la lecture est recommandée.

²⁹La propriété que nous allons énoncer correspond grosso modo à l'*alternative de Fredholm*.

ensuite les périodes correspondantes vers l'infini), car ceci seul permet de définir un produit scalaire fini, de la forme

$$\langle V, U \rangle = \int_0^{L_x} \frac{dx}{L_x} \int_0^{L_y} \frac{dy}{L_y} \int_0^1 dz V(\mathbf{x}) \cdot U^*(\mathbf{x}) \quad (1.100)$$

avec les notations introduites section 1.4.1. On impose alors toujours une dépendance en $\exp[i(qx + py)]$ (ou $\exp(iqx)$ seulement dans le cas d'un système bidimensionnel) identique pour les modes directs et adjoints. Ceci a pour conséquence que si deux modes de nombres différents \mathbf{q} et \mathbf{q}' possèdent des nombres d'ondes q et q' différents³⁰, les produits scalaires $\langle L_R \cdot V_1(\mathbf{q}), U_1(\mathbf{q}') \rangle$ et $\langle D \cdot V_1(\mathbf{q}), U_1(\mathbf{q}') \rangle$ contiennent un facteur

$$\int_0^{L_x} \frac{dx}{L_x} \exp(iqx) \exp(-iq'x)$$

nul dès que $q \neq q'$ puisque q et q' varient dans $2\pi\mathbb{Z}/L_x$. Ainsi

$$q \neq q' \text{ ou } p \neq p' \implies \langle L_R \cdot V_1(\mathbf{q}), U_1(\mathbf{q}') \rangle = \langle D \cdot V_1(\mathbf{q}), U_1(\mathbf{q}') \rangle = 0. \quad (1.101)$$

Si nous considérons maintenant des modes directs et adjoints associés à des nombres différents \mathbf{q} et \mathbf{q}' mais possédant les mêmes nombres d'onde, on a en général la propriété de **non-dégénérescence**

$$\mathbf{q} \neq \mathbf{q}' \implies \sigma = \sigma(\mathbf{q}, R) \neq \sigma' = \sigma(\mathbf{q}', R). \quad (1.102)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \langle L_R \cdot V_1(\mathbf{q}), U_1(\mathbf{q}') \rangle &= \sigma \langle D \cdot V_1(\mathbf{q}), U_1(\mathbf{q}') \rangle \\ &= \langle V_1(\mathbf{q}), L_R^\dagger \cdot U_1(\mathbf{q}') \rangle = \sigma' \langle V_1(\mathbf{q}), D^\dagger \cdot U_1(\mathbf{q}') \rangle = \sigma' \langle D \cdot V_1(\mathbf{q}), U_1(\mathbf{q}') \rangle, \end{aligned}$$

d'où la propriété d'« orthogonalité » en fait générale d'après (1.101)

$$\boxed{\mathbf{q} \neq \mathbf{q}' \implies \langle L_R \cdot V_1(\mathbf{q}), U_1(\mathbf{q}') \rangle = \langle D \cdot V_1(\mathbf{q}), U_1(\mathbf{q}') \rangle = 0} \quad (1.103)$$

Normalisant d'autre part les modes adjoints de sorte que

$$\boxed{\forall \mathbf{q}, \quad \langle D \cdot V_1(\mathbf{q}), U_1(\mathbf{q}) \rangle = 1}, \quad (1.104)$$

nous voyons que

$$V_0 = \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}) V_1(\mathbf{q}) \implies A(\mathbf{q}) = \langle D \cdot V_0, U_1(\mathbf{q}) \rangle, \quad (1.105)$$

qui répond à la question posée en début de section.

L'intérêt de cette artillerie ne s'arrête pas là, puisqu'elle permet dans certains cas, celui d'opérateurs auto-adjoints, de montrer sans calculs ou presque que toutes les valeurs propres d'un problème sont réelles, et donc que l'instabilité éventuelle ne peut être que stationnaire. Ceci sera illustré section 1.8.2. Une autre application fondamentale concerne l'obtention d'équations modèles par **projection** de l'équation de la dynamique du système, soit

$$D \cdot \partial_t V = L_R \cdot V \quad (1.106)$$

en régime linéaire. Cherchant ainsi une solution sous la forme d'une décomposition modale

$$V(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}, t) V_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x}),$$

nous obtenons par injection dans (1.106) et projection sur $U_1(\mathbf{q}, R)$, d'après les règles d'« orthonormalité » (1.103) et (1.104), l'équation d'évolution de l'amplitude $A(\mathbf{q}, t)$, soit

$$\partial_t A(\mathbf{q}, t) = \sigma(\mathbf{q}, R) A(\mathbf{q}, t). \quad (1.107)$$

Cette équation, qui donne derechef la loi caractéristique en $\exp[\sigma(\mathbf{q}, R)t]$, est en fait la forme la plus simple d'**équation d'amplitude**; la même technique de projection sera utilisée au chapitre 2 pour corriger cette équation d'amplitude en tenant compte des termes non linéaires « oubliés » dans (1.106).

³⁰pour fixer les idées, on pourrait aussi raisonner sur $p \neq p'$.

1.8 Applications

1.8.1 Méthode de calcul rapide du développement de la valeur propre critique

Le calcul complet de la valeur propre la plus dangereuse $\sigma(\mathbf{q}_c, R)$ étant souvent lourd³¹, il est parfois utile, afin d'obtenir le développement général (1.59),

$$\sigma(\mathbf{q}_c, R) = -i\omega_c + \frac{1+is}{\tau}\epsilon + O(\epsilon^2), \quad (1.108)$$

dans lequel $\omega_c = s = 0$ si l'instabilité est stationnaire, d'utiliser la propriété de continuité des modes propres par rapport à R ,

$$V_1(\mathbf{q}_c, R; \mathbf{x}) = V_1(\mathbf{q}_c, R_c; \mathbf{x}) + O(\epsilon) \quad \text{et} \quad U_1(\mathbf{q}_c, R; \mathbf{x}) = U_1(\mathbf{q}_c, R_c; \mathbf{x}) + O(\epsilon). \quad (1.109)$$

En effet on en déduit que³²

$$\sigma(\mathbf{q}_c, R) + i\omega_c = \langle (L_R + i\omega_c D) \cdot V_1(R), U_1(R) \rangle \quad (1.110)$$

va pouvoir être estimé à partir de

$$\begin{aligned} & \langle (L_R + i\omega_c D) \cdot V_1(R_c), U_1(R_c) \rangle \\ &= \langle (L_R + i\omega_c D) \cdot V_1(R), U_1(R) \rangle + \langle (L_R + i\omega_c D) \cdot V_1(R), O(\epsilon) \rangle + \langle (L_R + i\omega_c D) \cdot O(\epsilon), U_1(R) \rangle + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

En effet le deuxième terme de cette somme vaut

$$\langle (L_R + i\omega_c D) \cdot V_1(R), O(\epsilon) \rangle = \langle [\sigma(\mathbf{q}_c, R) + i\omega_c] D \cdot V_1(R), O(\epsilon) \rangle = O(\epsilon^2),$$

et le troisième

$$\langle (L_R + i\omega_c D) \cdot O(\epsilon), U_1(R) \rangle = \langle O(\epsilon), (L_R^\dagger - i\omega_c D^\dagger) \cdot U_1(R) \rangle \langle O(\epsilon), [\sigma^*(\mathbf{q}_c, R) - i\omega_c] D^\dagger \cdot U_1(R) \rangle = O(\epsilon^2).$$

En conclusion le développement (1.108) peut être obtenu à partir de la simple connaissance des modes critiques selon

$$\frac{1+is}{\tau}\epsilon = \langle L_R \cdot V_1(R_c), U_1(R_c) \rangle + i\omega_c + O(\epsilon^2). \quad (1.111)$$

1.8.2 Au modèle d'afficheurs \rightarrow exemple de problème auto-adjoint

Nous avons déjà vu que $D = I$ et $L_R = RI + \Delta$ dans le cas de l'afficheur. Evidemment $I^\dagger = I$, donc il nous faut seulement calculer l'adjoint de l'opérateur Δ pour le produit scalaire (1.100). Pour cela on utilise la règle de définition (1.96) en essayant de mettre

$$\langle \Delta v, u \rangle = \int_0^{L_x} \frac{dx}{L_x} \int_0^{L_y} \frac{dy}{L_y} \int_0^1 dz (\partial_x^2 v + \partial_y^2 v + \partial_z^2 v) u^*$$

sous la forme $\langle v, \Delta^\dagger u \rangle$. Ceci s'obtient par une double intégration par parties sur chaque terme qui permet de faire passer l'opération de dérivation de v sur u^* , par exemple pour le terme en $(\partial_z^2 v)u^*$,

$$\int_0^1 (\partial_z^2 v)u^* dz = [(\partial_z v)u^* - v(\partial_z u^*)]_{z=0}^{z=1} + \int_0^1 v(\partial_z^2 u^*) dz, \quad (1.112)$$

où le terme de bords s'annule à cause des conditions limites (1.63). On obtient ainsi $\Delta^\dagger = \Delta$ qui est la définition d'un opérateur **auto-adjoint**; L_R et $D^{-1} \cdot L_R$ sont donc aussi auto-adjoints, ce qui permet d'identifier les problèmes direct et adjoint. Une autre conséquence importante de cette propriété est que nous pouvons affirmer sans connaître les résultats de la section 1.4 que toutes les valeurs propres du problème sont réelles, et que l'on est donc forcément dans le cas d'une instabilité stationnaire. Terminons en calculant explicitement le mode critique adjoint normé de sorte que (1.104) soit vérifiée; on peut chercher $U_1(1)$ sous la forme $\lambda V_1(1)$. Il vient

$$\lambda = \frac{1}{\langle D \cdot V_1(1), V_1(1) \rangle} = \frac{1}{\int_0^1 \sin^2(\pi z) dz} = 2. \quad (1.113)$$

³¹On peut détecter une instabilité sans forcément mener à bien ce calcul, comme on l'a vu section 1.6; voir aussi la section A.2.2.

³²On omet pour simplifier les notations de rappeler que l'on se place en $\mathbf{q} = \mathbf{q}_c$ et que les modes dépendent de \mathbf{x} .

1.8.3 Au modèle de thermoconvection \rightarrow règle de calcul de l'adjoint

En conditions de glissement le problème linéarisé (1.81) et (1.82) s'écrit

$$\begin{aligned} P^{-1}\sigma(-\Delta\psi) &= -\Delta\Delta\psi - \partial_x\theta, \quad \sigma\theta = \Delta\theta + R\partial_x\psi \quad \text{dans } \Omega, \\ \theta &= \psi = \partial_z^2\psi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.114)$$

avec $\Omega = \{ (x,z) \in \mathbb{R} \times]0,1[\}$ ou plutôt, pour ne pas avoir de problème de définition du produit scalaire, une de ses « approximations faiblement confinée » $\Omega = \{ (x,z) \in]0,L[\times]0,1[\}$, étant entendu que l'on utilise des conditions limites périodiques en $x = 0$ et L . Insistons encore sur le fait qu'en faisant éventuellement tendre L vers l'infini, on peut espérer que cette restriction n'est pas contraignante; remarquons d'autre part que les modes propres que nous avons calculé section 1.6 sont effectivement périodiques dans la direction x . Nous introduisons donc l'espace \mathcal{E} des champs $V = (\psi, \theta)$ de $\bar{\Omega}$ dans \mathbb{C}^2 vérifiant

$$v_1 = \partial_z^2 v_1 = v_2 = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et } 1, \quad V(0,z) = V(L,z); \quad (1.115)$$

les modes propres (1.83) en font partie à la condition maintenant classique de restreindre les valeurs du nombre d'onde q à des multiples entiers de $2\pi/L$, restriction peu contraignante si L est grande. Dans l'espace \mathcal{E} il est naturel de définir le produit scalaire par

$$\langle V, U \rangle = \int_0^L \int_0^1 (v_1 u_1^* + v_2 u_2^*) \frac{dx dz}{L}. \quad (1.116)$$

L'adjoint de $D : V \mapsto (-P^{-1}\Delta v_1, v_2)$ s'obtient encore par doubles intégrations par parties sur x et z ; on trouve que $D^\dagger = D$.

Par contre pour $L_R : V \mapsto (-\Delta\Delta v_1 - \partial_x v_2, \Delta v_2 + R\partial_x v_1)$, les calculs sont plus lourds :

$$\begin{aligned} \langle L_R \cdot V, U \rangle &= \iint [(-\Delta\Delta v_1 - \partial_x v_2) u_1^* + (\Delta v_2 + R\partial_x v_1) u_2^*] \frac{dx dz}{L} \\ &= \iint [v_1 (-\Delta\Delta u_1^*) + v_2 (\partial_x u_1^*) + v_2 (\Delta u_2^*) - R v_1 (\partial_x u_2^*)] \frac{dx dz}{L} \end{aligned}$$

à coup d'intégrations par parties. Afin d'identifier L_R^\dagger , on a intérêt à regrouper les termes différemment pour aboutir à

$$\langle V, L_R^\dagger \cdot U \rangle = \iint [v_1 (-\Delta\Delta u_1^* - R\partial_x u_2^*) + v_2 (\Delta u_2^* + \partial_x u_1^*)] \frac{dx dz}{L},$$

d'où

$$L_R^\dagger : U \mapsto (-\Delta\Delta u_1 - R\partial_x u_2, \Delta u_2 + \partial_x u_1). \quad (1.117)$$

Il existe une règle très raisonnable pour expliquer (1.117), valable en fait pour tous les opérateurs invariants par translations spatiales; elle consiste (inspiré par les résultats de la section 1.5.3) à passer en modes de Fourier dans toutes les directions impliquées, en faisant ici

$$\partial_x = iq, \quad \partial_z = ip, \quad (1.118)$$

puis à écrire L_R sous forme matricielle,

$$L_R \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -(q^2 + p^2)^2 & -iq \\ iq & -(q^2 + p^2) \end{pmatrix}.$$

Alors L_R^\dagger est tout simplement associé à la matrice adjointe de celle-ci, c'est-à-dire la transposée de sa conjuguée :

$$L_R^\dagger \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -(q^2 + p^2)^2 & -iRq \\ iq & -(q^2 + p^2) \end{pmatrix},$$

qui redonne bien, en appliquant la transformation inverse de (1.118), l'opérateur (1.117).

Remarque : on peut démontrer la règle précédente en considérant en toute généralité le cas d'un seul terme non nul en position k dans $L \cdot V$, i.e.

$$L \cdot V = (0, 0, \dots, 0, \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_z^\gamma v_l(x, y, z), 0, \dots, 0),$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$. Le faire en exercice, en supposant pour simplifier des conditions limites périodiques dans toutes les directions!

Retournant à notre problème, nous allons calculer les modes adjoints, a priori d'une forme semblable à celle des modes directs (1.83),

$$U_1(q, n, \pm, R) = (\tilde{\Psi}_\pm, \tilde{\Theta}_\pm) \exp(iqx) \sin(n\pi z). \quad (1.119)$$

Par injection dans la deuxième équation de $\sigma^* D \cdot U = L_R^\dagger \cdot U$, on obtient, avec $p_n = q^2 + n^2 \pi^2$,

$$\tilde{\Psi}_\pm = -i \frac{p_n + \sigma^*(q, n, \pm)}{q} \tilde{\Theta}_\pm,$$

puis, comme annoncé, la même équation caractéristique que (1.86), et donc les mêmes valeurs propres réelles. Nous aurons besoin au chapitre suivant du mode adjoint $U_1(q_c, 1, +, R_c)$ au mode critique (1.89) vérifiant la condition de normalisation (1.104)

$$\langle D \cdot V_1(q_c, 1, +, R_c), U_1(q_c, 1, +, R_c) \rangle = 1.$$

Cette condition fixe la valeur de $\tilde{\Theta}$ à $2/(1 + P^{-1})$, d'où

$$U_1(q_c, 1, +, R_c) = \frac{2}{1 + P^{-1}} \left(-i \frac{3\pi}{\sqrt{2}}, 1 \right) \exp(iq_c x) \sin(\pi z). \quad (1.120)$$

Chapitre 2

Analyse faiblement non linéaire : équations d'amplitudes

'Long-living systems slave short-living systems'

Hermann Haken

Les méthodes permettant d'obtenir des solutions approchées des équations de la dynamique du système

$$D \cdot \partial_t V = L_R \cdot V + N_2(V, V) + N_3(V, V, V) \quad (2.1)$$

dans le régime *faiblement non linéaire* où les termes non linéaires peuvent être traités comme des perturbations différent selon la nature stationnaire ou oscillante des instabilités associées à la bifurcation. Nous commençons par le cas stationnaire, plus simple en général.

2.1 Cas d'instabilités stationnaires

Dans ce cas la recherche d'une solution superposition de modes normaux

$$V(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{q}} A(\mathbf{q}, t) V_1(\mathbf{q}, R; \mathbf{x}) \quad (2.2)$$

mène par injection dans (2.1) puis projection sur le mode adjoint $U_1(\mathbf{q}, R)$, d'après les règles d'« orthonormalité » (1.103) et (1.104), aux *équations d'amplitudes « brutes »*

$$\begin{aligned} \partial_t A(\mathbf{q}, t) &= \sigma(\mathbf{q}, R) A(\mathbf{q}, t) + \sum_{\mathbf{q}_1} \sum_{\mathbf{q}_2} A(\mathbf{q}_1, t) A(\mathbf{q}_2, t) \langle N_2(V_1(\mathbf{q}_1), V_1(\mathbf{q}_2)), U_1(\mathbf{q}) \rangle \\ &+ \sum_{\mathbf{q}_1} \sum_{\mathbf{q}_2} \sum_{\mathbf{q}_3} A(\mathbf{q}_1, t) A(\mathbf{q}_2, t) A(\mathbf{q}_3, t) \langle N_3(V_1(\mathbf{q}_1), V_1(\mathbf{q}_2), V_1(\mathbf{q}_3)), U_1(\mathbf{q}) \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

que nous pourrions simplifier. Il importe avant cela de noter que, d'après notre hypothèse de totalité des modes normaux, ces équations d'amplitudes sont une écriture « spectrale » des équations de la dynamique du système *équivalente* à (2.1).

2.1.1 Hypothèses de variations temporelles lentes et de domination des actifs

L'idée fondamentale a déjà été exprimée à deux reprises, section 1.3.2 au niveau de l'équation (1.56), puis section 1.6 à propos de l'équation (1.91). Elle repose sur l'observation que ce sont les modes de dynamique la plus lente, à savoir ici les *modes actifs*

$$\boxed{\mathbf{q} \in \mathcal{A} \iff \sigma(\mathbf{q}, R) \text{ est d'ordre au plus } \epsilon} \quad (2.4)$$

d'après (1.52), qui vont contrôler la dynamique du système, les modes « rapides » c'est-à-dire très amortis,

$$\boxed{\mathbf{q} \in \mathcal{P} \iff \sigma(\mathbf{q}, R) < \sigma_1 < 0} , \quad (2.5)$$

relaxant très rapidement, et étant donc *passifs* par rapport aux premiers. Pour exprimer que les premiers modes contrôlent toute la dynamique, nous posons donc l'hypothèse de *variations temporelles lentes*

$$\forall \mathbf{q} , \quad \partial_t A(\mathbf{q}, t) \text{ est d'ordre au plus } \epsilon A(\mathbf{q}, t) . \quad (2.6)$$

Ceci va permettre, pour $\mathbf{q} \in \mathcal{P}$, de négliger le terme $\partial_t A(\mathbf{q}, t)$ dans l'équation d'amplitude correspondante (2.3) devant le terme $\sigma(\mathbf{q}, R)A(\mathbf{q}, t)$, le quotient des deux étant au plus de l'ordre de $|\epsilon/\sigma_1| \ll 1$. On aboutit ainsi, pour $\mathbf{q} \in \mathcal{P}$, à l'équation « quasi statique »

$$\begin{aligned} -\sigma(\mathbf{q}, R)A(\mathbf{q}, t) &= \sum_{\mathbf{q}_1} \sum_{\mathbf{q}_2} A(\mathbf{q}_1, t)A(\mathbf{q}_2, t) \langle N_2(V_1(\mathbf{q}_1), V_1(\mathbf{q}_2)), U_1(\mathbf{q}) \rangle \\ &+ \sum_{\mathbf{q}_1} \sum_{\mathbf{q}_2} \sum_{\mathbf{q}_3} A(\mathbf{q}_1, t)A(\mathbf{q}_2, t)A(\mathbf{q}_3, t) \langle N_3(V_1(\mathbf{q}_1), V_1(\mathbf{q}_2), V_1(\mathbf{q}_3)), U_1(\mathbf{q}) \rangle . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Cette équation nous suggère de poser l'hypothèse de *domination des modes actifs*

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{q} \in \mathcal{A} , \quad A(\mathbf{q}, t) \text{ est d'ordre au plus } A_0 , \\ \forall \mathbf{q} \in \mathcal{P} , \quad A(\mathbf{q}, t) \text{ est d'ordre au plus } A_0^2 , \end{aligned} \quad (2.8)$$

où A_0 est une amplitude typique, supposée très inférieure à 1 près du seuil.

2.1.2 Élimination quasi statique des modes passifs

À l'ordre le plus bas en A_0 , l'équation (2.7) peut donc être réécrite

$$-\sigma(\mathbf{q}, R)A(\mathbf{q}, t) = \sum_{\mathbf{q}_1 \in \mathcal{A}} \sum_{\mathbf{q}_2 \in \mathcal{A}} A(\mathbf{q}_1, t)A(\mathbf{q}_2, t) \langle N_2(V_1(\mathbf{q}_1), V_1(\mathbf{q}_2)), U_1(\mathbf{q}) \rangle + O(A_0^3) ,$$

soit

$$\forall \mathbf{q} \in \mathcal{P} , \quad A(\mathbf{q}, t) = -\frac{1}{\sigma(\mathbf{q}, R)} \sum_{\mathbf{q}_1 \in \mathcal{A}} \sum_{\mathbf{q}_2 \in \mathcal{A}} A(\mathbf{q}_1, t)A(\mathbf{q}_2, t) \langle N_2(V_1(\mathbf{q}_1), V_1(\mathbf{q}_2)), U_1(\mathbf{q}) \rangle + O(A_0^3) . \quad (2.9)$$

Ces équations, qui expriment qu'à l'ordre le plus bas les amplitudes des modes passifs sont asservies à celles des modes actifs, définissent la *variété centrale* du problème ; on dit aussi que remplacer les amplitudes $A(\mathbf{q}, t)$ par le premier terme de (2.9) selon

$$\forall \mathbf{q} \in \mathcal{P} , \quad A(\mathbf{q}, t) = -\frac{1}{\sigma(\mathbf{q}, R)} \sum_{\mathbf{q}_1 \in \mathcal{A}} \sum_{\mathbf{q}_2 \in \mathcal{A}} A(\mathbf{q}_1, t)A(\mathbf{q}_2, t) \langle N_2(V_1(\mathbf{q}_1), V_1(\mathbf{q}_2)), U_1(\mathbf{q}) \rangle \quad (2.10)$$

consiste à *éliminer les modes passifs* qui sont *esclaves*¹. Pour simplifier l'écriture, nous pouvons donc écrire une *solution faiblement non linéaire* du problème sous la forme

$$\boxed{V = V_a + V_\perp} \quad (2.11)$$

où

$$\boxed{V_a = \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{A}} A(\mathbf{q}, t) V_1(\mathbf{q}, R)} \quad (2.12)$$

¹Pour une introduction relativement pédagogique à cette *réduction à la variété centrale*, voir Newell et al. (1993). Rappelons aussi qu'une « variété » désigne mathématiquement une courbe ou une surface régulière. Signalons enfin qu'un exemple de variété centrale est présenté sur la figure A.1.

est la partie de la solution contenant les modes actifs, et V_{\perp} la partie de la solution contenant les modes passifs éliminés à l'ordre le plus bas à l'aide de (2.10),

$$V_{\perp} = \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{P}} A(\mathbf{q}, t) V_1(\mathbf{q}, R) + O(A_0^3) \quad \text{avec} \quad A(\mathbf{q}, t) = -\frac{1}{\sigma(\mathbf{q}, R)} \langle N_2(V_a, V_a), U_1(\mathbf{q}) \rangle . \quad (2.13)$$

Un calcul de $L_R \cdot V_{\perp}$ conduit, compte tenu des propriétés des modes propres, la restriction de L_R à l'espace des modes passifs étant inversible, à la formule²

$$V_{\perp} = -L_R^{-1} \cdot \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{P}} \langle N_2(V_a, V_a), U_1(\mathbf{q}) \rangle D \cdot V_1(\mathbf{q}, R) . \quad (2.14)$$

Elle s'interprète facilement dans les cas fréquents où la famille des vecteurs $D \cdot V_1(\mathbf{q})$ forme un système total dans l'espace des champs où varie $N_2(V_a, V_a)$. On peut alors poser, pour S dans cet espace,

$$S = \underbrace{\sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{A}} \langle S, U_1(\mathbf{q}) \rangle D \cdot V_1(\mathbf{q})}_{P_a \cdot S} + \underbrace{\sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{P}} \langle S, U_1(\mathbf{q}) \rangle D \cdot V_1(\mathbf{q})}_{P_{\perp} \cdot S} , \quad (2.15)$$

où P_a et P_{\perp} sont des **projecteurs** ; en effet d'après les règles d'orthonormalité (1.103) et (1.104), on a $P_a \cdot P_a = P_a$ et $P_{\perp} \cdot P_{\perp} = P_{\perp}$. Avec ces notations (2.14) se réécrit

$$V_{\perp} = -L_R^{-1} \cdot P_{\perp} \cdot N_2(V_a, V_a) = -L_R^{-1} \cdot (1 - P_a) \cdot N_2(V_a, V_a) . \quad (2.16)$$

Dans des systèmes simples, pour des raisons de symétrie des modes actifs directs et adjoints et de $N_2(V_a, V_a)$, on a souvent

$$P_a \cdot N_2(V_a, V_a) = 0 . \quad (2.17)$$

Alors (2.16) se simplifie en

$$V_{\perp} = -L_R^{-1} \cdot N_2(V_a, V_a) , \quad (2.18)$$

que l'on interprète comme venant directement de l'élimination de V_{\perp} dans la « partie passive » des équations de la dynamique (2.1),

$$L_R \cdot V_{\perp} + N_2(V_a, V_a) + t.o.s. = D \cdot \partial_t V_{\perp} \simeq 0$$

compte tenu de l'hypothèse des variations temporelles lentes.

2.1.3 Équations d'amplitudes des modes actifs

L'**équation d'amplitude** du mode actif de nombres \mathbf{q} peut se réobtenir directement par projection de (2.1) sur $U_1(\mathbf{q})$, qui donne avec (2.11)

$$\partial_t A(\mathbf{q}, t) = \sigma(\mathbf{q}, R) A(\mathbf{q}, t) + \langle N_2(V_a, V_a) + N_2(V_a | V_{\perp}) + N_3(V_a, V_a, V_a), U_1(\mathbf{q}) \rangle , \quad (2.19)$$

en négligeant des termes d'ordre A_0^4 , créés par les termes d'ordre supérieur dans (2.11), a priori d'ordre A_0^3 , et en utilisant la notation (1.4b). On dit des termes non linéaires dans $N_2(V_a, V_a) + N_2(V_a | V_{\perp}) + N_3(V_a, V_a, V_a)$ qui ont un produit scalaire non nul avec $U_1(\mathbf{q})$ qu'ils sont **résonants**. Le nombre de tels termes est souvent très réduit, surtout dans des systèmes « simples » possédant des propriétés de symétries - par exemple (2.17), qui implique que $N_2(V_a, V_a)$ ne contribue pas aux équations d'amplitudes (2.19).

²Dorénavant nous n'écrivons que le terme d'ordre le plus bas dans V_{\perp} et omettons le $O(A_0^3)$.

2.1.4 Cas d'un seul mode actif

Le nombre d'équations d'amplitudes à calculer dépend lui du nombre de modes actifs potentiels. Pour simplifier, nous allons dorénavant analyser les cas où le *mode critique* est *isolé*, ou alors on ne s'intéresse qu'à des perturbations telles que³

$$\forall \mathbf{q} \in \mathcal{A}, \quad A(\mathbf{q}) = 0 \quad \text{dès que} \quad \mathbf{q} \neq \mathbf{q}_c. \quad (2.20)$$

Nous pouvons donc poser

$$\begin{aligned} V_a &= AV_1(\mathbf{q}_c, R) \quad \text{avec } A \in \mathbb{R} \text{ dans le cas où le mode critique est réel,} \\ V_a &= AV_1(\mathbf{q}_c, R) + A^*V_1(\mathbf{q}_c^*, R) \quad \text{avec } A \in \mathbb{C} \text{ dans le cas où il est complexe,} \end{aligned} \quad (2.21)$$

en notant $V_1(\mathbf{q}_c^*, R) = V_1^*(\mathbf{q}_c, R)$; une instabilité à mode critique réel est typiquement une *instabilité non structurante*, comme celle d'un afficheur cristaux liquides, par opposition aux *instabilités structurantes*, comme celle rencontrée en convection thermique, où nous avons vu l'intérêt du passage en complexes.

2.1.5 Cas d'un système non symétrique : bifurcation trans-critique

Considérons un système où le mode critique est réel et la propriété de symétrie (2.17) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire que

$$\gamma = -\langle N_2(V_1(\mathbf{q}_c, R), V_1(\mathbf{q}_c, R)), U_1(\mathbf{q}_c, R) \rangle \neq 0. \quad (2.22)$$

Supposant que ce *coefficient de saturation* γ est strictement positif, il n'est pas nécessaire d'éliminer les modes passifs pour obtenir à partir de (2.19) l'équation d'amplitude du mode critique à l'ordre le plus bas⁴

$$\partial_t A = \frac{\epsilon}{\tau} A - \gamma A^2, \quad (2.23)$$

compte tenu du développement (1.52) du taux de croissance du mode critique. En effet d'après (2.19) les modes passifs introduisent des corrections d'ordre supérieur A^3 dans (2.23). Notons d'autre part que comme (2.23) indique l'apparition d'une nouvelle branche d'équilibre⁵

$$A = \frac{\epsilon}{\tau\gamma} \quad \text{stable si } \epsilon > 0, \quad \text{instable si } \epsilon < 0, \quad (2.24)$$

i.e. $A = O(\epsilon)$, les corrections en $\epsilon^2 A$ dues au développement (1.52) sont aussi négligeables dans (2.23). Comme sur le diagramme correspondant figure 2.1 la branche des solutions bifurquées (2.24) « traverse » la branche de base $A = 0$, on parle d'une *bifurcation trans-critique*; une telle bifurcation décrit l'allumage d'un laser, cf. la section A.1. Notons enfin que l'équation (2.23) peut être résolue analytiquement comme cela est montré dans la section E.1.

³Cette hypothèse peut sembler à juste titre peu physique : en effet si le mode critique n'est pas isolé, rien n'interdit à une petite perturbation de nombres $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_c$ correspondant à un autre mode actif d'être amplifiée. Le chapitre 3 sera justement consacré aux *équations d'enveloppes* qui seules permettent de prévoir le comportement de telles « perturbations générales ».

⁴En toute rigueur la dérivée par rapport au temps devrait dans la suite de ce chapitre être notée avec le symbole d/dt plutôt qu'avec une dérivée partielle, puisque l'hypothèse qu'un seul mode est actif conduit à ne considérer qu'une seule amplitude $A = A(\mathbf{q}_c)$. Cependant, par anticipation des cas plus généraux considérés au chapitre 3 où A pourra dépendre, outre du temps, d'un ou plusieurs autres paramètres continus, nous garderons ici la notation ∂_t pour la dérivée par rapport au temps. Mentionnons d'ailleurs que les physiciens désignent souvent une équation d'amplitude telle que (2.23) comme une « *équation de Landau* »... par « opposition » aux « *équations de Ginzburg-Landau* » qui correspondent justement aux équations d'enveloppes du chapitre 3.

⁵Les propriétés de stabilité de cette nouvelle branche s'obtiennent en posant $A = \epsilon/(\tau\gamma) + a$ dans (2.23), puis en linéarisant l'équation d'évolution de a , d'où $\partial_t a = -(\epsilon/\tau)a$. On constate un *échange de stabilité* entre les branches $A = 0$ et $A = \epsilon/(\tau\gamma)$ au point de bifurcation $\epsilon = 0$; cette propriété d'échange de stabilité est aussi observée sur le diagramme d'une bifurcation sur-critique figure 2.3.

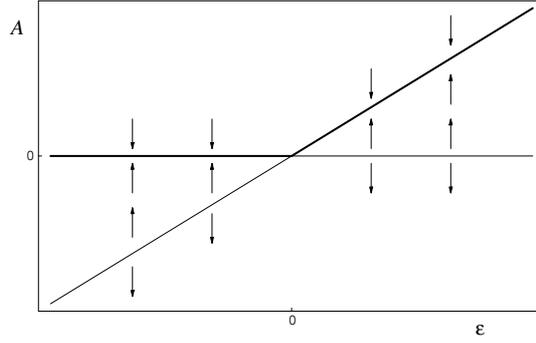


Fig. 2.1 – Diagramme d'une *bifurcation trans-critique* dans le plan paramètre de contrôle réduit-amplitude. Les flèches convergentes ou divergentes indiquent le sens de variation de A d'après l'équation d'amplitude correspondante (2.23). Elles convergent vers les branches stables (lignes épaisses) et divergent des branches instables (lignes fines) de solutions stationnaires.

2.1.6 Cas d'un système « symétrique »

Notre première hypothèse de symétrie consiste à poser (2.17); on déduit alors de l'équation d'élimination des modes passifs (2.18), en définissant⁶

$$\begin{aligned} V_2(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b) &= -L_R^{-1} \cdot N_2(V_1(\mathbf{q}_a), V_1(\mathbf{q}_b)) , \\ V_2(\mathbf{q}_a | \mathbf{q}_a) &= -L_R^{-1} \cdot N_2(V_1(\mathbf{q}_a) | V_1(\mathbf{q}_a)) , \end{aligned} \quad (2.25)$$

que

$$\begin{aligned} V_{\perp} &= A^2 V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c) \text{ dans le cas réel,} \\ V_{\perp} &= A^2 V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c) + |A|^2 V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*) + (A^*)^2 V_2(\mathbf{q}_c^* | \mathbf{q}_c^*) \text{ dans le cas complexe.} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Toujours d'après (2.17), l'équation d'amplitude du mode critique s'écrit

$$\partial_t A(\mathbf{q}_c, t) = \sigma(\mathbf{q}_c, R) A(\mathbf{q}_c, t) + \langle N_2(V_a | V_{\perp}) + N_3(V_a, V_a, V_a), U_1(\mathbf{q}_c) \rangle .$$

Notre deuxième hypothèse de symétrie consiste à supposer, dans le cas complexe, que le seul terme résonant dans le produit scalaire précédent est le terme proportionnel à $|A|^2 A$. Il vient donc en notations simplifiées l'équation d'amplitude

$$\partial_t A = \sigma(\mathbf{q}_c, R) A - g |A|^2 A \quad (2.27)$$

où le *coefficient de saturation* est

$$g = - \langle N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c)) + N_3(V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c)), U_1(\mathbf{q}_c) \rangle \quad (2.28)$$

dans le cas réel,

$$g = - \langle N_2(V_1(\mathbf{q}_c^*) | V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c)) + N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*)) + N_3(V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c) | V_1(\mathbf{q}_c^*)), U_1(\mathbf{q}_c) \rangle \quad (2.29)$$

dans le cas complexe, en notant

$$N_3(a, a | b) = N_3(a, a, b) + N_3(a, b, a) + N_3(b, a, a) . \quad (2.30)$$

En injectant dans (2.27) le développement (1.52) du taux de croissance du mode critique, nous obtenons, à des termes en A^4 ou $\epsilon^2 A$ près, l'équation d'amplitude

$$\partial_t A = \frac{\epsilon}{\tau} A - g |A|^2 A . \quad (2.31)$$

Notre troisième hypothèse de symétrie consiste enfin à supposer, dans le cas complexe, que g est réel. Notons que ces coefficients τ et g sont a priori mesurables expérimentalement.

⁶Dorénavant $V_1(\mathbf{q})$ est une notation condensée pour $V_1(\mathbf{q}, R)$ ou même $V_1(\mathbf{q}, R_c)$ d'après la remarque de la fin de la section 2.1.7 comme quoi remplacer R par R_c dans le calcul des modes passifs n'introduit que des corrections d'ordre supérieur.

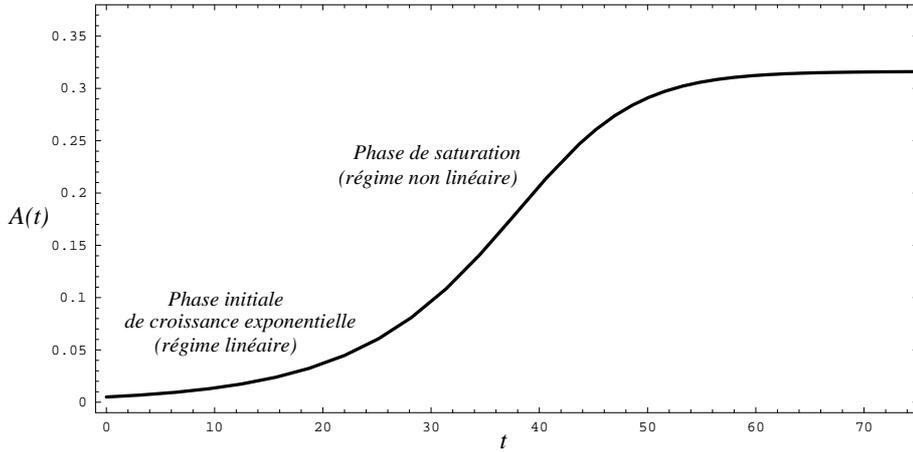


Fig. 2.2 – Comportement typique d’une composante du vecteur d’état local V après passage du seuil d’une instabilité se développant sous la forme d’une **bifurcation stationnaire sur-critique**. L’évolution à partir d’une valeur initiale petite a été déduite de l’expression analytique (E.16) de la solution de l’équation d’amplitude (2.31). **Exercice** : en supposant que cette courbe est une courbe expérimentale obtenue à paramètre de contrôle $R = 1.1R_c$, déduisez-en les valeurs de τ et g .

2.1.7 Premier sous cas : bifurcation (fourche) sur-critique

Le cas d’une **bifurcation sur-critique** est celui où $g > 0$, qui signifie que les non-linéarités correspondantes tendent effectivement à faire saturer les valeurs de A . Nous pouvons alors prédire le comportement du système aux temps longs, c’est-à-dire compléter la figure 1.1 comme fait sur la figure 2.2 : l’amplitude A va atteindre une valeur stationnaire limite telle que le terme linéaire excitateur dans (2.31) soit exactement équilibré par le terme non linéaire saturant, i.e.

$$|A| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\tau g}}. \quad (2.32)$$

La loi d’échelle en $\epsilon^{1/2}$ est caractéristique ; de la forme du diagramme ϵ - A correspondant, représenté figure 2.3, on déduit l’autre qualificatif d’une telle bifurcation, souvent désignée comme bifurcation **fourche**⁷. Savoir que $A = O(\epsilon^{1/2})$ nous permet de plus d’affirmer que les termes oubliés dans (2.31), d’ordre A^4 ou $\epsilon^2 A$, sont au moins d’ordre ϵ^2 . D’ailleurs l’adoption d’une échelle lente de temps suivant

$$t = \epsilon^{-1} t' \quad (2.33)$$

de sorte que $\partial_t = \epsilon \partial_{t'}$, et d’une nouvelle échelle d’amplitude selon

$$A = \epsilon^{1/2} A' \quad (2.34)$$

transforme après division par $\epsilon^{3/2}$ l’équation (2.31) en une équation où le petit paramètre ϵ n’apparaît plus, soit

$$\partial_{t'} A' = \frac{A'}{\tau} - g |A'|^2 A'. \quad (2.35)$$

Ceci montre que tous les termes de (2.31) sont du même ordre $\epsilon^{3/2}$: (2.31) est en fait le **développement asymptotique rigoureux à l’ordre $\epsilon^{3/2}$ de l’équation d’amplitude complète** (2.3) du mode critique ; (2.33) et (2.34) sont les **lois d’échelles** correspondantes.

Il est intéressant de remarquer que dans le cas réel on peut écrire (2.31) sous la forme

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{dF}{dA} \quad (2.36)$$

⁷Ce qui correspond étymologiquement à une répétition, puisque « bifurcation » vient du latin « bifurcus » qui veut dire « fourchu ».

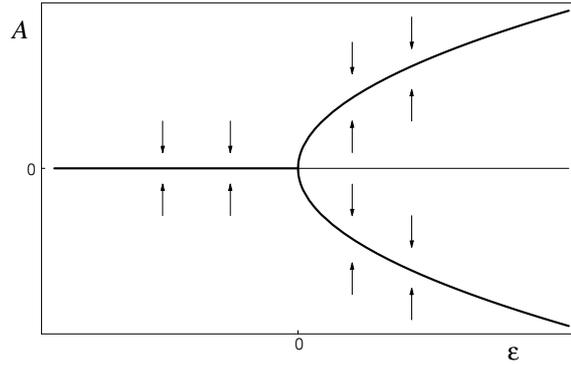


Fig. 2.3 – Diagramme d'une *bifurcation sur-critique*. Les flèches convergentes ou divergentes indiquent les directions d'évolution de A à ϵ fixé. Les branches stables de solutions stationnaires de (2.31) sont représentées en traits épais, les branches instables en traits fins. Dans le cas complexe où $A \in \mathbb{C}$, il faudrait en fait représenter un paraboloïde de solutions, puisque la phase de A n'est pas fixée par (2.31). Le terme *sur-critique* s'explique par le fait que les nouvelles branches $A \neq 0$ de solutions stationnaires (stables) n'existent que pour $R > R_c$ c'est-à-dire au-dessus du seuil d'instabilité de la branche de base $A = 0$.

où - en utilisant la terminologie des physiciens, cf. plus bas - la *fonction « énergie libre de Landau »* F est donnée par une primitive de l'opposé du second membre de (2.31), soit

$$F(A) = -\frac{\epsilon}{2\tau}A^2 + \frac{g}{4}A^4. \quad (2.37)$$

Puisque

$$\frac{dF(A(t))}{dt} = \frac{dF}{dA} \frac{dA}{dt} = -\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 \leq 0,$$

cette énergie ne peut que décroître au cours du temps, et est donc bien l'analogie d'une énergie libre pour un système thermodynamique. Ceci montre que la dynamique décrite par l'équation d'amplitude (2.31) est purement *relaxationnelle*, les points d'équilibre stables, minima de F , étant donnés par le diagramme de la figure 2.3. Signalons que les mathématiciens utilisent une autre terminologie que les physiciens (amateurs de thermodynamique) pour désigner la fonction F : ils l'appellent *fonction de Lyapounov* de l'équation différentielle ordinaire (2.31), voir par exemple Strogatz (1994). On peut bien sûr retrouver les propriétés de stabilité de la branche bifurquée par une analyse linéaire de stabilité standard : injectant pour $\epsilon > 0$

$$A = \sqrt{\epsilon/(\tau g)} + a$$

dans (2.31) et linéarisant pour de petites valeurs de a on obtient

$$\partial_t a = -2(\epsilon/\tau)a.$$

La propriété d'existence d'une énergie libre se généralise au cas complexe, où l'on peut écrire (2.31) sous la forme

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial A^*} \quad (2.38)$$

à condition de poser

$$F(A, A^*) = -\frac{\epsilon}{\tau}|A|^2 + \frac{g}{2}|A|^4; \quad (2.39)$$

on a encore, puisque g et F sont réels, la bonne propriété

$$\frac{dF(A(t), A^*(t))}{dt} = \frac{\partial F}{\partial A} \frac{dA}{dt} + \frac{\partial F}{\partial A^*} \frac{dA^*}{dt} = -2 \left| \frac{dA}{dt} \right|^2 \leq 0.$$

Retrouvons là encore les propriétés de stabilité de la branche bifurquée par une analyse linéaire de stabilité. Injectons pour $\epsilon > 0$

$$A = \sqrt{\epsilon/(\tau g)} + a$$

dans (2.31) et linéarisons pour de petites valeurs de a , en prenant garde à ce que maintenant a est complexe. Nous obtenons

$$\partial_t a = -(\epsilon/\tau)(a + a^*)$$

qui peut se résoudre par exemple en passant en parties réelle et imaginaire selon $a = a_r + ia_i$; il vient

$$\begin{cases} \partial_t a_r &= -2(\epsilon/\tau)a_r, \\ \partial_t a_i &= 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Comme modifier a_r revient à modifier le module de A , on identifie la première équation à l'équation de stabilité d'un *mode dit d'« amplitude »*. Par contre la deuxième équation indique l'existence d'un mode neutre revenant à modifier légèrement a_i donc la phase de A , puisque

$$A = \sqrt{\epsilon/(\tau g)} + ia_i = \sqrt{\epsilon/(\tau g)}(1 + ia'_i) = \sqrt{\epsilon/(\tau g)} \exp(ia'_i) + O(\sqrt{\epsilon}a'_i).$$

Ce *mode de « phase » neutre* est lié à la propriété d'*invariance de phase* de (2.31) dans le cas complexe : si $A(t)$ est solution de (2.31), alors $A(t) \exp(i\phi)$ est aussi solution pour tout ϕ réel. Cette propriété résulte elle-même de l'hypothèse $g \in \mathbb{R}$, et plus fondamentalement de propriétés de symétrie du système physique... par exemple l'invariance par translation dans une certaine direction, qui a permis le passage en complexes et en modes de Fourier comme expliqué dans la section 1.5.3.

Remarque : l'identification des modes d'« amplitude » et de « phase » précédents est plus directe lorsque l'on écrit une perturbation générale de la solution bifurquée sous la forme polaire

$$A = \rho \exp(i\phi) = (\sqrt{\epsilon/(\tau g)} + \delta\rho) \exp(i\phi) \quad (2.41)$$

où $\delta\rho$ et ϕ réels sont justement des perturbations d'amplitude et de phase. En exercice le lecteur injectera l'ansatz (2.41) dans (2.31), prendra les parties réelle et imaginaire de l'équation obtenue et en déduira par linéarisation un système équivalent à (2.40).

Terminons en mentionnant la propriété simplificatrice générale⁸ suivante concernant les calculs non linéaires⁹ : *on peut faire tous les calculs en évaluant les modes et les opérateurs à $R = R_c$* . Ceci provient toujours de la continuité des modes propres par rapport à R ,

$$V_1(\mathbf{q}_c, R) = V_1(\mathbf{q}_c, R_c) + O(\epsilon). \quad (2.42)$$

Ainsi remplacer $V_1(\mathbf{q}_c, R)$ par $V_1(\mathbf{q}_c, R_c)$ dans les expressions (2.21) de V_a n'introduit que des corrections d'ordre $A\epsilon$ soit $\epsilon^{3/2}$ sur V_a , négligeables par rapport aux termes d'ordre le plus bas soit A^2 soit ϵ de V_\perp ; les corrections induites en calculant V_\perp et g à R_c au lieu de R sur (2.26) et (2.31) sont quant à elles évidemment négligeables.

2.1.8 Application au modèle simplifié d'afficheurs

Le modèle simplifié d'afficheurs cristaux liquides que nous avons introduit section 1.2.1 et analysé linéairement section 1.4 présente un mode critique réel donné par $V_1(\mathbf{q}_c) = (\sin(\pi z))$. D'autre part l'équation de la dynamique (1.18) correspondante ne comporte pas de non-linéarités quadratiques, donc aucun mode esclave n'est excité à l'ordre quadratique. Le schéma de la section précédente s'applique, et on obtient ainsi une solution faiblement non linéaire sous la forme d'une partie active seule,

$$V = V_a + O(A^3) = AV_1(\mathbf{q}_c) + O(A^3), \quad (2.43)$$

où A vérifie l'équation d'amplitude (2.31) avec, d'après (2.28),

$$g = -\langle N_3(V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c)), U_1(\mathbf{q}_c) \rangle = R_c/2 = \pi^2/2$$

⁸Etant entendu que l'on ne s'intéresse ici qu'à l'équation d'amplitude, à l'ordre le plus bas, du mode critique ; lorsque l'on veut aller plus loin et calculer par exemple la variété centrale, pour avoir une bonne précision il peut être crucial d'utiliser le mode complet $V_1(\mathbf{q}_c, R)$, comme cela est expliqué par exemple section A.1.2.

⁹Pour les calculs linéaires voir la section 1.8.1.



Fig. 2.4 – Description schématique des mécanismes non linéaires importants en convection de Rayleigh-Bénard d’après le modèle de Boussinesq avec glissement. **(a)** : l’advection par le mode critique de vitesse (lignes de courants grises) du mode critique de température (zones chaudes « C » ou froides « F ») crée une correction de température homogène en x (2.46) représentée par les caractères italiques (« C » ou « F »). **(b)** : l’advection par le mode critique de vitesse de cette correction de température crée une modulation de température en milieu de couche (2.47), représentée par les caractères italiques soulignés (« C » ou « F »), qui se trouve en opposition de phase avec le mode critique et va donc le saturer.

compte tenu de (1.18) et (1.113), en utilisant la dernière remarque de la section précédente. Ce calcul montre que le terme d’origine électrique seul sature l’instabilité du champ de directeur, et impose le caractère sur-critique de la bifurcation. Ceci provient de la diminution du couple électrique avec ϕ lorsque l’on approche de la nouvelle position d’équilibre $\phi = \pi/2$ i.e. $\hat{\mathbf{n}} \parallel \mathbf{E}$, cf. (1.8). Quantitativement, on obtient, en injectant dans (2.32) l’expression (1.75) du temps caractéristique τ et celle que nous venons d’obtenir pour g , la loi

$$A = \sqrt{\epsilon/(\tau g)} = \sqrt{2\epsilon} \implies \max(\phi) = \phi(1/2) = \sqrt{2\epsilon} \quad (2.44)$$

dans la solution faiblement non linéaire (2.43). Cette loi montre que l’angle ϕ va augmenter très rapidement avec ϵ , assurant ainsi une commutation optique très nette de l’afficheur même lorsque la tension de commande ne dépasse pas V_c de beaucoup.

2.1.9 Application au modèle de thermoconvection

En convection de Rayleigh-Bénard, nous pouvons rechercher une solution faiblement non linéaire sous la forme (2.11) avec, compte tenu de (2.21),

$$V_a = AV_1(\mathbf{q}_c) + A^*V_1^*(\mathbf{q}_c) \quad (2.45)$$

où $V_1(\mathbf{q}_c)$ est une notation simplifiée pour $V_1(q_c, 0, +, R_c)$ donné par (1.89). La présence de termes non linéaires quadratiques dans les équations de la dynamique (1.35) et (1.37) va générer des modes passifs à calculer a priori avec la règle (2.16). On obtient dans un premier temps

$$N_2(V_a, V_a) = -4|A|^2/(9\pi) (0, \sin(2\pi z))$$

qui correspond à un mode impair passif. La propriété (2.17) est donc vérifiée, d’où avec (2.18) ou (2.26)

$$V_{\perp} = |A|^2 V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*) \text{ avec } V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*) = (0, \theta_2(z)) = -1/(9\pi^3) (0, \sin(2\pi z)), \quad (2.46)$$

qui exprime la création par advection du mode de température critique d’une *correction de température homogène en x* correspondant à un réchauffement (refroidissement) dans la partie supérieure (inférieure) de la couche (figure 2.4a). D’après (2.29) le coefficient de saturation dans l’équation d’amplitude du mode critique est alors

$$g = -\langle N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*)), U_1(\mathbf{q}_c) \rangle$$

où $U_1(\mathbf{q}_c) = U_1(q_c, 1, +, R_c)$ équation (1.120). On trouve

$$N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*)) = 4/(81\pi^4) (0, \sin(\pi z) \cos(2\pi z)) \exp(iq_c x), \quad (2.47)$$

puis après projection

$$g = 2/[81\pi^4(1 + P^{-1})]. \quad (2.48)$$

La saturation est exclusivement due à l’advection de la composante homogène de température (2.46), comme représenté sur la figure 2.4b. En injectant dans (2.32) l’expression (1.91) du temps caractéristique τ , nous obtenons pour le module de l’amplitude de convection

$$|A| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\tau g}} = \frac{9\pi^3}{2} \sqrt{3\epsilon}. \quad (2.49)$$

On peut en déduire le *nombre de Reynolds* Re associé à la valeur maximale de v_z dans V_a , soit $2\pi\sqrt{3\epsilon}$ avec nos unités ; il vient

$$Re = \frac{\kappa}{d} 2\pi\sqrt{3\epsilon} \frac{d}{\nu} = \frac{2\pi}{P} \sqrt{3\epsilon}, \quad (2.50)$$

qui montre que seuls des fluides possédant une viscosité faible par rapport à leur diffusivité thermique permettront d'atteindre des Reynolds élevés. Un autre effet important de la convection est l'*amélioration du transfert thermique* à travers la couche, i.e. le fait que le flux de chaleur globalement transmis est augmenté par la convection, comme mesuré par le *nombre de Nusselt*

$$Nu = \frac{\langle (\mathbf{J}_Q \cdot \hat{\mathbf{z}})_{\text{en convection}} \rangle_x}{\langle (\mathbf{J}_Q \cdot \hat{\mathbf{z}})_{\text{en conduction}} \rangle_x} = \frac{\langle (\partial_z T)_{\text{en convection}} \rangle_x}{\langle (\partial_z T)_{\text{en conduction}} \rangle_x}$$

d'après la loi de Fourier (1.23), les crochets indiquant une prise de moyenne suivant x . Compte tenu de ce que $\partial_z T = -R + \partial_z \theta$ en adimensionnel, on a

$$Nu = 1 - R^{-1} \langle \partial_z \theta \rangle_x,$$

où la contribution d'ordre le plus bas provient de la correction de température (2.46), qui augmente effectivement la valeur absolue du gradient thermique près de la paroi inférieure ; on obtient ainsi

$$Nu = 1 - R_c^{-1} |A|^2 \partial_z \theta_2(0) + t.o.s. = 1 + 2\epsilon + O(\epsilon^2) > 1 \quad (2.51)$$

au dessus du seuil de convection. Une telle augmentation linéaire en ϵ du nombre de Nusselt a bien été mise en évidence par de nombreuses expériences, et elle constitue d'ailleurs l'une des méthodes de mesure du seuil.

Mentionnons pour terminer que ces résultats sont évidemment modifiés si l'on utilise des conditions limites de *bords rigides* au lieu de bords libres pour la vitesse. Contrairement à ce qui a été observé en ce qui concerne les propriétés linéaires étudiées section 1.6, les propriétés non linéaires obtenues diffèrent *qualitativement*, pour certaines, de celles calculées en bords libres. C'est le cas par exemple du nombre de Nusselt à l'ordre le plus bas,

$$\frac{Nu - 1}{\epsilon} = (0,699 - 0,00472P^{-1} + 0,00832P^{-2})^{-1} \quad (2.52)$$

en bords rigides d'après Schlüter et al. (1965). Ainsi l'efficacité thermique de la convection en bords rigides dépend fortement du nombre de Prandtl à Prandtl faible, où $(Nu - 1)/\epsilon \sim 120P^2$, contrairement à ce qui a été prédit en bords libres par (2.51). La « leçon » de cette histoire pourrait être qu'*en général, des propriétés non linéaires des solutions d'un modèle sont beaucoup plus sensibles à des modifications de ce modèle que des propriétés linéaires.*

2.1.10 Deuxième sous cas : bifurcation (fourche) sous-critique

Si le coefficient de saturation donné par (2.28) ou (2.29) est $\boxed{g < 0}$, la bifurcation correspondante est dite *sous-critique*. A l'ordre A^3 les effets non linéaires ont tendance à renforcer l'instabilité, et aucune solution stationnaire de (2.31) ne peut être obtenue pour $\epsilon > 0$. On peut alors tenter de poursuivre l'analyse faiblement non linéaire jusqu'à l'ordre A^5 pour saturer l'instabilité. Par des calculs analogues à ceux développés jusqu'ici, mais beaucoup plus lourds puisqu'ils impliquent un calcul de V_{passifs} à l'ordre A^4 , on obtient dans les systèmes « bien symétriques » l'équation d'amplitude d'ordre supérieur

$$\partial_t A = \frac{\epsilon}{\tau} A - g|A|^2 A - h|A|^4 A \quad (2.53)$$

généralisant (2.31). Les effets non linéaires d'ordre supérieur saturent effectivement l'instabilité si le coefficient (réel dans les systèmes « bien symétriques ») h est $\boxed{h > 0}$. On obtient alors le diagramme de bifurcation

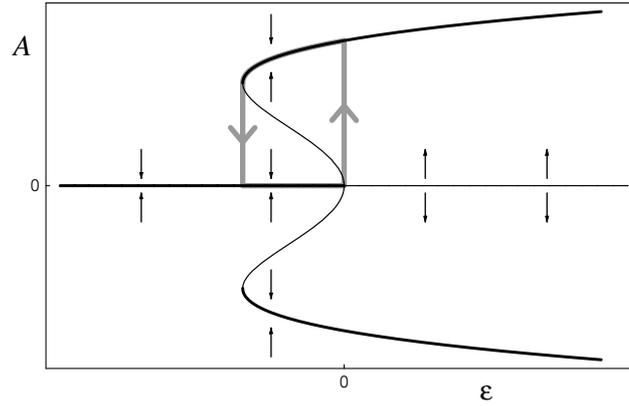


Fig. 2.5 – Diagramme d'une *bifurcation sous-critique*, dessiné avec les mêmes conventions que figure 2.3, mais à partir de l'équation d'amplitude d'ordre supérieur (2.53). Si on part de la solution de base $A = 0$, en augmentant ϵ jusqu'à 0 pour le faire ensuite lentement décroître on va suivre le cycle d'*hystérésis* représenté en gris. On notera aussi que, dans l'intervalle de valeurs de ϵ correspondant à la largeur de ce cycle, on a *stabilité conditionnelle* de la solution $A = 0$, i.e. stabilité vis-à-vis de perturbations de petite amplitude mais non de grande amplitude.

figure 2.5, dont les branches bifurquées sont plus aisément calculables en exprimant ϵ comme fonction de A suivant

$$\epsilon = \tau(g|A|^2 + h|A|^4) .$$

On note l'existence de *points de retournement*

$$\epsilon_r = -\frac{\tau g^2}{4h} , \quad |A_r|^2 = -\frac{g}{2h} , \quad (2.54)$$

en lesquels ont lieu, lorsque ϵ passe par la valeur ϵ_r , des « *bifurcations nœud-col* »¹⁰. On note aussi l'existence de solutions bifurquées stables au-dessous du point de bifurcation $\epsilon = 0$, jusqu'à $\epsilon = \epsilon_r < 0$ justement ; ceci explique le terme de bifurcation *sous-critique*. Un point important est l'existence de phénomènes d'*hystérésis* ou d'*irréversibilité* (figure 2.5)... ceci dans un système purement déterministe et même conservatif, puisque, par une généralisation immédiate de (2.36) et (2.38), on obtient

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{dF}{dA} \text{ dans le cas réel , } -\frac{\partial F}{\partial A^*} \text{ dans le cas complexe,} \quad (2.55)$$

les *énergies libres de Landau* étant données par

$$\begin{aligned} F(A) &= -\frac{\epsilon}{2\tau}A^2 + \frac{g}{4}A^4 + \frac{h}{6}A^6 \text{ dans le cas réel,} \\ F(A, A^*) &= -\frac{\epsilon}{\tau}|A|^2 + \frac{g}{2}|A|^4 + \frac{h}{3}|A|^6 \text{ dans le cas complexe.} \end{aligned} \quad (2.56)$$

La connaissance de la position des points de retournements (2.54) donnant la valeur typique des amplitudes sur les branches bifurquées stables nous permet enfin d'expliciter la notion de « bifurcation faiblement sous-critique » mentionnée dans l'introduction : il s'agit de bifurcations sous-critiques telles que les méthodes faiblement non linéaires restent pertinentes, c'est-à-dire $V \ll 1$ i.e. $A \ll 1$ sur les branches bifurquées stables lorsque ϵ est proche de 0. Le critère de « *bifurcation faiblement sous-critique* » est donc

$$g \ll h . \quad (2.57)$$

¹⁰Cette terminologie fait référence à un système de dimension au moins 2, dans lequel existent donc des modes passifs. Appelant B l'amplitude d'un mode passif, le système constitué de (2.53) et de l'équation $\partial_t B = \sigma_B B$ avec $\sigma_B < 0$ fini conduit dans le voisinage de ϵ_r , $A_r = \sqrt{-g/(2h)}$ par exemple, en considérant le cas d'un système réel, à un portrait de phase simple, avec un nœud stable ($A > A_r$) et un col ($A < A_r$) pour $\epsilon > \epsilon_r$ qui « coalescent » à $\epsilon = \epsilon_r$. En faisant le chemin inverse, un phénomène remarquable se produit, puisque deux solutions non linéaires apparaissent « à partir de rien » lorsque ϵ croît de $\epsilon < \epsilon_r$ à $\epsilon > \epsilon_r$. On verra que ce type de phénomène non linéaire peut exister en hydrodynamique, qu'il y ait ou non bifurcation sous-critique comme ici (cf. l'annexe B).

Des exemples concrets de bifurcations sous-critiques¹¹ sont présentés dans l'annexe B ; on comparera en particulier la figure 2.5 aux figures B.3 et B.5b.

2.2 Cas d'une instabilité oscillante

L'existence d'une partie imaginaire finie dans les valeurs propres associées à une instabilité oscillante interdit une distinction entre modes actifs et passifs sur la base des critères (2.4) et (2.5), et donc l'application du schéma développé section 2.1. On peut néanmoins développer un schéma faiblement non linéaire similaire dans le **cas particulier d'un mode critique isolé ou de perturbations n'impliquant que celui-ci**. Nous utilisons ici une approche pragmatique ; pour une approche rigoureuse, qui ne peut faire l'économie d'une hypothèse d'échelle des amplitudes, le lecteur est renvoyé à l'annexe D. Il sera aussi intéressant de méditer l'exemple d'une réaction chimique oscillante présenté dans l'annexe A.2.2. Signalons enfin, toujours à titre d'exemple, qu'en hydro- et aérodynamique, l'apparition d'un *sillage* derrière un obstacle placé dans un écoulement (par exemple une aile d'avion...) est souvent due à une instabilité oscillante ; c'est le cas certainement pour un obstacle « modèle » cylindrique à section circulaire, comme l'ont prouvé les expériences réalisées en soufflerie par Mathis et al. (1984) et les études numériques de Noack & Eckelmann (1994).

Un point fondamental pour initier le schéma faiblement non linéaire consiste à faire apparaître explicitement les facteurs temporels oscillants en écrivant la partie « active » de la solution faiblement non linéaire

$$\boxed{V = V_a + V_\perp} \quad (2.58)$$

sous la forme

$$\boxed{V_a = A_1(t) \exp(-i\omega_c t) V_1(\mathbf{q}_c) + A_1^*(t) \exp(i\omega_c t) V_1(\mathbf{q}_c^*)} \quad (2.59)$$

avec $V_1(\mathbf{q}_c)$ le mode critique, et la partie « passive » sous la forme

$$\boxed{V_\perp = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq \pm 1} A_n(t) \exp(-in\omega_c t) V_n} \quad (2.60)$$

expression dans laquelle les vecteurs V_n seront précisés ultérieurement, tandis que les A_n seront esclaves des $A_{\pm 1}$; c'est d'ailleurs ce qui définit maintenant la distinction entre les parties « active » et « passive » de la solution. Naturellement

$$A_{-n}(t) = A_n^*(t) \quad \text{et} \quad V_{-n} = V_n^* .$$

Nous posons les hypothèses suivantes :

- les amplitudes complexes $A_n(t)$ présentent toutes des **variations temporelles lentes** ;
- les **amplitudes passives** $A_n(t)$ pour $n \neq \pm 1$ sont **dominées** par les **amplitudes actives** $A_{\pm 1}(t)$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \neq \pm 1, \quad |A_n(t)| \ll |A_{\pm 1}(t)| .$$

Pour pouvoir séparer dans l'équation de la dynamique (2.1) les facteurs des différentes puissances de $\exp(i\omega_c t)$, nous avons besoin du

Lemme pragmatique :

Soit $v(t)$ un scalaire complexe de la forme

$$v(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n(t) \exp(-in\omega_c t) \quad (2.61)$$

¹¹Oscillantes, mais cela n'affecte pas l'équation de Landau portant sur le module de l'amplitude, cf. la remarque qui suit l'équation (2.75).

avec les $B_n(t)$ lentement variables, i.e. variant sur une échelle de temps caractéristique très grande par rapport à la période $T_c = 2\pi/\omega_c$. Alors

$$\forall t, v(t) = 0 \iff \forall n, \forall t, B_n(t) = 0. \quad (2.62)$$

En effet pour $m \in \mathbb{Z}$ multiplions l'équation $v(t) = 0$ par $\exp(im\omega_c t)$; il vient après changement d'indice

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} B_{m-p}(t) \exp(ip\omega_c t) = 0.$$

Prenons la valeur moyenne de cette équation sur un intervalle de temps de longueur T_c centré sur un temps quelconque t_0 . Il vient

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{t_0 - T_c/2}^{t_0 + T_c/2} B_{m-p}(t) \exp(ip\omega_c t) dt = 0.$$

Sur cet intervalle de temps court, les amplitudes $B_n(t)$ évoluent très peu : on peut donc les remplacer, en première approximation, par leur valeur au centre de l'intervalle. Il vient alors en première approximation

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} B_{m-p}(t_0) \int_{t_0 - T_c/2}^{t_0 + T_c/2} \exp(ip\omega_c t) dt = B_m(t_0) = 0.$$

En appliquant ce lemme aux composantes de l'équation de la dynamique (2.1), qui prennent bien la forme (2.61), on peut déjà isoler le facteur en $\exp(-i\omega_c t)$, d'où, en appelant P_{-1} l'opérateur correspondant,

$$(\partial_t A_1 - i\omega_c A_1) D \cdot V_1(\mathbf{q}_c) = A_1 L_R \cdot V_1(\mathbf{q}_c) + P_{-1} \cdot [N_2(V, V) + N_3(V, V, V)]. \quad (2.63)$$

Un point nouveau par rapport au cas stationnaire est que les termes non linéaires d'ordre le plus bas dans cette équation,

$$N_2(V_a, V_a) = |A_1|^2 N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_1(\mathbf{q}_c^*)) + [A_1^2 \exp(-2i\omega_c t) N_2(V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c)) + c.c.] , \quad (2.64)$$

ne peuvent entrer en résonance avec les termes dominants, puisque leur dépendance en $\exp(0t)$ et $\exp(\pm 2i\omega_c t)$ seulement montre que¹²

$$P_{-1} \cdot N_2(V_a, V_a) = 0. \quad (2.65)$$

Pour calculer les termes non linéaires résonants à l'ordre le plus bas dans (2.63), on est donc contraint de calculer V_{\perp} à l'ordre le plus bas, qui est généré par $N_2(V_a, V_a)$ équation (2.64). En extrayant d'après notre lemme les facteurs de $\exp(0t)$ et $\exp(\pm 2i\omega_c t)$ des équations de la dynamique (2.1), nous obtenons à l'ordre le plus bas

$$(\partial_t A_0) D \cdot V_0 = A_0 L_{R_c} \cdot V_0 + |A_1|^2 N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_1(\mathbf{q}_c^*)) , \quad (2.66)$$

$$(\partial_t A_2 - 2i\omega_c A_2) D \cdot V_2 = A_2 L_{R_c} \cdot V_2 + A_1^2 N_2(V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c)) . \quad (2.67)$$

Il est clair, d'après l'hypothèse des variations temporelles lentes de $A_2(t)$, que $\partial_t A_2 \ll \omega_c A_2$, donc que (2.67) peut se résoudre par élimination quasi statique suivant

$$A_2 = A_1^2 \quad \text{et} \quad V_2 = V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c) = -(L_{R_c} + 2i\omega_c D)^{-1} \cdot N_2(V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c)) . \quad (2.68)$$

Comme l'opérateur L_{R_c} est inversible et de spectre ne contenant aucune petite valeur propre en général (sauf cas pathologique, les valeurs propres les plus proches de 0 dans le plan complexe sont $\pm i\omega_c$, qui sont finies), on a en fait, dans (2.66),

$$(\partial_t A_0) D \cdot V_0 \sim \epsilon A_0 D \cdot V_0 \ll A_0 L_{R_c} \cdot V_0 ,$$

¹²On pourrait dire que l'on a une « symétrie nouvelle » due aux oscillations temporelles; on comparera l'égalité générale (2.65) à l'égalité conditionnelle (2.17), en prenant cependant garde de ne pas confondre les opérateurs P_a et P_{-1} .

et donc dans (2.66) aussi on peut procéder à une élimination quasi statique. Elle conduit à

$$A_0 = |A_1|^2 \quad \text{et} \quad V_0 = V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*) = -L_{R_c}^{-1} \cdot N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_1(\mathbf{q}_c^*)). \quad (2.69)$$

Au bilan, à l'ordre le plus bas,

$$\boxed{V_\perp = |A|^2 V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*) + [A^2 \exp(-2i\omega_c t) V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c) + c.c.]}, \quad (2.70)$$

en notant dorénavant pour simplifier A pour A_1 . En conséquence à l'ordre le plus bas

$$\begin{aligned} P_{-1} \cdot [N_2(V, V) + N_3(V, V, V)] \\ = |A|^2 A [N_2(V_1(\mathbf{q}_c^*) | V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c)) + N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*)) + N_3(V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c) | V_1(\mathbf{q}_c^*))]. \end{aligned} \quad (2.71)$$

En utilisant d'autre part le développement (1.59) de la valeur propre $\sigma(\mathbf{q}_c, R)$ apparaissant dans

$$L_R \cdot V_1(\mathbf{q}_c) = \sigma(\mathbf{q}_c, R) D \cdot V_1(\mathbf{q}_c),$$

et en projetant l'équation (2.63) sur le mode critique adjoint, on obtient à l'ordre le plus bas

$$\boxed{\partial_t A = \frac{1 + is}{\tau} \epsilon A - g(1 + ic) |A|^2 A} \quad (2.72)$$

avec¹³

$$\boxed{g(1 + ic) = -\langle N_2(V_1(\mathbf{q}_c^*) | V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c)) + N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*)) + N_3(V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c) | V_1(\mathbf{q}_c^*)), U_1(\mathbf{q}_c) \rangle}, \quad (2.73)$$

g et c étant réels. Nous n'étudions pour simplifier que le cas correspondant à une **bifurcation oscillante**¹⁴ **sur-critique** pour laquelle le **coefficient de saturation g est strictement positif**¹⁵. En utilisant une représentation polaire de l'amplitude,

$$A = \rho \exp(i\phi) \quad (2.74)$$

où ρ et ϕ sont réels, nous obtenons, en prenant les parties réelle et imaginaire de (2.72),

$$\begin{aligned} \partial_t \rho &= \frac{\epsilon}{\tau} \rho - g\rho^3, \\ \partial_t \phi &= \frac{s\epsilon}{\tau} - g c \rho^2. \end{aligned} \quad (2.75)$$

La première équation est identique à l'équation d'amplitude d'une bifurcation stationnaire sur-critique dans le cas réel. Elle montre que ρ va se stabiliser aux temps longs sur la valeur

$$\boxed{\rho = |A| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\tau g}}}. \quad (2.76)$$

D'après (2.75), une fois cette valeur limite atteinte, la phase va être de la forme

$$\phi = \phi_0 - \Omega t \quad (2.77)$$

¹³Noter l'identité entre cette formule et celle donnée équation (2.29) dans le cas d'une bifurcation stationnaire d'un système symétrique. Une présentation « unifiée » de ces deux cas, en apparence très différents, mais dans lesquels le phénomène de ralentissement critique « universel » permet en fait la réduction de la dynamique, peut être obtenue par des méthodes multi-échelles, voir par exemple la fin de l'annexe D.

¹⁴On parle aussi de **bifurcation de Hopf** en hommage au mathématicien allemand Hopf qui fut le premier à étudier ce type de bifurcation dans les années 1940.

¹⁵Dans le cas contraire, la bifurcation est **sous-critique** et il faut en général aller jusqu'à l'ordre 5 en puissances de A pour espérer saturer l'instabilité... Pour des exemples concrets voir l'annexe B.

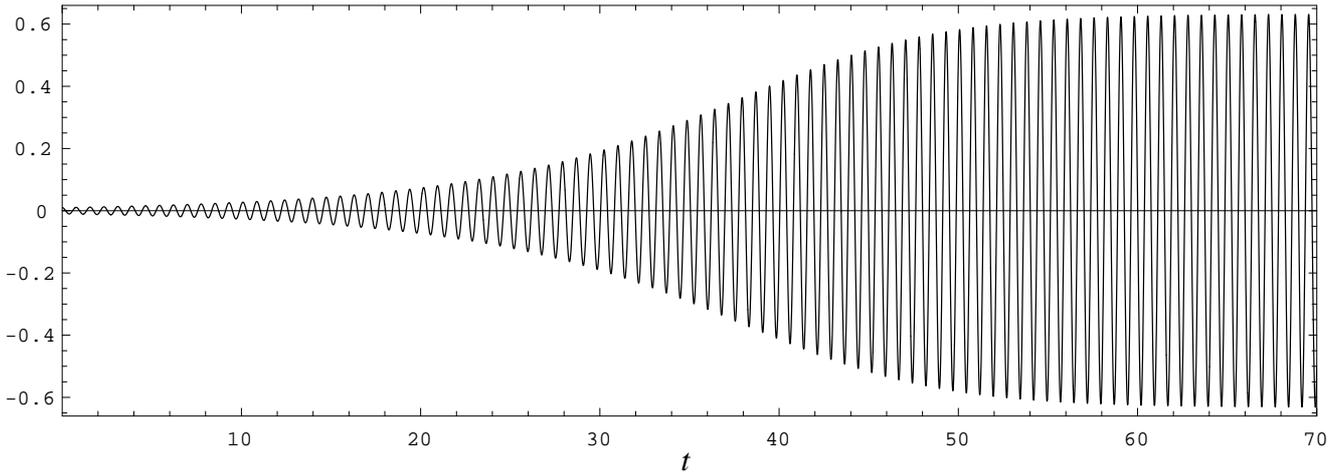


Fig. 2.6 – Comportement typique d'une composante du vecteur d'état local V , en $2\text{Re}[A(t)\exp(-i\omega_c t)]$, après passage du seuil d'une instabilité se développant sous la forme d'une **bifurcation oscillante sur-critique**. L'évolution à partir d'une valeur initiale petite a été obtenue grâce aux expressions analytiques (E.16) et (E.20) de la solution de l'équation d'amplitude (2.72). **Exercice** : en supposant que cette courbe est une courbe expérimentale obtenue à paramètre de contrôle $R = 1.1R_c$, pouvez-vous estimer les valeurs de ω_c , τ , s , g et c ?

où

$$\boxed{\Omega = \frac{c-s}{\tau}\epsilon} \quad (2.78)$$

apparaît comme une correction à la fréquence angulaire ω_c , cf. l'expression déduite de V_a (2.59),

$$V_a = \sqrt{\frac{\epsilon}{\tau g}} \exp[i(\phi_0 - (\omega_c + \Omega)t)] V_1(\mathbf{q}_\epsilon) + c.c. \quad (2.79)$$

Pour cette raison les coefficients s et c de l'équation d'amplitude (2.72) sont désignés comme **décalages en fréquence linéaire et non linéaire**. D'ailleurs, en réécrivant (2.78) sous la forme

$$\Omega = g(c-s)|A|^2$$

on voit très clairement apparaître le phénomène de **variation de la fréquence de l'oscillation avec son amplitude** typique d'un oscillateur non linéaire. Ce phénomène est « mesurable » sur la figure 2.6 qui montre une solution de (2.72) contenant un transitoire, solution calculée *analytiquement* annexe E.2. Notons pour terminer que la bifurcation vers des solutions oscillantes prouve l'inexistence d'une énergie libre de Landau pour l'équation d'amplitude (2.72).

Chapitre 3

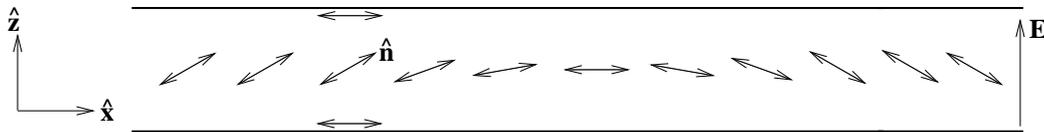
Analyse faiblement non linéaire : équations d'enveloppes

Le lecteur attentif n'aura pas accepté sans broncher l'hypothèse de l'existence d'un seul mode actif posée section 2.1.4. En effet nous avons montré que des systèmes xz par exemple, faiblement ou pas confinés comme le modèle de thermoconvection, admettent des modes propres dépendant d'un nombre d'onde q variant semi-continûment ou continûment. En conséquence si q est près de q_c les taux de croissance correspondants $\sigma(q,1,+,R)$ restent proches de $\sigma(q_c,1,+,R)$, et les modes $V_1(q,1,+,R)$ doivent être considérés comme actifs au même titre que $V_1(q_c,1,+,R)$, en reprenant les notations introduites pour la thermoconvection section 1.6. Seules les *équations d'enveloppe* permettent alors de discuter de la *compétition entre tous ces modes actifs*, de façon à valider éventuellement les équations d'amplitude du mode critique calculées dans le chapitre précédent... s'il s'avère que les modes s'« excluent » mutuellement, ce qui n'est aucunement garanti a priori !

Une autre motivation pour l'introduction du formalisme d'enveloppe est l'obtention de *solutions faiblement non linéaires bien plus générales* que celles obtenues avec l'équation d'amplitude du mode critique,

$$\phi(z) = A \sin(\pi z) + O(A^3) \quad \text{où l'amplitude } A \text{ valait } \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{\tau g}} \text{ avec } \epsilon = \frac{V_0^2 - V_c^2}{V_c^2}$$

pour reprendre le cas du modèle simplifié d'afficheurs. La contemplation de cette équation copie de (2.43) et (2.44) aurait dû, en fait, susciter une inquiétude : certes, lorsque la tension V_0 appliquée à la couche de cristal liquide va dépasser V_c , le directeur va quitter le plan horizontal... mais pourquoi choisirait t'il plutôt de se tourner vers $+$ ou $-\mathbf{E}$, puisque ces deux solutions limites sont autorisées et équivalentes ? On sent bien que, partant de certaines perturbations, on risque fort d'arriver à une configuration finale où un « domaine » $\phi > 0$ i.e. $A > 0$ va cotoyer un « domaine » $\phi < 0$ i.e. $A < 0$:



On comprend aussi que l'existence d'une « paroi » possédant une certaine étendue entre ces deux domaines va correspondre à une zone floue sur l'afficheur. Il semble donc pertinent d'essayer de modéliser de tels effets, correspondant à des solutions présentant une dépendance en x , et que l'on a naturellement l'idée de construire par superposition modale selon

$$\phi(z) = \sum_q A(q) \exp(iqx) \sin(\pi z) + t.o.s. .$$

Pour appliquer le schéma faiblement non linéaire de la section 2.1 à un tel ansatz, il importe de séparer les nombres d'ondes actifs tels que la valeur propre correspondante $\sigma(q,0,1,R_c)$ est d'ordre ϵ des nombres d'ondes passifs tels que $\sigma(q,0,1,R_c)$ est « très négatif » ; ce point mérite bien sûr une étude générale.

3.1 Caractérisation d'une famille continue de modes actifs : longueur(s) caractéristique(s)

Pour simplifier nous considérons des systèmes présentant une *instabilité stationnaire sur-critique* et une *famille continue ou semi-continue de modes actifs* contenant en particulier le mode critique, ces deux alternatives correspondant typiquement à des systèmes soit non confinés soit faiblement confinés.

3.1.1 Systèmes bidimensionnels quasi unidimensionnels

Considérons un système xz non confiné ou faiblement confiné dans la direction x mais étroitement confiné dans la direction z . Soit donc q le nombre d'onde dans la direction x , variant continûment ou semi-continûment, et caractérisant les modes propres actifs

$$V_1(q, \mathbf{q}'_c, R; x, z) = \exp(iqx) \tilde{V}_1(q, \mathbf{q}'_c, R; z). \quad (3.1)$$

Cette écriture suppose que les nombres restants \mathbf{q}' varient de façon discrète et sont fixés à leur valeur critique pour tous les modes actifs : près du seuil de l'instabilité les modes actifs sont donc caractérisés par leur nombre d'onde q dans la direction x seulement. En conséquence, on qualifie le système de « *quasi unidimensionnel* ». Notre hypothèse de travail consiste à poser l'existence d'une valeur critique q_c de q telle que $V_1(q_c, \mathbf{q}'_c, R_c)$, mode critique de l'instabilité, présente au voisinage du seuil R_c une valeur propre donnée par (1.52),

$$\sigma(q_c, \mathbf{q}'_c, R_c(1 + \epsilon)) = \frac{\epsilon}{\tau} + O(\epsilon^2) \quad (3.2)$$

où τ est le temps caractéristique de l'instabilité. Par définition le mode critique est le seul mode à devenir neutre pour $\epsilon = 0$. Ceci signifie que $\sigma(q, \mathbf{q}'_c, R_c)$ est maximum en $q = q_c$, et permet, en faisant une hypothèse raisonnable de régularité de σ , d'écrire un développement limité de la forme

$$\sigma(q_c + q, \mathbf{q}'_c, R_c) = -\frac{\xi^2 q^2}{\tau} + O(q^4) \quad (3.3)$$

où ξ est la *longueur caractéristique* ou *longueur de cohérence* de l'instabilité. Combinant les développements (3.2) et (3.3) par rapport aux variables indépendantes ϵ et q , on obtient

$$\boxed{\sigma(q_c + q, \mathbf{q}'_c, R) = \frac{\epsilon - \xi^2 q^2}{\tau} + O(\epsilon^2) + O(q^3)}, \quad (3.4)$$

qui conduit aussi à une expression approximative de la courbe neutre au voisinage du mode critique :

$$\epsilon_0(q_c + q, \mathbf{q}'_c) = \xi^2 q^2 + O(q^3) \iff \boxed{R_0(q_c + q, \mathbf{q}'_c) = R_c(1 + \xi^2 q^2 + O(q^3))}. \quad (3.5)$$

On déduit de (3.4) l'ordre de grandeur typique des nombres réduits q tels que $V_1(q_c + q, \mathbf{q}'_c, R)$ doive être considéré comme actif,

$$\boxed{q \sim \xi^{-1} \epsilon^{1/2}} \quad (3.6)$$

correspondant à des *variations spatiales lentes* dans la direction x faiblement confinée ou d'extension infinie du système, sur des échelles caractéristiques

$$\boxed{l = q^{-1} \sim \xi \epsilon^{-1/2}}. \quad (3.7)$$

Application au modèle simplifié d'afficheurs

La réécriture suivante des valeurs propres (1.72) du modèle bidimensionnel d'afficheur,

$$\sigma(q, 0, 1, R) = R - R_c - q^2 = R_c \epsilon - q^2,$$

montre que $\tau = 1/R_c$ (ce que l'on avait déjà vu en (1.75)) et que

$$\xi = 1/\sqrt{R_c} = 1/\pi \quad (3.8)$$

soit, en dimensionnel, l'épaisseur de la couche à un facteur numérique près.

Application au modèle de thermoconvection

Lorsque le calcul général des valeurs propres d'un problème est lourd, il est plus efficace pour calculer ξ de faire un développement limité de l'expression de la courbe neutre au voisinage du nombre d'onde critique. Le coefficient du carré du nombre d'onde réduit q peut en effet être identifié à $R_c \xi^2$ d'après (3.5). Cette méthode est utile dans le cas du modèle de thermoconvection analysé linéairement section 1.6 ; en effet de (1.87) et (1.88) on déduit

$$R_0(q_c + q, 1, +) = R_c + 18\pi^2 q^2 + O(q^4)$$

soit

$$\xi = 2/\pi \sqrt{2/3} . \quad (3.9)$$

Dimensionnellement ξ est encore de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche.

3.1.2 Systèmes tridimensionnels quasi bidimensionnels

Considérons maintenant un système étroitement confiné dans la direction z mais par contre faiblement ou pas confiné dans les directions x et y . Les modes propres sont alors de la forme

$$V_1(q, p, \mathbf{q}' ; x, y, z) = \exp[i(qx + py)] \tilde{V}_1(\mathbf{q}' ; z) \quad (3.10)$$

avec q et p les nombres d'onde dans les directions x et y , et \mathbf{q}' les autres nombres caractérisant les modes propres. Ces nombres sont supposés varier discrètement ; dans le cas « *quasi bidimensionnel* », la seule famille active est celle des modes possédant les nombres \mathbf{q}'_c du mode critique. Les modes actifs sont donc caractérisés par la seule donnée de leurs nombres q et p , ou encore de leur **vecteur d'onde**

$$\mathbf{k} = q\hat{\mathbf{x}} + p\hat{\mathbf{y}} . \quad (3.11)$$

Trois cas sont à distinguer en général selon que le ou les modes critiques sont de vecteur(s) d'onde critique(s) $\mathbf{k}_c = q_c\hat{\mathbf{x}} + p_c\hat{\mathbf{y}}$ nul, fixé non nul ou seulement de module fixé, à cause d'une symétrie de rotations du système.

Cas d'une instabilité non structurante

Si le mode critique est défini par $\mathbf{k}_c = \mathbf{0}$, on aboutit par le même raisonnement que celui qui a conduit à l'écriture de (3.4) au développement limité général du taux de croissance des modes actifs

$$\sigma(q, p, \mathbf{q}'_c, R) = \frac{\epsilon - \xi_x^2 q^2 - \xi_y^2 p^2}{\tau} + O(\epsilon^2) + O(q^4) + O(p^4) , \quad (3.12)$$

où ξ_x et ξ_y sont les **longueurs caractéristiques** dans les directions x et y de l'instabilité. Ce développement conduit aussi à l'expression approximative suivante de la courbe neutre au voisinage du mode critique :

$$\begin{aligned} \epsilon_0(q, p, \mathbf{q}'_c) &= \xi_x^2 q^2 + \xi_y^2 p^2 + O(q^4) + O(p^4) \\ \Leftrightarrow & \boxed{R_0(q, p, \mathbf{q}'_c) = R_c(1 + \xi_x^2 q^2 + \xi_y^2 p^2 + O(q^4) + O(p^4))} , \end{aligned} \quad (3.13)$$

d'où un domaine de vecteurs d'ondes actifs et les échelles de variations spatiales lentes correspondantes :

$$\boxed{\begin{array}{ll} q \sim \xi_x^{-1} \epsilon^{1/2} & \text{correspondant à } l_x = q^{-1} \sim \xi_x \epsilon^{-1/2} \text{ dans la direction } x , \\ p \sim \xi_y^{-1} \epsilon^{1/2} & \text{correspondant à } l_y = p^{-1} \sim \xi_y \epsilon^{-1/2} \text{ dans la direction } y . \end{array}} \quad (3.14)$$

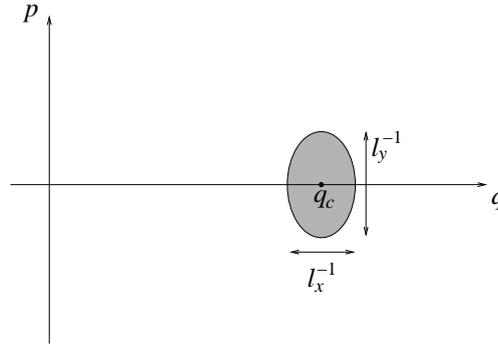


Fig. 3.1 – Pour un système anisotrope structurant étendu dans les directions x et y , la zone grise représente le domaine des vecteurs d'ondes $\mathbf{k} = q\hat{\mathbf{x}} + p\hat{\mathbf{y}}$ associés à un mode actif $V_1(q, p, \mathbf{q}'_c)$ instable en vertu de (3.14) et (3.17); dans le cas non structurant général il faut ramener par la pensée q_c à 0.

On peut qualifier le système d'« isotrope » si $\xi_x = \xi_y$, d'« anisotrope » dans le cas contraire.

Un *exemple* est bien sûr celui du modèle d'afficheurs. L'expression (1.72) des valeurs propres $\sigma(q, p, 1, R)$ conduit immédiatement à

$$\xi_x = \xi_y = d/\pi, \quad (3.15)$$

qui montre qu'au voisinage du seuil ce système paraît « isotrope ».

Cas d'une instabilité structurante dans un système anisotrope

Ceci signifie qu'il existe une direction privilégiée x dans le plan d'extension du système, de sorte que la valeur critique du vecteur d'onde soit $\mathbf{k}_c = q_c\hat{\mathbf{x}}$ (i.e. $p_c = 0$). On aboutit alors à un taux de croissance de la forme

$$\sigma(q_c + q, p, \mathbf{q}'_c, R) = \frac{\epsilon - \xi_x^2 q^2 - \xi_y^2 p^2}{\tau} + O(\epsilon^2) + O(q^4) + O(p^4), \quad (3.16)$$

où ξ_x et ξ_y sont les *longueurs caractéristiques* dans les directions x et y , donnant pour la courbe neutre

$$\begin{aligned} \epsilon_0(q_c + q, p, \mathbf{q}'_c) &= \xi_x^2 q^2 + \xi_y^2 p^2 + O(q^4) + O(p^4) \\ \iff R_0(q_c + q, p, \mathbf{q}'_c) &= R_c(1 + \xi_x^2 q^2 + \xi_y^2 p^2 + O(q^4) + O(p^4)), \end{aligned} \quad (3.17)$$

d'où un domaine de vecteurs d'ondes *réduits* actifs et des échelles de variations spatiales lentes analogues à (3.14), comme représenté sur la figure 3.1

Cas d'une instabilité structurante dans un système isotrope \leftrightarrow modèle de thermoconvection

Lorsque, pour simplifier notre étude de la *thermoconvection*, nous nous sommes restreints à des champs ne dépendant que de x et z , nous avons en fait posé un choix particulier des axes du repère de travail. Comme un fluide newtonien est isotrope, et que la géométrie de la convection de Rayleigh-Bénard est invariante par rotation d'axe Oz , à chaque mode de rouleaux xz que nous avons calculés, pour lequel les champs de température et de vitesse sont en $\exp(iqx)$, correspondent en fait tous les modes déduits par une rotation quelconque d'axe Oz , soient des modes en $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, $\mathbf{k} = q\hat{\mathbf{x}} + p\hat{\mathbf{y}}$ ($\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$) étant le vecteur d'onde (vecteur position) dans le plan d'extension du système. Ces modes présentent à cause de l'isotropie les mêmes valeurs propres que le mode en $\exp(i|\mathbf{k}|x)$; ceci implique la forme figure 3.2 de l'ensemble des vecteurs d'ondes actifs. Nous intéressant à un système dans lequel on impose, par exemple par des bords verticaux « lointains » d'orientation choisie, ou par l'utilisation de fils chauffants, que ces vecteurs d'ondes soient proches d'un vecteur d'onde critique $\mathbf{k}_c = q_c\hat{\mathbf{x}}$, le développement du taux de croissance correspondant $\sigma(\mathbf{k}_c + \mathbf{k}, \mathbf{q}'_c, R)$ prendra à l'ordre le plus bas la forme

$$\sigma(\mathbf{k}_c + \mathbf{k}, \mathbf{q}'_c, R) = \frac{\epsilon - \xi_2^4 [(\mathbf{k}_c + \mathbf{k})^2 - q_c^2]^2}{\tau} = \frac{\epsilon - \xi_2^4 (2q_c q + q^2 + p^2)^2}{\tau}$$

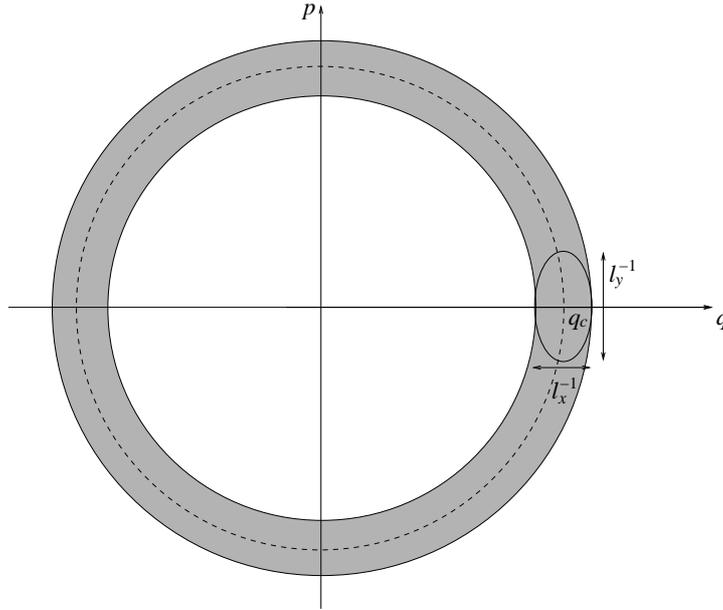


Fig. 3.2 – Pour un système « isotrope » étendu dans les directions x et y , la zone grise représente le domaine des vecteurs d'ondes associés à un mode actif instable en vertu de (3.20).

soit

$$\sigma(\mathbf{k}_c + \mathbf{k}, \mathbf{q}'_c, R) = \frac{\epsilon - \xi^2(q + p^2/(2q_c))^2}{\tau} + O(\epsilon^2) + O(q^3) + O(p^5), \quad (3.18)$$

où la *longueur caractéristique* ξ s'identifie à celle calculée dans le cas quasi unidimensionnel. On en déduit l'expression à l'ordre le plus bas de la courbe neutre

$$\epsilon_0(q_c + q, p_c + p, \mathbf{q}'_c) = \xi^2 q^2 + \xi^2 p^4 / (2q_c)^2 + O(q^3) + O(p^5), \quad (3.19)$$

et en conséquence le domaine des nombres d'ondes actifs proches de q_c représenté par l'ellipse de la figure 3.2

$$\begin{array}{ll} q \sim \xi^{-1} \epsilon^{1/2} & \text{correspondant à } l_x = q^{-1} \sim \xi \epsilon^{-1/2} \text{ dans la direction } x, \\ p \sim (q_c / \xi)^{1/2} \epsilon^{1/4} & \text{correspondant à } l_y = p^{-1} \sim (\xi / q_c)^{1/2} \epsilon^{-1/4} \text{ dans la direction } y \end{array} \quad (3.20)$$

où l'on a aussi écrit les longueurs de cohérence associées.

3.2 Équations d'enveloppe d'instabilités stationnaires

Nous reprenons les hypothèses posées dans la section précédente, considérant des systèmes présentant une *instabilité stationnaire sur-critique* et une *famille continue ou semi-continue de modes actifs* contenant en particulier le mode critique. Le (ou les) paramètre(s) continu(s) pertinents sont un (ou des) nombre(s) d'onde correspondant à un passage en modes de Fourier. C'est justement une technique de *transformée de Fourier inverse* qui va nous permettre d'obtenir l'équation d'enveloppe.

3.2.1 Systèmes quasi unidimensionnels « symétriques » : instabilité non structurante

Introduction de l'enveloppe

Soit un système bidimensionnel xz dans lequel les modes actifs ont la forme (3.1),

$$V_1(q, \mathbf{q}'_c, R; x, z) = \exp(iqx) \tilde{V}_1(q, \mathbf{q}'_c, R; z). \quad (3.21)$$

On notera pour simplifier¹

$$V_1(\mathbf{q}) = V_1(q, \mathbf{q}'_c, R_c; x, z) \quad (3.22)$$

c'est-à-dire que \mathbf{q} est maintenant une notation générique pour désigner les nombres (q, \mathbf{q}'_c) , où q est le nombre d'onde dans la direction x , proche de sa valeur critique 0 puisque l'instabilité est supposée non structurante. Poursuivant l'analyse développée section 2.1, nous écrivons la partie active d'une **solution faiblement non linéaire** (2.11)

$$V = V_a + V_\perp \quad (3.23)$$

sous la forme d'un « paquet d'ondes »

$$V_a = \int_{q \in \mathcal{V}_0} \widehat{A}(q) \exp(iqx) \widetilde{V}_1(q, \mathbf{q}'_c, R; z) dq = \int_{q \in \mathcal{V}_0} \widehat{A}(q) V_1(\mathbf{q}) dq \quad (3.24)$$

Dans cette expression intégrale, qui peut correspondre en fait à une somme de Riemann discrète dans le cas d'un système faiblement confiné², \mathcal{V}_0 désigne le voisinage de zéro défini par (3.6), et le chapeau permettra de distinguer de l'enveloppe introduite plus bas; l'amplitude correspondante $\widehat{A}(q)$ dépend en général du temps, mais nous ne rappelons pas cette dépendance pour ne pas alourdir les notations. Remarquons aussi que, d'après la règle de conjugaison des modes propres

$$\forall q \in \mathbb{R}, \quad V_1(-q, \mathbf{q}'_c, R_c; x, z) = V_1^*(q, \mathbf{q}'_c, R_c; x, z) \quad (3.25)$$

provenant de ce que les équations du problème linéarisé sont à coefficients réels, on doit respecter la règle de conjugaison des amplitudes

$$\forall q \in \mathcal{V}_0, \quad \widehat{A}(-q) = \widehat{A}^*(q) \quad (3.26)$$

pour que V_a donné par (3.24) soit réel.

Par continuité des modes propres linéaires, on a, pour q dans \mathcal{V}_0 ,

$$\widetilde{V}_1(q, \mathbf{q}'_c, R) = \widetilde{V}_1(0, \mathbf{q}'_c, R_c) + O(\epsilon^{1/2}) \quad (3.27)$$

et donc³

$$V_a = \int_{q \in \mathcal{V}_0} \widehat{A}(q) \exp(iqx) V_1(\mathbf{q}_c) dq + O(\epsilon^{1/2} \widehat{A}) = A(x) V_1(\mathbf{q}_c) + O(\epsilon^{1/2} A) \quad (3.28)$$

en introduisant l'**enveloppe lentement variable**

$$A(x) = \int_{q \in \mathcal{V}_0} \widehat{A}(q) \exp(iqx) dq \quad (3.29)$$

réelle puisque le mode $V_1(\mathbf{q}_c)$ correspondant à $q = q_c = 0$ est réel d'après (3.25).

Équations d'amplitudes de départ

Considérant un système « symétrique » où la propriété (2.17) est vérifiée, les équations d'amplitudes des modes actifs (2.19) prennent, en notations condensée, la forme

$$\partial_t \widehat{A}(q) = \sigma(\mathbf{q}, R) \widehat{A}(q) + \langle N_2(V_a | V_\perp) + N_3(V_a, V_a, V_a), U_1(\mathbf{q}) \rangle + O(A^4) \quad (3.30)$$

¹Le passage de R à R_c est sans conséquence pour le calcul de l'équation d'enveloppe à l'ordre le plus bas effectué ici, pour les mêmes raisons que celles qui s'appliquent au calcul de l'équation d'amplitude et qui ont été expliquées section 2.1.7.

²Elle est typiquement de pas $\delta q = 2\pi/L$ où L est la longueur du système dans la direction x .

³Dans beaucoup de systèmes présentant une instabilité non structurante on a une symétrie de parité sous $x \mapsto -x$; alors la $O(\epsilon^{1/2})$ dans (3.27), provenant d'un $O(q)$, peut être remplacé par un $O(q^2) = O(\epsilon)$. En conséquence des $O(\epsilon A)$ et $O(\epsilon A^2)$ apparaissent dans (3.28) et (3.33).

Calcul des termes linéaires de l'équation d'enveloppe

En utilisant le développement (3.4) du taux de croissance $\sigma(\mathbf{q}, R)$, on obtient pour les termes linéaires

$$\partial_t \widehat{A}(q) = \frac{\epsilon - \xi^2 q^2}{\tau} \widehat{A}(q) + O(\epsilon^2 A) .$$

Effectuons une *transformée de Fourier inverse* de cette équation en la multipliant par $\exp(iqx)$ puis en intégrant sur $q \in \mathcal{V}_0$. Il vient, compte tenu de la définition (3.29) de l'enveloppe $A(x)$, et de la *règle de Fourier* qui en découle,

$$\partial_x^m A(x) = \int_{q \in \mathcal{V}_0} (iq)^m \widehat{A}(q) \exp(iqx) dq , \quad (3.31)$$

l'équation

$$\partial_t A(x) = \frac{\epsilon + \xi^2 \partial_x^2}{\tau} A(x) + O(\epsilon^2 A) . \quad (3.32)$$

Calcul des termes non linéaires de l'équation d'enveloppe

Compte tenu de l'hypothèse de symétrie (2.17), l'*élimination des modes passifs* à l'ordre quadratique conduit d'après (2.18) à

$$V_{\perp} = \int_{q_1 \in \mathcal{V}_0} \int_{q_2 \in \mathcal{V}_0} \widehat{A}(q_1) \widehat{A}(q_2) V_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) dq_1 dq_2 = A^2(x) V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c) + O(\epsilon^{1/2} A^2) \quad (3.33)$$

en faisant usage des notations (2.25). D'autre part, compte tenu de (3.24), le terme non linéaire intervenant dans l'équation d'amplitude (3.30) s'écrit

$$\begin{aligned} & N_2(V_a | V_{\perp}) + N_3(V_a, V_a, V_a) \\ &= \int_{q_1 \in \mathcal{V}_0} \int_{q_2 \in \mathcal{V}_0} \int_{q_3 \in \mathcal{V}_0} [N_2(V_1(\mathbf{q}_1) | V_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)) + N_3(V_1(\mathbf{q}_1), V_1(\mathbf{q}_2), V_1(\mathbf{q}_3))] \widehat{A}(q_1) \widehat{A}(q_2) \widehat{A}(q_3) dq_1 dq_2 dq_3 . \end{aligned}$$

La dépendance en x du vecteur entre crochets étant en $\exp[i(q_1 + q_2 + q_3)x]$, alors que celle du vecteur adjoint $U_1(q, \mathbf{q}')$ est en $\exp(iqx)$, le produit scalaire entre ces deux vecteurs va, à cause de l'intégrale correspondante sur x , sélectionner les triplets résonants de nombres d'ondes tels que

$$q_1 + q_2 + q_3 = q .$$

Nous traduisons cette sélection par l'usage de la distribution de Dirac δ , qui n'est vraiment une distribution que dans le cas non confiné où les intégrales sont vraiment des intégrales⁴. Ainsi le terme non linéaire de l'équation d'amplitude (3.30) s'écrit

$$- \int_{q_1 \in \mathcal{V}_0} \int_{q_2 \in \mathcal{V}_0} \int_{q_3 \in \mathcal{V}_0} \delta(q - q_1 - q_2 - q_3) h(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \widehat{A}(q_1) \widehat{A}(q_2) \widehat{A}(q_3) dq_1 dq_2 dq_3 , \quad (3.34)$$

où l'on a introduit, par analogie avec le coefficient de saturation (2.28),

$$h(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = - \langle N_2(V_1(\mathbf{q}_1) | V_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)) + N_3(V_1(\mathbf{q}_1), V_1(\mathbf{q}_2), V_1(\mathbf{q}_3)), U_1(q_1 + q_2 + q_3, \mathbf{q}') \rangle . \quad (3.35)$$

En général ce coefficient dépend continûment des nombres d'ondes q_1, q_2, q_3 , et peut donc, à l'ordre le plus bas, être approximé par sa valeur lorsque $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, soit

$$h(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c) = - \langle N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c)) + N_3(V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c)), U_1(\mathbf{q}_c) \rangle \quad (3.36)$$

⁴Le lecteur peu familier des distributions peut considérer plutôt le cas faiblement confiné périodique où les nombres d'ondes varient dans $2\pi\mathbb{Z}/L$. Alors l'écriture (3.34) peut être pensée comme une double somme sur q_1 et q_2 , q_3 étant choisi égal à $q_3(q_1, q_2, q) = q - q_1 - q_2$.

qui n'est autre que le coefficient de saturation g (2.28). Ainsi à l'ordre le plus bas le terme non linéaire (3.34) de l'équation d'amplitude (3.30) vaut

$$-g \int_{q_1 \in \mathcal{V}_0} \int_{q_2 \in \mathcal{V}_0} \int_{q_3 \in \mathcal{V}_0} \delta(q - q_1 - q_2 - q_3) \widehat{A}(q_1) \widehat{A}(q_2) \widehat{A}(q_3) dq_1 dq_2 dq_3 .$$

Appliquant la même **transformée de Fourier inverse** qu'aux termes linéaires, on obtient

$$\begin{aligned} & -g \int_{q \in \mathcal{V}_0} \int_{q_1 \in \mathcal{V}_0} \int_{q_2 \in \mathcal{V}_0} \int_{q_3 \in \mathcal{V}_0} \delta(q - q_1 - q_2 - q_3) \exp[i(q_1 + q_2 + q_3)x] \widehat{A}(q_1) \widehat{A}(q_2) \widehat{A}(q_3) dq dq_1 dq_2 dq_3 \\ = & -gA^3(x) \end{aligned} \quad (3.37)$$

compte tenu de la définition (3.29) de l'enveloppe. Additionnant ce terme non linéaire aux termes linéaires (3.32), on obtient l'**équation d'enveloppe d'une instabilité non structurante**

$$\partial_t A(x) = \frac{\epsilon + \xi^2 \partial_x^2}{\tau} A(x) - gA^3(x) \quad (3.38)$$

à des termes en $\epsilon^2 A$ et $\epsilon^{1/2} A^3$ près. En général on introduit

$$\boxed{\gamma = \tau g} \quad (3.39)$$

qui est strictement positif dans le cas intéressant d'une **bifurcation sur-critique**, et on multiplie l'équation précédente par le temps caractéristique τ pour obtenir

$$\boxed{\tau \partial_t A(x) = \epsilon A(x) + \xi^2 \partial_x^2 A(x) - \gamma A^3(x)} . \quad (3.40)$$

Si $A(x)$ est indépendant de x , on retrouve exactement l'équation d'amplitude (2.31), ce qui n'est pas étonnant puisque alors $\widehat{A}(q)$ est indépendant de q et égal à A , i.e. la partie active de la solution faiblement non linéaire se réduit à $V_a = AV_1(\mathbf{q}_c)$. Notons aussi que le seul terme nouveau dans l'équation d'enveloppe (3.40) par rapport à l'équation d'amplitude (2.31) est le *terme de diffusion* en $\partial_x^2 A$, dont le calcul est simple (il suffit d'effectuer un développement du taux de croissance (3.4) ou de la courbe neutre (3.5) vis-à-vis de q); ainsi le terme non linéaire est inchangé par rapport à (2.31). Avant d'exploiter (3.40), il convient de montrer que l'équation d'enveloppe d'une instabilité structurante est de la même forme. Le lecteur confiant pourra sauter la démonstration correspondante pour se reporter directement à (3.47) et (3.58).

3.2.2 Systèmes quasi unidimensionnels « symétriques » : instabilité structurante

Introduction de l'enveloppe

Un système bidimensionnel xz présentant une instabilité structurante caractérisée par un nombre d'onde critique $q_c \neq 0$ en x possède des modes actifs définis soit par

$$\mathbf{q} \in \mathcal{V}^+ \iff \mathbf{q} = (q_c + q, \mathbf{q}'_c) \text{ avec } q \in \mathcal{V}_0 ; \text{ alors } V_1(\mathbf{q}) = \exp[i(q_c + q)x] \widetilde{V}_1(\mathbf{q}) ; \quad (3.41)$$

soit par

$$\mathbf{q} \in \mathcal{V}^- \iff \mathbf{q} = (-q_c + q, \mathbf{q}'_c) \text{ avec } q \in \mathcal{V}_0 ; \text{ alors } V_1(\mathbf{q}) = \exp[i(-q_c + q)x] \widetilde{V}_1(\mathbf{q}) . \quad (3.42)$$

De plus les complexes conjugués des modes actifs correspondants au premier cas sont généralement les modes actifs correspondants au second cas :

$$\forall q \in \mathcal{V}_0 , \quad V_1^*(q_c + q, \mathbf{q}'_c) = V_1(-q_c - q, \mathbf{q}'_c) . \quad (3.43)$$

Respectant cette même relation de conjugaison sur les amplitudes correspondantes en posant

$$\forall q \in \mathcal{V}_0 , \quad \widehat{A}^*(q_c + q, \mathbf{q}'_c) = \widehat{A}(-q_c - q, \mathbf{q}'_c) , \quad (3.44)$$

introduisant

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \cup \mathcal{V}^- , \quad (3.45)$$

nous pouvons écrire une superposition quelconque (« paquet d'ondes ») de modes actifs sous la forme

$$V_a = \int_{\mathbf{q} \in \mathcal{V}^+} \widehat{A}(\mathbf{q}) V_1(\mathbf{q}) dq + c.c. = \int_{\mathbf{q} \in \mathcal{V}} \widehat{A}(\mathbf{q}) V_1(\mathbf{q}) dq . \quad (3.46)$$

Utilisant toujours la propriété de continuité des modes actifs

$$V_1(q_c + q, \mathbf{q}'_c) = \exp(iqx) V_1(\mathbf{q}_c) + O(\epsilon^{1/2}) ,$$

on peut maintenant écrire que

$$V_a = A(x) V_1(\mathbf{q}_c) + c.c. + O(\epsilon^{1/2} A) \quad (3.47)$$

où l'*enveloppe lentement variable* est

$$A(x) = \int_{\mathbf{q} \in \mathcal{V}^+} \widehat{A}(\mathbf{q}) \exp(iqx) dq \quad (3.48)$$

typiquement complexe.

Équations d'amplitudes de départ

Les équations d'amplitudes des modes actifs prennent, compte tenu de l'hypothèse de symétrie (2.17), la même forme que (3.30),

$$\partial_t \widehat{A}(\mathbf{q}) = \sigma(\mathbf{q}, R) \widehat{A}(\mathbf{q}) + \langle N_2(V_a | V_\perp) + N_3(V_a, V_a, V_a), U_1(\mathbf{q}) \rangle + O(A^4) . \quad (3.49)$$

Calcul des termes linéaires de l'équation d'enveloppe

Similairement à ce qui a été fait dans le cas non structurant, l'injection du développement (3.4) dans (3.49) puis la *transformée de Fourier inverse* effectuée en multipliant par $\exp(iqx)$ puis en intégrant sur $\mathbf{q} \in \mathcal{V}^+$ conduit à

$$\partial_t A(x) = \frac{\epsilon + \xi^2 \partial_x^2}{\tau} A(x) + O(\epsilon^2 A) . \quad (3.50)$$

Calcul des termes non linéaires de l'équation d'enveloppe

L'*élimination des modes passifs*, compte tenu de la propriété de symétrie (2.17), donne

$$\begin{aligned} V_\perp &= \int_{\mathbf{q}_1 \in \mathcal{V}} \int_{\mathbf{q}_2 \in \mathcal{V}} \widehat{A}(\mathbf{q}_1) \widehat{A}(\mathbf{q}_2) V_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) dq_1 dq_2 \\ V_\perp &= |A(x)|^2 V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c^*) + [A^2(x) V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c) + c.c.] + O(\epsilon^{1/2} A^2) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Le terme non linéaire intervenant dans l'équation d'amplitude (3.49) s'écrit alors

$$\begin{aligned} &N_2(V_a | V_\perp) + N_3(V_a, V_a, V_a) \\ &= \int_{\mathbf{q}_1 \in \mathcal{V}} \int_{\mathbf{q}_2 \in \mathcal{V}} \int_{\mathbf{q}_3 \in \mathcal{V}} [N_2(V_1(\mathbf{q}_1) | V_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)) + N_3(V_1(\mathbf{q}_1), V_1(\mathbf{q}_2), V_1(\mathbf{q}_3))] \widehat{A}(\mathbf{q}_1) \widehat{A}(\mathbf{q}_2) \widehat{A}(\mathbf{q}_3) dq_1 dq_2 dq_3 . \end{aligned}$$

Le produit scalaire du vecteur entre crochets avec $U_1(\mathbf{q})$ pour $\mathbf{q} = (q, \mathbf{q}'_c) \in \mathcal{V}^+$ est non nul seulement si, parmi $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$, deux nombres sont près de $\mathbf{q}_c = (q_c, \mathbf{q}'_c)$ et un près de $\mathbf{q}_c^* = (-q_c, \mathbf{q}'_c)$, de sorte que le nombre d'onde en x total soit proche de

$$q_c + q_c - q_c = q_c .$$

Une première contribution à (3.49), obtenue si $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ est proche de $(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c^*)$, vaut

$$-\int_{\mathbf{q}_1 \in \mathcal{V}^+} \int_{\mathbf{q}_2 \in \mathcal{V}^+} \int_{\mathbf{q}_3 \in \mathcal{V}^-} \delta(q - q_1 - q_2 - q_3) h(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \widehat{A}(\mathbf{q}_1) \widehat{A}(\mathbf{q}_2) \widehat{A}(\mathbf{q}_3) dq_1 dq_2 dq_3, \quad (3.52)$$

où

$$h(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = \langle N_2(V_1(\mathbf{q}_1) | V_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)) + N_3(V_1(\mathbf{q}_1), V_1(\mathbf{q}_2), V_1(\mathbf{q}_3)), U_1(q_c + q_1 + q_2 + q_3, \mathbf{q}'_c) \rangle \quad (3.53)$$

peut être approximé par $h(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c^*)$. La *transformée de Fourier inverse* de (3.52) donne donc à l'ordre le plus bas le terme, proportionnel à $-h(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c^*)$,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{q} \in \mathcal{V}^+} \int_{\mathbf{q}_1 \in \mathcal{V}^+} \int_{\mathbf{q}_2 \in \mathcal{V}^+} \int_{\mathbf{q}_3 \in \mathcal{V}^-} \delta(q - q_1 - q_2 - q_3) \exp[i(q_1 + q_2 + q_3)x] \widehat{A}(\mathbf{q}_1) \widehat{A}(\mathbf{q}_2) \widehat{A}(\mathbf{q}_3) dq dq_1 dq_2 dq_3 \\ = & \int_{\mathbf{q} \in \mathcal{V}^+} \int_{\mathbf{q}_1 \in \mathcal{V}^+} \int_{\mathbf{q}_2 \in \mathcal{V}^+} \int_{\tilde{\mathbf{q}}_3 \in \mathcal{V}^+} \delta(q - q_1 - q_2 + \tilde{q}_3) \exp[i(q_1 + q_2 - \tilde{q}_3)x] \widehat{A}(\mathbf{q}_1) \widehat{A}(\mathbf{q}_2) \widehat{A}^*(\tilde{\mathbf{q}}_3) dq dq_1 dq_2 d\tilde{q}_3 \\ = & A^2(x) A^*(x) \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable

$$\mathbf{q}_3 = (-q_c + q_3, \mathbf{q}'_c) \in \mathcal{V}^- \mapsto \tilde{\mathbf{q}}_3 = (q_c + \tilde{q}_3, \mathbf{q}'_c) = (q_c - q_3, \mathbf{q}'_c) \in \mathcal{V}^+,$$

et en utilisant les définitions (3.44) et (3.48).

De même la contribution à (3.49), obtenue si $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ est proche de $(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c^*, \mathbf{q}_c)$, donne à l'ordre le plus bas

$$-h(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c^*, \mathbf{q}_c) \int_{\mathbf{q}_1 \in \mathcal{V}^+} \int_{\mathbf{q}_2 \in \mathcal{V}^-} \int_{\mathbf{q}_3 \in \mathcal{V}^+} \delta(q - q_1 - q_2 - q_3) \widehat{A}(\mathbf{q}_1) \widehat{A}(\mathbf{q}_2) \widehat{A}(\mathbf{q}_3) dq_1 dq_2 dq_3,$$

puis après transformée de Fourier inverse

$$-h(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c^*, \mathbf{q}_c) A(x) A^*(x) A(x); \quad (3.54)$$

enfin la contribution obtenue si $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ est proche de $(\mathbf{q}_c^*, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c)$, donne

$$-h(\mathbf{q}_c^*, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c) \int_{\mathbf{q}_1 \in \mathcal{V}^-} \int_{\mathbf{q}_2 \in \mathcal{V}^+} \int_{\mathbf{q}_3 \in \mathcal{V}^+} \delta(q - q_1 - q_2 - q_3) \widehat{A}(\mathbf{q}_1) \widehat{A}(\mathbf{q}_2) \widehat{A}(\mathbf{q}_3) dq_1 dq_2 dq_3,$$

puis

$$-h(\mathbf{q}_c^*, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c) A^*(x) A^2(x). \quad (3.55)$$

La somme de ces trois contributions vaut

$$-g |A(x)|^2 A^2(x) \quad (3.56)$$

à condition de poser

$$g = h(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c^*) + h(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c^*, \mathbf{q}_c) + h(\mathbf{q}_c^*, \mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c),$$

produit scalaire avec $U_1(\mathbf{q}_c)$ de

$$\begin{aligned} & N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c^*)) + N_3(V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c^*)) \\ + & N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_2(\mathbf{q}_c^*, \mathbf{q}_c)) + N_3(V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c^*), V_1(\mathbf{q}_c)) \\ + & N_2(V_1(\mathbf{q}_c^*) | V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c)) + N_3(V_1(\mathbf{q}_c^*), V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c)) \\ = & N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*)) + N_2(V_1(\mathbf{q}_c^*) | V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c)) + N_3(V_1(\mathbf{q}_c), V_1(\mathbf{q}_c) | V_1(\mathbf{q}_c^*)); \end{aligned}$$

on reconnaît exactement le coefficient de saturation g défini en (2.29).

Additionnant les termes linéaires (3.50) au terme non linéaire (3.56), on obtient l'*équation d'enveloppe d'une instabilité structurante sur-critique*

$$\partial_t A(x) = \frac{\epsilon + \xi^2 \partial_x^2}{\tau} A(x) - g |A(x)|^2 A^2(x) \quad (3.57)$$

à l'ordre le plus bas, soit avec la notation $\gamma = \tau g$ (3.39)

$$\boxed{\tau \partial_t A(x) = \epsilon A(x) + \xi^2 \partial_x^2 A(x) - \gamma |A(x)|^2 A(x)} . \quad (3.58)$$

Naturellement, si $A(x)$ est indépendant de x , on retrouve l'équation d'amplitude (2.31). On a même quelque chose de plus remarquable : les termes non linéaires sont identiques dans l'équation d'amplitude et l'équation d'enveloppe⁵. Par analogie avec des modèles développés par différents physiciens dont Ginzburg et Landau pour décrire des *transitions de phase* (notamment la transition conducteur \leftrightarrow supraconducteur), l'équation d'enveloppe (3.58) (et ses généralisations en dimension plus élevée) est aussi appelée *équation de Ginzburg-Landau*⁶. Dans ce contexte le paramètre de contrôle principal est la température T (ainsi $\epsilon = (T_c - T)/T_c$ où T_c est la température de la transition de phase), tandis que l'enveloppe A apparaît comme un **paramètre d'ordre**, $A = 0$ correspondant à une phase (par exemple la phase conductrice) et $A \neq 0$ à l'autre phase impliquée dans la transition (par exemple la phase supraconductrice). Cette analogie entre les transitions de phase et les instabilités a conduit certains auteurs à utiliser le terme « paramètre d'ordre » pour des instabilités, cf. le titre de la revue Newell et al. (1993) par exemple.

3.2.3 Existence d'une énergie libre et dynamique relaxationnelle

Cette analogie avec les transitions de phase est confortée par le fait que la dynamique spatio-temporelle de (3.58) peut être décrite par un formalisme « énergétique » généralisant celui introduit section 2.1.7⁷. Pour cela, dans le *cas réel d'une instabilité non structurante*, on introduit la **fonctionnelle énergie libre de Ginzburg-Landau**

$$\mathcal{F} = \int \left[-\frac{\epsilon}{2} A^2 + \frac{\xi^2}{2} (\partial_x A)^2 + \frac{\gamma}{4} A^4 \right] dx , \quad (3.59)$$

pour constater essentiellement que, si $A = A(x,t) \in \mathbb{R}$ évolue suivant (3.58), alors au cours du temps

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \int \left[-\epsilon A \partial_t A + \xi^2 (\partial_x A) (\partial_t \partial_x A) + \gamma A^3 \partial_t A \right] dx \\ &= \int \left[-\epsilon A \partial_t A - \xi^2 (\partial_x^2 A) (\partial_t A) + \gamma A^3 \partial_t A \right] dx \\ \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \int \left[-\tau (\partial_t A)^2 \right] dx \leq 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

en faisant usage d'une intégration par partie pour passer de la première à la deuxième ligne, supposant que les termes de bords disparaissent ; ceci est bien vrai dans le cas d'un système faiblement confiné avec conditions limites périodiques. Ainsi la dynamique spatio-temporelle de (3.58) est purement **relaxationnelle**.

Cette propriété est aussi valable dans le *cas complexe d'une instabilité structurante*, en utilisant la fonctionnelle énergie libre

$$\mathcal{F} = \int \left[-\frac{\epsilon}{2} |A|^2 + \frac{\xi^2}{2} |\partial_x A|^2 + \frac{\gamma}{4} |A|^4 \right] dx \quad (3.61)$$

⁵Cette règle simple, déjà observée dans le cas d'une instabilité non structurante - notons d'ailleurs que si $A(x)$ est réel (3.58) se réduit à l'équation d'enveloppe d'une instabilité non structurante (3.40) -, souffre des exceptions lorsque les modèles présentent une structure mathématique plus compliquée que celle étudiée ici, basée sur une seule équation aux dérivées partielles (1.3). Par exemple en hydrodynamique dans un domaine multiplement connexe il faut écrire une équation d'évolution différente pour l'écoulement moyen, et ceci conduit à des termes non linéaires différents, cf. Plaut (2003).

⁶Mentionnons que Ginzburg a attendu ses 87 ans pour avoir son prix Nobel de physique en 2003 (mieux vaut tard que jamais!), alors que son collègue Landau (1908-1968) l'a eu en 1962.

⁷On sait bien que les lois de la thermodynamique assurent l'existence d'énergies libres pour des transitions de phase... et en conséquence la nature relaxationnelle i.e. « sans surprise » de la dynamique. Ainsi quand on chauffe suffisamment un matériau supraconducteur, on est sûr de le faire transiter entièrement vers l'état conducteur!...

qui est à valeurs réelles. Si $A = A(x, t) \in \mathbb{C}$ évolue suivant (3.58), il vient en effet, avec la même technique d'intégration par partie que ci-dessus,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \frac{1}{2} \int \left\{ -\epsilon(A\partial_t A^* + A^*\partial_t A) + \xi^2[(\partial_x A)(\partial_t \partial_x A^*) + (\partial_x A^*)(\partial_t \partial_x A)] + \gamma|A|^2[A(\partial_t A^*) + A^*(\partial_t A)] \right\} dx \\ &= \operatorname{Re} \int \left[-\epsilon A\partial_t A^* - \xi^2(\partial_x^2 A)(\partial_t A^*) + \gamma|A|^2 A\partial_t A^* \right] dx \\ \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= \int \left[-\tau|\partial_t A|^2 \right] dx \leq 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

3.2.4 Application : stabilité secondaire de la solution critique

L'équation d'enveloppe (3.58) va enfin nous permettre d'étudier la stabilité de la solution critique

$$A = \sqrt{\epsilon/\gamma} \quad (3.63)$$

vis-à-vis de perturbations générales, c'est-à-dire de discuter de sa **stabilité secondaire**. Les seules perturbations susceptibles d'être amplifiées près du seuil d'instabilité, pour $0 < \epsilon \ll 1$, sont bien sûr des perturbations basées sur des modes actifs, puisque les modes passifs sont rapidement amortis près du seuil. Ces perturbations dangereuses sont donc décrites par des perturbations de l'enveloppe A ; posant en conséquence

$$A(x) = \sqrt{\epsilon/\gamma} + a(x) \quad (3.64)$$

avec $a \ll \sqrt{\epsilon/\gamma}$, nous obtenons par injection dans (3.58) l'équation d'évolution de la perturbation :

$$\tau\partial_t a = -2\epsilon a + \xi^2\partial_x^2 a \quad \text{dans le cas réel (instabilité non structurante),} \quad (3.65)$$

$$\tau\partial_t a = -\epsilon(a + a^*) + \xi^2\partial_x^2 a \quad \text{dans le cas complexe (instabilité structurante).} \quad (3.66)$$

Les modes normaux du problème réel prennent la forme

$$a = \rho \exp(iQx + st/\tau); \quad (3.67)$$

en effet par injection de cet ansatz dans (3.65) on obtient

$$s = -(2\epsilon + \xi^2 Q^2) \quad (3.68)$$

qui indique la **stabilité secondaire de la solution critique au voisinage du seuil**, ou encore une exclusion entre les modes actifs justifiant a posteriori l'utilisation de l'équation d'amplitude (2.31).

Cette propriété de stabilité s'étend au cas du problème complexe (3.66), que l'on résoudra dans un cadre plus général section 3.2.7; on observe en fait une stabilité marginale, cf. l'existence de deux valeurs propres

$$s_+ = -\xi^2 Q^2 \quad \text{et} \quad s_- = -(2\epsilon + \xi^2 Q^2)$$

dont la première, qui s'annule lorsque $Q = 0$, correspond au mode d'invariance de phase identifié section 2.1.7.

3.2.5 Application : parois et fronts

Dans le cas d'une **instabilité non structurante** telle celle d'un afficheur, l'équation d'enveloppe correspondante (3.40)

$$\tau\partial_t A = \epsilon A + \xi^2\partial_x^2 A - \gamma A^3, \quad (3.69)$$

qui peut être considérée comme une **équation de diffusion non linéaire**, admet comme solutions stationnaires les deux solutions homogènes

$$A_{\pm} = \pm\sqrt{\epsilon/\gamma}, \quad (3.70)$$

qui sont solutions de l'équation d'amplitude correspondante (2.31), mais aussi⁸

$$A(x) = \pm\sqrt{\epsilon/\gamma} \tanh\left(\sqrt{\epsilon/2}(x - x_0)/\xi\right) \quad (3.71)$$

⁸Ces solutions se calculent en posant $A = A_0 \tanh(\lambda(x - x_0))$ puis en réglant A_0 et λ pour satisfaire (3.69).

correspondant à une *paroi de domaine* reliant les deux solutions (3.70), dont nous avons pressenti l'existence. Une telle paroi ne saurait disparaître puisque les deux solutions (3.70) sont équivalentes à cause de la symétrie $A \mapsto -A$ possédée par l'équation (3.69)... symétrie conséquence d'une symétrie du système physique lui-même, bien sûr, à savoir la symétrie $n_z \mapsto -n_z$ dans le cas d'un afficheur. Puisque l'existence et la stabilité d'une telle paroi est assurée par une propriété de symétrie du système c'est-à-dire une propriété « géométrique » ou « topologique », on désigne une telle structure comme un « *défaut topologique* ». La connaissance de son profil (3.71) nous permet de faire une prédiction concernant la largeur spatiale l de la paroi, c'est-à-dire la région où $A(x)$ donnée par (3.71) s'éloigne des valeurs limites (3.70). Nous obtenons

$$l = \xi \epsilon^{-1/2} \quad (3.72)$$

comme déjà intuité section 3.1.1, qui donne une signification physique claire au terme « *longueur de cohérence* ». De plus nous voyons que, si la largeur de la paroi diverge au seuil de l'instabilité, elle décroît rapidement quand ϵ augmente. Ceci suggère que si la tension appliquée à un afficheur est suffisamment élevée, des parois éventuelles entre domaines $n_z > 0$ ou < 0 seront très localisées, et donc n'altéreront que très peu l'homogénéité de transparence ou d'opacité du « pixel » concerné.

Mentionnons pour terminer que ces parois méritent le nom de *fronts* dans des systèmes où la symétrie $A \mapsto -A$ respectée par l'équation d'enveloppe (3.69) ne l'est plus, et l'on est donc conduit à utiliser

$$\tau \partial_t A = \epsilon A + \xi^2 \partial_x^2 A + \eta A^2 - \gamma A^3 . \quad (3.73)$$

La nouvelle énergie libre correspondante est

$$\mathcal{F} = \int \left[-\frac{\epsilon}{2} A^2 + \frac{\xi^2}{2} (\partial_x A)^2 - \frac{\eta}{3} A^3 + \frac{\gamma}{4} A^4 \right] dx \quad (3.74)$$

qui admet maintenant deux minima dissymétriques, l'un ayant une énergie moins basse que l'autre. En conséquence un front entre les deux solutions homogènes correspondantes se déplace de sorte que l'« état » métastable disparaisse au profit de l'« état » stable ; les calculs correspondants, ainsi que des généralisations intéressantes, sont présentés par exemple dans Hakim (1998).

3.2.6 Propriétés d'échelles de l'équation d'enveloppe

Inspiré par les solutions que nous venons de décrire, et poursuivant la démarche de la section 2.1.7, nous pouvons adopter à nouveau l'échelle lente de temps

$$t = \epsilon^{-1} t' \quad (3.75)$$

de sorte que $\partial_t = \epsilon \partial_{t'}$, et l'échelle d'enveloppe

$$A = \epsilon^{1/2} A' , \quad (3.76)$$

que nous complétons maintenant par l'échelle lente de longueur (3.72)

$$x = \epsilon^{-1/2} x' \quad (3.77)$$

de sorte que $\partial_x = \epsilon^{1/2} \partial_{x'}$. Ces changements de variables transforment après division par $\epsilon^{3/2}$ l'équation (3.58) en

$$\tau \partial_{t'} A' = A' + \xi^2 \partial_{x'}^2 A' - \gamma |A'|^2 A' \quad (3.78)$$

où ϵ n'apparaît plus. Ceci montre que tous les termes de (3.58) sont du même ordre $\epsilon^{3/2}$; les *lois d'échelles* (3.75), (3.76) et (3.77) posées a priori constituent en fait le point de départ d'une méthode alternative de calcul de l'équation d'enveloppe basée sur des *développements multi-échelles*, méthode que nous n'avons pas la place d'exposer ici (voir à ce sujet Manneville 1991 ou Hakim 1998).

3.2.7 Application : instabilité secondaire d'Eckhaus

L'équation d'enveloppe (3.58)

$$\tau \partial_t A = \epsilon A + \xi^2 \partial_x^2 A - \gamma |A|^2 A \quad (3.79)$$

d'une *instabilité structurante* telle celle obtenue en convection thermique présente des solutions périodiques de la forme

$$A = \sqrt{(\epsilon - \xi^2 q^2)/\gamma} \exp(iqx) \quad (3.80)$$

à condition d'être effectivement au dessus de la courbe neutre correspondante (3.5)

$$\epsilon > \epsilon_0(q) = \xi^2 q^2 . \quad (3.81)$$

D'après l'expression (3.47), de telles solutions correspondent à des rouleaux de nombre d'onde $q_c + q$ c'est-à-dire de période légèrement différente de la période critique λ_c dans le cas de la thermoconvection. Afin d'examiner la stabilité secondaire de ces structures, injectons l'ansatz de perturbation

$$A = \sqrt{(\epsilon - \xi^2 q^2)/\gamma} \exp(iqx) + a \quad (3.82)$$

dans (3.79) et linéarisons par rapport à a . Nous obtenons

$$\tau \partial_t a = (2\xi^2 q^2 - \epsilon)a + \xi^2 \partial_x^2 a + \exp(2iqx) (\xi^2 q^2 - \epsilon)a^* , \quad (3.83)$$

ce qui suggère de poser

$$a = \exp(iqx) \alpha ; \quad (3.84)$$

après injection dans (3.83) et simplification par $\exp(iqx)$, nous obtenons en effet

$$\tau \partial_t \alpha = (\xi^2 q^2 - \epsilon)(\alpha + \alpha^*) + \xi^2 (\partial_x^2 \alpha + 2iq \partial_x \alpha) . \quad (3.85)$$

Les modes normaux de cette équation peuvent être écrits sous la forme

$$\alpha = \alpha_+ \exp(iQx + st/\tau) + \alpha_- \exp(-iQx + s^*t/\tau) \quad (3.86)$$

où $Q \in \mathbb{R}^*$ est un *nombre d'onde de modulation*. Le cas de perturbations homogènes (« $Q = 0$ ») se traite à part, en passant en parties réelle et imaginaire suivant $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$, et conduit à un mode neutre lié à l'invariance de phase ($\alpha \in i\mathbb{R}$) et à un mode amorti ($\alpha \in \mathbb{R}$). Dans le cas générique $Q \in \mathbb{R}^*$, on obtient, par insertion de (3.86) dans (3.85), après identification des coefficients de $\exp(\pm iQx)$ et simplifications, le système

$$\begin{cases} s\alpha_+ &= [\xi^2(q^2 - 2qQ - Q^2) - \epsilon]\alpha_+ + (\xi^2 q^2 - \epsilon)\alpha_-^* , \\ s\alpha_-^* &= (\xi^2 q^2 - \epsilon)\alpha_+ + [\xi^2(q^2 + 2qQ - Q^2) - \epsilon]\alpha_-^* . \end{cases} \quad (3.87)$$

Une solution non triviale est obtenue pour des valeurs propres s vérifiant l'équation caractéristique

$$s^2 + 2(\epsilon - \xi^2 q^2 + \xi^2 Q^2) s + \xi^2 Q^2 (2\epsilon - 6\xi^2 q^2 + \xi^2 Q^2) = 0 . \quad (3.88)$$

D'après (3.81), le coefficient de s est toujours positif, donc les deux valeurs propres s_{\pm} de cette équation ont une somme négative. Comme le discriminant correspondant à (3.88) est toujours positif, les deux valeurs propres s_{\pm} sont bien réelles, et le critère de stabilité est donc que leur produit soit positif, soit

$$\forall Q , \quad 2\epsilon - 6\xi^2 q^2 + \xi^2 Q^2 > 0 .$$

On a donc stabilité secondaire si

$$\epsilon > 3\xi^2 q^2 ;$$

au contraire une instabilité secondaire dite *instabilité d'Eckhaus* se développe si

$$\epsilon < \epsilon_E(q) = 3\xi^2 q^2 = 3\epsilon_0(q) \quad (3.89)$$

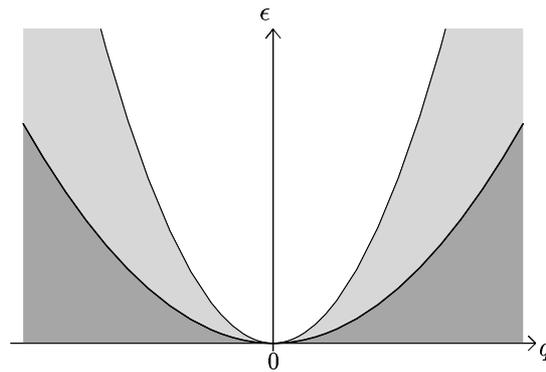


Fig. 3.3 – Diagramme de stabilité primaire et secondaire pour un système présentant une instabilité structurante obéissant à l'équation d'enveloppe (3.79). Pour un écart q au nombre d'onde critique trop grand, dans la zone gris foncée, de sorte que $\epsilon < \epsilon_0(q)$ (courbe neutre épaisse), la solution $V = 0$ est préférée à une solution de nombre d'onde $q_c + q$. Dans une zone intermédiaire gris claire, pour $\epsilon_0(q) < \epsilon < \epsilon_E(q)$ (courbe fine), des solutions de nombre d'onde $q_c + q$ peuvent exister mais sont instables vis-à-vis de l'*instabilité d'Eckhaus*. Enfin dans la zone blanche $\epsilon > \epsilon_E(q)$ le nombre d'onde $q_c + q$ est suffisamment proche de la valeur critique q_c pour que les solutions correspondantes soient stables.

d'après la définition (3.81) de la courbe neutre. On a donc dans la zone gris clair de la figure 3.3 des rouleaux de période trop grande ou trop courte en thermoconvection, qui peuvent se développer dans un premier temps sous l'effet d'un forçage convenable (par exemple en disposant un réseau de fils chauffants de période adéquate ; on peut aussi essayer d'induire cette structure à une valeur élevée de ϵ , $\epsilon > \epsilon_E(q)$, puis diminuer le paramètre de contrôle pour passer la limite d'instabilité d'Eckhaus), mais qui subiront sûrement l'instabilité d'Eckhaus si ce forçage n'est plus appliqué. Puisque cette instabilité correspond à l'excitation des modes $V_1(q_c + q \pm Q, \mathbf{q}'_c)$ d'après (3.86), avec bien sûr Q *petit* pour assurer leur caractère actif (ou de manière équivalente la validité de l'équation d'enveloppe (3.79)), et qu'à $Q = 0$ on retrouve le mode neutre d'invariance de phase déjà rencontré plusieurs fois (comme cela est visible sur la courbe des taux de croissance correspondante figure 3.4), on désigne cette instabilité d'Eckhaus comme une *instabilité modulationnelle de grande longueur d'onde* ou *instabilité de phase* (voir par exemple Manneville 1991). L'adjectif « modulationnelle » provient de ce que, à son déclenchement, cette instabilité donne lieu à des profils de la forme typique figure 3.5, obtenus par simulation numérique⁹, mais que l'on pourrait aussi déduire directement du calcul de stabilité précédent en calculant le mode de taux de croissance le plus grand. Aux temps longs, on observe en général la création de *défauts points spatio-temporels* tels les trois visibles figure 3.6, qui permettent une *évolution de la période de la structure vers des valeurs plus proches de la période critique* λ_c . Cette « relaxation » du système vers une structure plus « optimale », visible sur la figure 3.6, est évidemment liée au caractère relaxationnel de l'équation d'enveloppe (3.79).

Cette instabilité d'Eckhaus et sa généralisation à des systèmes présentant des instabilités oscillantes, ou des systèmes de dimension supérieure, a été mise en évidence expérimentalement dans de nombreux systèmes présentant des instabilités structurantes : *électroconvection d'un cristal liquide nématique* (Lowe & Gollub 1985), *écoulements cisailés dits de Taylor-Couette* (Ahlers et al. 1986), *thermoconvection dans un fluide binaire* (Kolodner 1992), *dynamique d'une interface huile-eau* (Pan & de Bruyn 1994), *thermoconvection tournante* (Liu & Ecke 1997 ; voir à ce sujet la figure 3.9), *plasma de néon* (Dinklage et al. 1998), *matériau cristallin avec des dislocations* (Rashkeev et al. 2001), etc... la grande variété de cette liste à la Prévert prouvant l'« *universalité* » de cette instabilité secondaire c'est-à-dire des équations d'enveloppes introduites ici. Il est justement temps d'en venir au cas de systèmes tridimensionnels.

⁹Cette simulation numérique a été réalisée par mes soins grâce à un code pseudo-spectral où les termes linéaires de (3.79) sont évalués par série de Fourier en x , alors que les termes non linéaires sont évalués dans l'espace direct. Les conditions limites correspondantes en $x = 0$ et L sont bien sûr des conditions de périodicité correspondant à un système faiblement confiné (on peut imaginer un système annulaire par exemple). Un tel code est plutôt facile à programmer en utilisant des routines pré-définies de transformée de Fourier discrète rapide (en l'occurrence celles de MATHEMATICA).

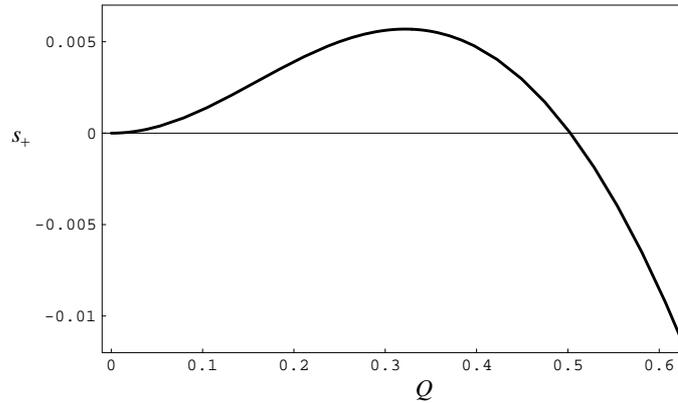


Fig. 3.4 – Valeur propre réduite s_+ en fonction du nombre d'onde de modulation Q pour l'*instabilité d'Eckhaus* d'une structure possédant un nombre d'onde relatif q trop grand : courbe obtenue à partir de (3.88) pour $\epsilon = 0.1$, $\xi = 0.5$ et $q = 0.42$. Noter que le taux de croissance est nul pour $Q = 0$ (perturbation « homogène ») puis croissant pour les petites valeurs de Q correspondant à des perturbations de grande longueur d'onde. Le développement spontané de cette instabilité au cours du temps est présenté sur les figures 3.5 et 3.6.

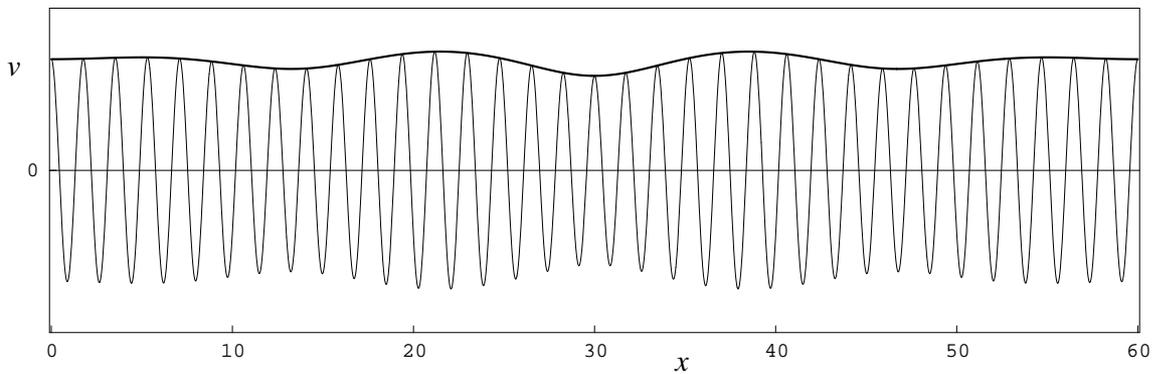


Fig. 3.5 – Profil obtenu par simulation numérique de l'équation d'enveloppe (3.79) avec $\tau = 1$, $\epsilon = 0.1$, $\xi = 0.5$, $\gamma = 1$, en imposant comme condition initiale une structure de nombre d'onde relatif q trop grand ($q = 0.42$) plus du bruit. La modulation visible due à l'*instabilité d'Eckhaus* s'est spontanément développée entre cet instant initial et l'instant $t = 305$ où le profil d'un champ local composante de V , $v = 2\text{Re}[A(x,t) \exp(iq_c x)]$ (cf. (3.47)) ; on a pris $q_c = \pi$, a été tracé avec une courbe fine. La courbe épaisse est celle de $|A(x,t)|$; la signification du terme *enveloppe* apparaît clairement. Le développement complet de l'instabilité au cours du temps est présenté sur la figure 3.6.

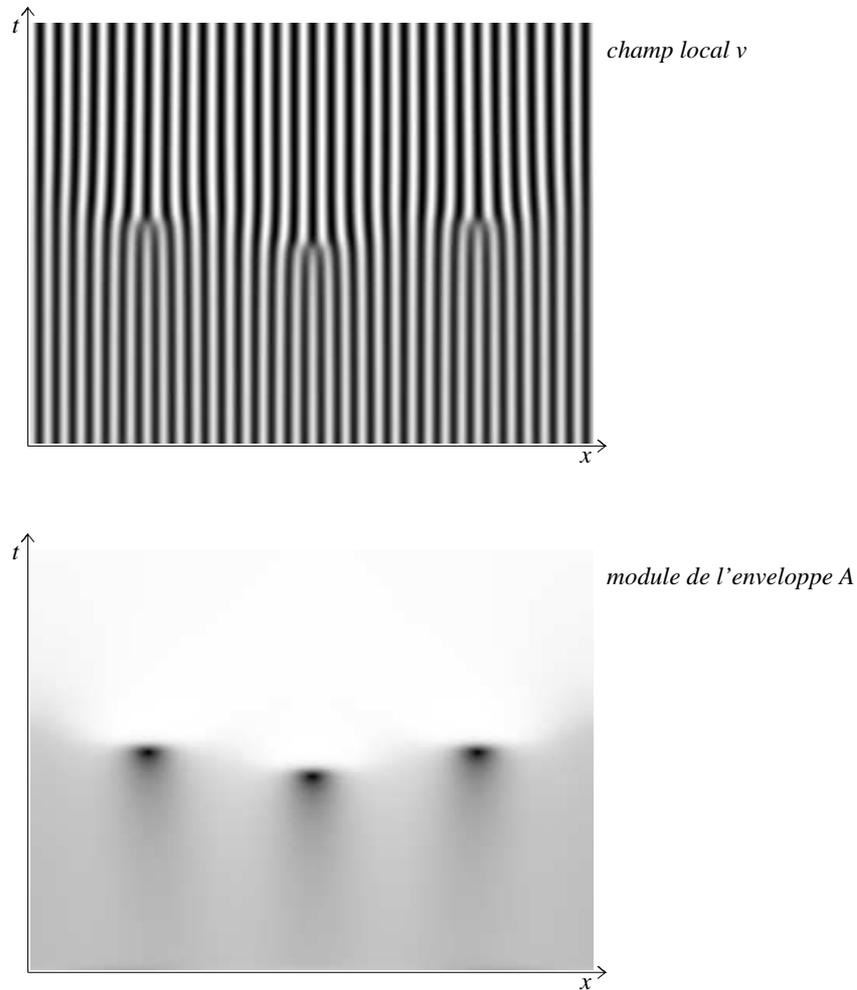


Fig. 3.6 – **Haut** : diagramme spatio-temporel, pour $0 \leq x \leq 60$, $0 \leq t \leq 900$, du champ $v(x,t) = 2\text{Re}[A(x,t) \exp(iq_c x)]$ calculé lors de la simulation numérique décrite dans la légende de la figure 3.5. Observer la création de **défauts points spatio-temporels** qui correspondent à des *points d'annulation ou singularités de l'enveloppe $A(x,t)$* comme cela est visible sur le diagramme du bas. Aux temps $t > 900$, la structure n'évolue plus. Comme chaque défaut a fait disparaître une période de convection, on est passé de 34 à 31 périodes, i.e. de $\lambda_i = 60/34$ à $\lambda_f = 60/31$, ou encore de $q_i = 17\pi/15$ à $q_f = 31\pi/30$ beaucoup plus proche du nombre d'onde critique donc « optimal » $q_c = \pi$. **Bas** : diagramme spatio-temporel du champ $|A(x,t)|$ lors de la même simulation.

3.2.8 Systèmes quasi bidimensionnels « symétriques »

Le calcul des équations d'enveloppe de systèmes quasi bidimensionnels est formellement identique au cas quasi unidimensionnel, à ceci près qu'il faut maintenant remplacer le nombre d'onde q en x par le **vecteur d'onde** $\mathbf{k} = q\hat{\mathbf{x}} + p\hat{\mathbf{y}}$ à **deux composantes** dans les deux directions d'extension x et z du système. Pour simplifier la présentation nous « oublions » les autres nombres caractérisant les modes actifs, qui sont supposés fixés, et nous ne détaillons aucun calcul. Dans le cas d'une **instabilité non structurante**, on doit définir le paquet d'ondes sous la forme d'une intégrale double ($d\mathbf{k} = dqdp$)¹⁰

$$V_a = \int_{\mathbf{k} \in \mathcal{V}_0} \widehat{A}(\mathbf{k}) V_1(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = A(\mathbf{r}) V_1(\mathbf{k}_c) + O(\epsilon^{1/2} A), \quad (3.90)$$

où \mathcal{V}_0 est maintenant le voisinage de $\mathbf{0}$ dans le plan des vecteurs d'ondes défini par (3.14), et l'**enveloppe lentement variable** $A(\mathbf{r})$ pour $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ vecteur position dans le plan d'extension du système est

$$A(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{k} \in \mathcal{V}_0} \widehat{A}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}. \quad (3.91)$$

Dans le cas d'une **instabilité structurante**, on doit poser

$$V_a = \int_{\mathbf{k} \in \mathcal{V}^+} \widehat{A}(\mathbf{k}) V_1(\mathbf{k}) d\mathbf{k} + c.c. = \int_{\mathbf{k} \in \mathcal{V}} \widehat{A}(\mathbf{k}) V_1(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = A(\mathbf{r}) V_1(\mathbf{k}_c) + c.c. + O(\epsilon^\nu A), \quad (3.92)$$

où \mathcal{V}^+ est voisinage de \mathbf{k}_c , \mathcal{V} est la réunion de \mathcal{V}^+ avec le voisinage symétrique par $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$, cf. le début de la section 3.2.2; l'exposant ν vaut 1/2 dans le cas d'un système isotrope et 1/4 dans le cas d'un système anisotrope. L'enveloppe correspondante est

$$A(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{k} \in \mathcal{V}^+} \widehat{A}(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_c) \cdot \mathbf{r}] d\mathbf{k}. \quad (3.93)$$

Appliquant la **règle de Fourier** généralisant (3.31),

$$\partial_x^m A \leftrightarrow (iq)^m \widehat{A} \quad \text{et} \quad \partial_y^m A \leftrightarrow (ip)^m \widehat{A}, \quad (3.94)$$

aux développements correspondants (3.12), (3.16) et (3.18) du taux de croissance des modes actifs, nous obtenons pour les termes linéaires de l'équation d'enveloppe, formellement puis explicitement

$$\begin{aligned} \partial_t A &= \sigma(q_c - i\partial_x, -i\partial_y, \mathbf{q}'_c, R) A \\ \partial_t A &= \frac{\epsilon + \xi_x^2 \partial_x^2 + \xi_y^2 \partial_y^2}{\tau} A \quad \text{pour une instabilité non structurante ou structurante anisotrope,} \\ \partial_t A &= \frac{\epsilon + \xi^2 (\partial_x - i\partial_y^2 / (2q_c))^2}{\tau} A \quad \text{pour une instabilité structurante isotrope.} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Ajoutant à ces termes le terme non linéaire d'ordre le plus bas, cubique d'après notre hypothèse de symétrie (2.17), et dont on a vu sections 3.2.1 et 3.2.2 qu'il est toujours le même que dans l'équation d'amplitude à condition de remplacer l'amplitude par l'enveloppe, nous obtenons l'**équation d'enveloppe d'une instabilité non structurante** ($A \in \mathbb{R}$) **ou structurante** ($A \in \mathbb{C}$) **anisotrope** :

$$\tau \partial_t A = \epsilon A + \xi_x^2 \partial_x^2 A + \xi_y^2 \partial_y^2 A - \gamma |A|^2 A, \quad (3.96)$$

¹⁰Ou somme double si le système est faiblement confiné dans les directions x et z .



Fig. 3.7 – *Défaut topologique ponctuel* observé par *ombroscopie* en convection de Rayleigh-Bénard (nombre de Prandtl $P = 0.87$, écart au seuil réduit $\epsilon = 0.20$); photographie de K. M. S. Bajaj, N. Mukolobwicz et G. Ahlers disponible sur www.nls.physics.ucsb.edu. L'*ombroscopie* est une technique d'observation consistant à faire passer une onde lumineuse plane dans la couche puis à observer en sortie les zones où les rayons lumineux ont été focalisés ou défocalisés à cause des variations de l'indice optique liées aux variations de densité i.e. de température. On a donc en quelque sorte une image du champ de température « moyen » dans la couche. Noter l'analogie de forme entre ce défaut spatial et les défauts spatio-temporels visibles par exemple sur les figures 3.6 et 3.9.

et l'équation d'enveloppe d'une instabilité structurante ($A \in \mathbb{C}$) isotrope :

$$\tau \partial_t A = \epsilon A + \xi_x^2 \left(\partial_x - \frac{i}{2q_c} \partial_y^2 \right)^2 A - \gamma |A|^2 A, \quad (3.97)$$

à condition de poser $\gamma = \tau g$ où g est le coefficient de saturation de l'équation d'amplitude de mode critique (2.27); ce coefficient est supposé strictement positif i.e. la bifurcation correspondante *sur-critique*. Ces équations portent comme l'équation (3.58) le nom d'*équations de Ginzburg-Landau*¹¹. D'ailleurs elles se réduisent à (3.58) pour des enveloppes ne dépendant pas de y .

3.2.9 Existence d'une énergie libre et dynamique relaxationnelle

On peut associer à (3.96) la *fonctionnelle énergie libre de Ginzburg-Landau*

$$\mathcal{F} = \int \left[-\frac{\epsilon}{2} |A|^2 + \frac{\xi_x^2}{2} |\partial_x A|^2 + \frac{\xi_y^2}{2} |\partial_y A|^2 + \frac{\gamma}{4} |A|^4 \right] dx \quad (3.98)$$

qui décroît au cours du temps¹²; pour (3.97), il faut poser

$$\mathcal{F} = \int \left[-\frac{\epsilon}{2} |A|^2 + \frac{\xi_x^2}{2} \left| \left(\partial_x - \frac{i}{2q_c} \partial_y^2 \right) A \right|^2 + \frac{\gamma}{4} |A|^4 \right] dx. \quad (3.99)$$

Les équations d'enveloppe (3.96) et (3.97) présentent donc une dynamique spatio-temporelle purement *relaxationnelle*.

Les équations (3.96) et (3.97) décrivent de nombreux phénomènes intéressants, comme par exemple les généralisations bidimensionnelles de l'instabilité d'Eckhaus (voir Dangelmayr & Kramer 1998, Manneville 1991 ou Fauve 1998). Pour des problèmes de place, nous nous restreignons ici à une seule application.

3.2.10 Application : défauts points

Les parois (3.71) solutions unidimensionnelles de (3.58) sont aussi des solutions de (3.96) et (3.97); ils correspondent alors à des *défauts topologiques lignes*. Il existe aussi, dans le cas d'instabilités structurantes, des *défauts topologiques points dits « dislocations »*, analogues xy des défauts spatio-temporels obtenus sur les diagramme xt de la figure 3.6. De tels défauts ont été observés expérimentalement en thermoconvection

¹¹L'équation (3.97) est aussi connue sous le nom d'*équation de Newell-Whitehead-Segel*, en hommage aux scientifiques qui l'ont obtenu pour la première fois, dans le contexte de la thermoconvection justement (cf. Newell & Whitehead 1969, Segel 1969).

¹²Cette propriété s'obtient par un calcul de $d\mathcal{F}/dt$ analogue à (3.62), en supposant toujours que les termes de bords obtenus lors de l'intégration par parties s'annulent grâce à des conditions limites adéquates.

par exemple (figure 3.7) et peuvent aussi être obtenus comme des solutions particulières (numériques) de (3.96) ou (3.97). Ils jouent un rôle très important dans les *mécanismes d'ajustement du vecteur d'onde* tels ceux liés à l'instabilité d'Eckhaus, et que l'on peut donc modéliser grâce à (3.96) ou (3.97).

3.3 Équation d'enveloppe d'une instabilité oscillante

Nous ne considérerons ici que le cas d'une *instabilité structurante oscillante sur-critique dans un système quasi-unidimensionnel « symétrique »*.

3.3.1 Équation d'enveloppe ou équation de Ginzburg-Landau complexe

En adoptant une approche pragmatique, le calcul de l'équation d'enveloppe dans ce cas est formellement identique au cas étudié section 3.2.2. Ainsi nous définissons le paquet d'ondes (qui mérite maintenant son nom!) de départ sous la forme analogue à (3.46),

$$V_a = \int_{\mathbf{q} \in \mathcal{V}^+} \widehat{A}(\mathbf{q}) V_1(\mathbf{q}) \exp(-i\omega_c t) d\mathbf{q} + c.c. = A(x) V_1(\mathbf{q}_c) \exp(-i\omega_c t) + c.c. + O(\epsilon^{1/2} A) \quad (3.100)$$

où $\omega_c \neq 0$ est la fréquence angulaire critique de l'instabilité, et l'*enveloppe complexe lentement variable* par

$$A(x) = \int_{\mathbf{q} \in \mathcal{V}^+} \widehat{A}(\mathbf{q}) \exp(iq x) d\mathbf{q} . \quad (3.101)$$

De manière équivalente à ce qui a été vu dans le cas stationnaire section 3.2.2, on obtient par transformée de Fourier inverse des équations d'amplitude des modes « actifs »¹³ les termes linéaires suivants dans l'équation d'enveloppe :

$$-i\omega_c A + \partial_t A = \sigma(q_c - i\partial_x, \mathbf{q}'_c, R) A . \quad (3.102)$$

Dans cette équation il faut utiliser un développement en série, tronqué à ses premiers termes, de la valeur propre complexe

$$\sigma(q_c + q, \mathbf{q}'_c, R) = \sigma_r(q_c + q, \mathbf{q}'_c, R) - i\omega(q_c + q, \mathbf{q}'_c, R) .$$

Ce développement se déduit donc de ceux du taux de croissance

$$\sigma_r(q_c + q, \mathbf{q}'_c, R) = \frac{\epsilon - \xi^2 q^2}{\tau} + O(\epsilon^2) + O(q^3) \quad (3.103)$$

et de la fréquence angulaire

$$\omega(q_c + q, \mathbf{q}'_c, R) = \omega_c - \frac{s}{\tau} \epsilon + v_g q + \frac{\xi^2}{\tau} b q^2 + O(\epsilon^2) + O(q^3) , \quad (3.104)$$

où par exemple

$$v_g = \frac{\partial \omega(q_c + q, \mathbf{q}'_c, R)}{\partial q} \quad (3.105)$$

est la *vitesse de groupe* des ondes. On obtient par injection dans (3.102) et ajout du terme non linéaire, dont on postule qu'il est le même que celui de l'équation d'amplitude (2.72), l'*équation de Ginzburg-Landau complexe*

$$\tau(\partial_t A + v_g \partial_x A) = \epsilon(1 + is)A + \xi^2(1 + ib)\partial_x^2 A - \gamma(1 + ic)|A|^2 A , \quad (3.106)$$

en posant toujours $\gamma = \tau g > 0$.

Introduisons une variable de temps lente

$$t' = \epsilon t , \quad (3.107)$$

¹³Au sens où ils gouvernent la dynamique du système.

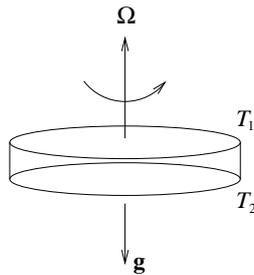


Fig. 3.8 – Principe de l'expérience de thermoconvection tournante de Liu & Ecke (1997) : un volume d'eau contenu dans un disque de rayon R et d'épaisseur d (i.e. de rapport d'aspect $\Gamma = R/d$), limité par des parois horizontales très bonnes conductrices de la chaleur et régulées en température, et par une paroi verticale isolante, est embarqué sur une table tournante en rotation solide autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire Ω . Ceci introduit, dans le référentiel lié à la table tournante, des forces d'inertie centrifuge et de Coriolis qui influencent fortement l'instabilité primaire de thermoconvection, comme cela est montré sur la figure 3.9.

et une nouvelle variable lente de longueur revenant à se placer *dans le référentiel entraîné à la vitesse de groupe* des ondes,

$$x' = \epsilon^{1/2}(x - v_g t), \quad (3.108)$$

ainsi que la nouvelle enveloppe

$$A' = \epsilon^{-1/2} A. \quad (3.109)$$

Ces changements de variables transforment après division par $\epsilon^{3/2}$ l'équation (3.106) en

$$\tau \partial_t A' = (1 + is)A' + \xi^2(1 + ib)\partial_x^2 A' - \gamma(1 + ic)|A'|^2 A' \quad (3.110)$$

où ϵ n'apparaît plus. Ceci montre que tous les termes de (3.106) sont du même ordre.

Cette équation, et sa version limite obtenue lorsque s, b et c sont très grands en valeur absolue, soit l'*équation de Schrödinger non linéaire*¹⁴

$$\boxed{\tau \partial_t A = isA + ib\partial_x^2 A - ic|A|^2 A} \quad (3.111)$$

en omettant les primes et avec de nouvelles notations évidentes, présente de nombreux types de comportements spatio-temporels très intéressants, dépendants très fortement de la valeurs des coefficients... ce qui justifie par exemple le titre de la revue d'Aranson & Kramer (2002). Nous nous contenterons ici d'un survol très rapide basé sur l'étude de la stabilité secondaire de la solution critique.

3.3.2 Instabilités secondaires d'Eckhaus-Benjamin-Feir

En étudiant la stabilité secondaire de la solution critique

$$A = \sqrt{\epsilon/\gamma} \exp[i(s - c)et/\tau] \quad (3.112)$$

de (3.106) (cf. la section 2.2) par rapport à des perturbations de l'enveloppe, on s'aperçoit que celle-ci n'est stable que si le *critère de stabilité de Benjamin-Feir-Newell*

$$1 + bc > 0 \quad (3.113)$$

est vérifié (Dangelmayr & Kramer 1998, Aranson & Kramer 2002). On constate alors l'existence d'un domaine de nombre d'ondes stables d'une forme similaire à celui représenté figure 3.3, les nombres d'ondes réduits trop grands en valeur absolue étant toujours instables vis-à-vis de l'*instabilité d'Eckhaus*. Cette instabilité a par

¹⁴Par analogie avec l'équation de Schrödinger linéaire base de la mécanique quantique, dans laquelle A est la fonction d'onde de l'électron...

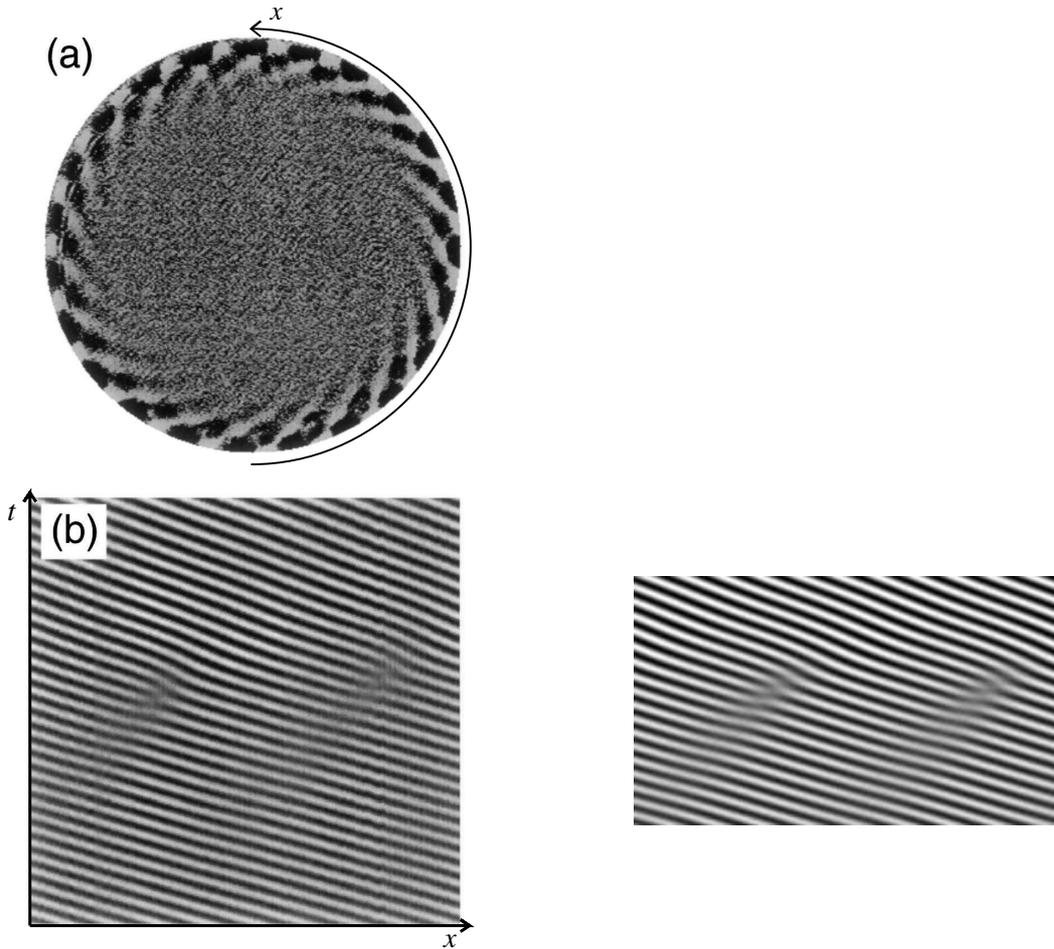


Fig. 3.9 – (a) : vue de dessus par ombroscopie d'une onde de bord présentant $m = 23$ périodes sur le périmètre $2\pi R$, obtenue par Liu & Ecke (1997). Le nombre d'onde adimensionnel correspondant est $q = 2\pi d / (2\pi R / m) = m / \Gamma = m / 5$. (b) : diagramme spatio-temporel obtenu par Liu & Ecke en empilant des profils d'images pris sur un demi-périmètre, et en imposant comme condition initiale un mode présentant $m = 18$ périodes sur le périmètre, i.e. de nombre d'onde trop petit. On observe le développement de l'*instabilité d'Eckhaus* qui conduit à la création de 2 défauts spatio-temporels (4 sur un périmètre) et une « relaxation » vers une onde présentant $m = 22$ périodes sur le périmètre. À droite de (b) : extrait d'un diagramme spatio-temporel d'une simulation numérique de (3.106) utilisant les paramètres mesurés par Liu & Ecke et partant d'une condition initiale similaire de nombre d'onde trop bas $m = 18$ plus une petite perturbation. On observe une excellente reconstruction du diagramme expérimental et en particulier des défauts.

exemple été mise en évidence expérimentalement par Liu & Ecke (1997) dans une étude de la convection de Rayleigh-Bénard dans une couche enserrée entre deux disques et mise en rotation figure 3.8. Pour des valeurs de la vitesse angulaire Ω suffisamment élevées, la thermoconvection ne prend pas naissance au cœur de la couche mais plutôt près des bords constitués d'un matériau isolant thermiquement (figure 3.9a). De plus ces modes de bords se propagent dans la direction rétrograde et constituent donc des *ondes quasi-unidimensionnelles*. Ceci suggère une modélisation de leur dynamique spatio-temporelle par l'équation d'enveloppe (3.106) ; effectivement Liu & Ecke (1997) ont déduit de différentes manipulations que (3.106) est un bon modèle pour leur système, et identifié tous ses coefficients. Ils ont observé l'instabilité d'Eckhaus, comme le montre le diagramme spatio-temporel figure 3.9b, obtenu en rassemblant les signaux d'intensité recueillis sur un cercle de rayon proche du bord sur une ligne, et en empilant les lignes ainsi obtenues à des instants successifs. Comme on l'a déjà vu plus haut, l'instabilité d'Eckhaus aboutit à la création de défauts spatio-temporels, et ici l'accord entre les expériences (figure 3.9b) et le modèle (simulation numérique de l'équation d'enveloppe (3.106) présentée à sa droite) est frappant¹⁵. On notera au passage l'importante *réduction de la dynamique* obtenue grâce à l'équation modèle (3.106), qui consiste en une seule équation aux dérivées partielles n'impliquant qu'une seule variable complexe et une seule coordonnée spatiale. Une modélisation directe de la thermoconvection tournante

¹⁵Pour un calcul théorique direct de l'équation d'enveloppe associée à ce problème de convection tournante, voir Plaut (2003).

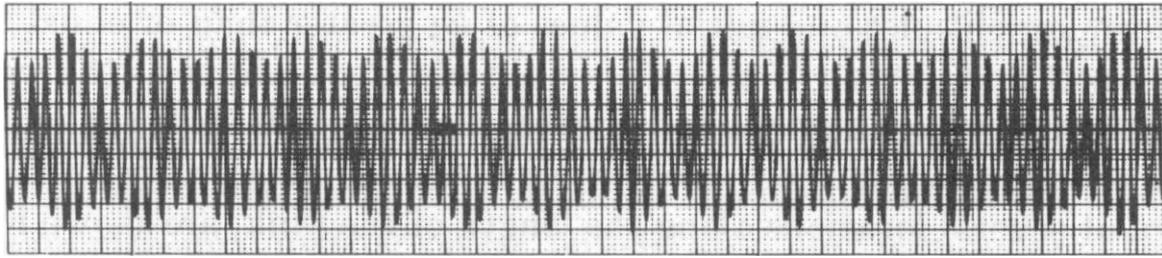


Fig. 3.10 – Enregistrement temporel effectué par Lake et al. (1977) de la position de l'interface eau-air dans un canal où une onde de surface monochromatique (i.e. de fréquence fixée) a été imposée par un système vibrant mécanique à l'origine $x = 0$ (à l'autre extrémité du canal se trouvait un système absorbant les vagues et évitant toute réflexion). On constate qu'à la position considérée ($x = 6$ m à comparer à la profondeur du canal 0.91 m) le signal n'est plus monochromatique mais montre au contraire le développement de l'*instabilité modulationnelle de Benjamin-Feir*.

nécessiterait la résolution des équations de Navier-Stokes et de l'équation de la chaleur avec a priori cinq champs inconnus (les trois composantes de la vitesse, le champ de pression et le champ de température) et surtout trois coordonnées spatiales, soit un problème numérique d'une complexité redoutable, incomparablement plus grande que celle liée à la résolution de (3.106).

Signalons aussi que l'on peut accéder expérimentalement à l'enveloppe complexe $A(x,t)$ par *démodulation de Fourier* sur le signal mesuré $v(x,t)$ supposé champ local composante de V_a ,

$$v(x,t) = \text{Re}[A(x,t)\exp(iq_c x - \omega_c t)] + t.o.s.$$

d'après (3.100). Des images obtenues par cette technique sont visibles sur la figure 3 de Liu & Ecke (1997) ou les figures 21 à 24 de Liu & Ecke (1999).

Au contraire, lorsque le critère de stabilité de Benjamin-Feir-Newell est violé,

$$1 + bc < 0, \quad (3.114)$$

toutes les solutions monochromatiques $A = \hat{A}(q)\exp(iqx - \Omega t)$ de l'équation de Ginzburg-Landau complexe (3.106) sont instables vis-à-vis de modulations. L'instabilité correspondante, dite d'*Eckhaus-Benjamin-Feir*, peut conduire selon la longueur du système et les valeurs des autres paramètres, soit à des *ondes modulées* du type de l'onde de surface ¹⁶ figure 3.10, soit à des *solitons* (« vagues » solitaires très localisées), soit encore à un *chaos spatio-temporel* comme présenté sur les simulations figures 3.11 et 3.12. Ce chaos est permis par le fait que l'équation de Ginzburg-Landau complexe (3.106) ne dérive pas d'une fonctionnelle énergie libre contrairement à l'équation de Ginzburg-Landau réelle. Il est spatio-temporel car, en un point fixe x , le signal $A(x,t)$ est chaotique (« chaos temporel »), tandis que les fonctions d'auto-corrélation spatiales

$$C(l,t) = \int_0^L A(x,t)A(x+l,t)dx$$

décroissent rapidement avec l (« chaos spatial »). Il pourrait aussi être qualifié de « *turbulence faible* ». À notre connaissance, l'équation de Ginzburg-Landau complexe (3.106) est l'équation modèle la plus simple qui présente ce phénomène très intéressant mais encore peu compris, et qui fait donc actuellement l'objet de recherches actives.

¹⁶Hakim (1998) présente justement un calcul par méthode multi-échelle de l'équation de Schrödinger non linéaire à partir des équations de la dynamique d'ondes de surface.

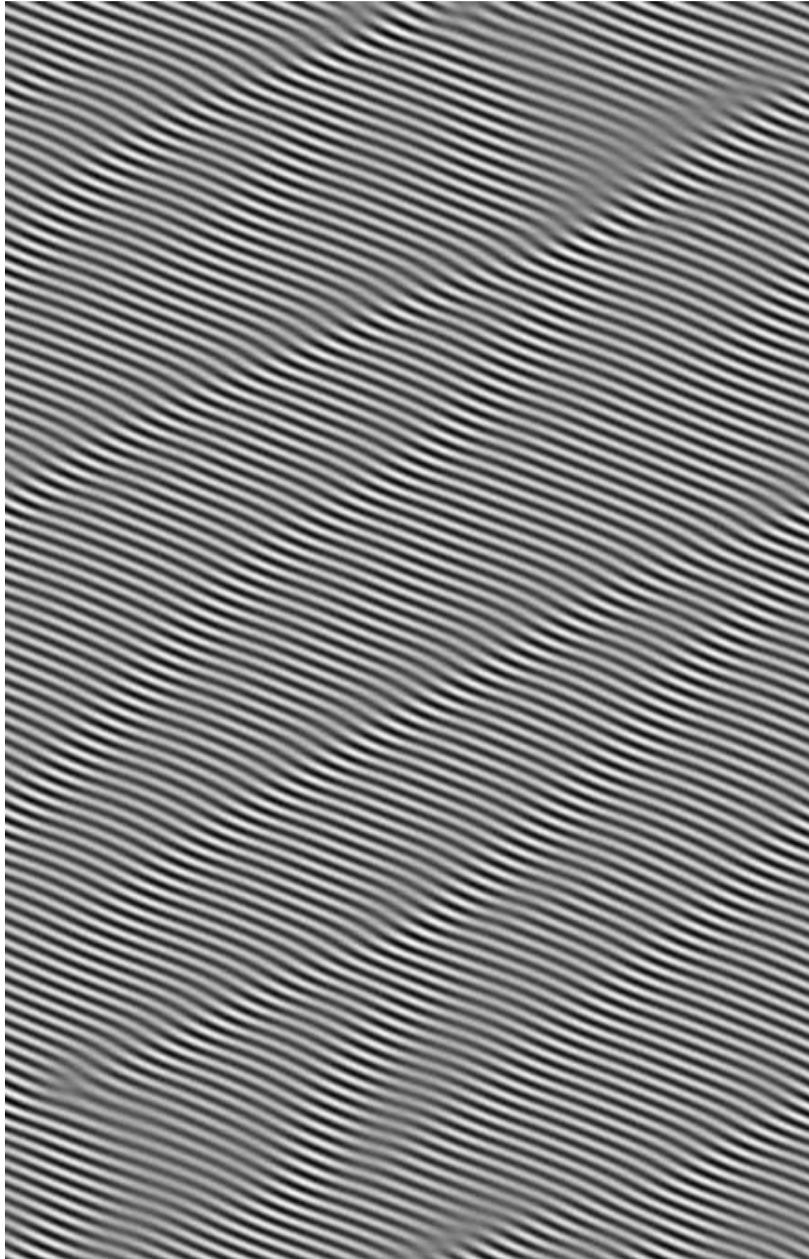


Fig. 3.11 – Diagramme spatio-temporel pour $0 \leq x \leq 2\pi\Gamma$, $0 \leq t \leq 20.7$, du champ local $v(x,t) = 2\text{Re}[A(x,t) \exp[i(q_c x - \omega_c t)]]$ obtenu par simulation numérique de (3.106) utilisant les mêmes paramètres que ceux mesurés par Liu & Ecke (1997) et mentionnés dans la légende de la figure 3.9 sauf $b = 3$ et $c = -1$. Dans ce régime où le critère de stabilité de Benjamin-Feir-Newell (3.113) est franchement violé, on observe un *chaos spatio-temporel* avec apparitions et disparitions chaotiques dans l'espace et le temps de défauts spatio-temporels.

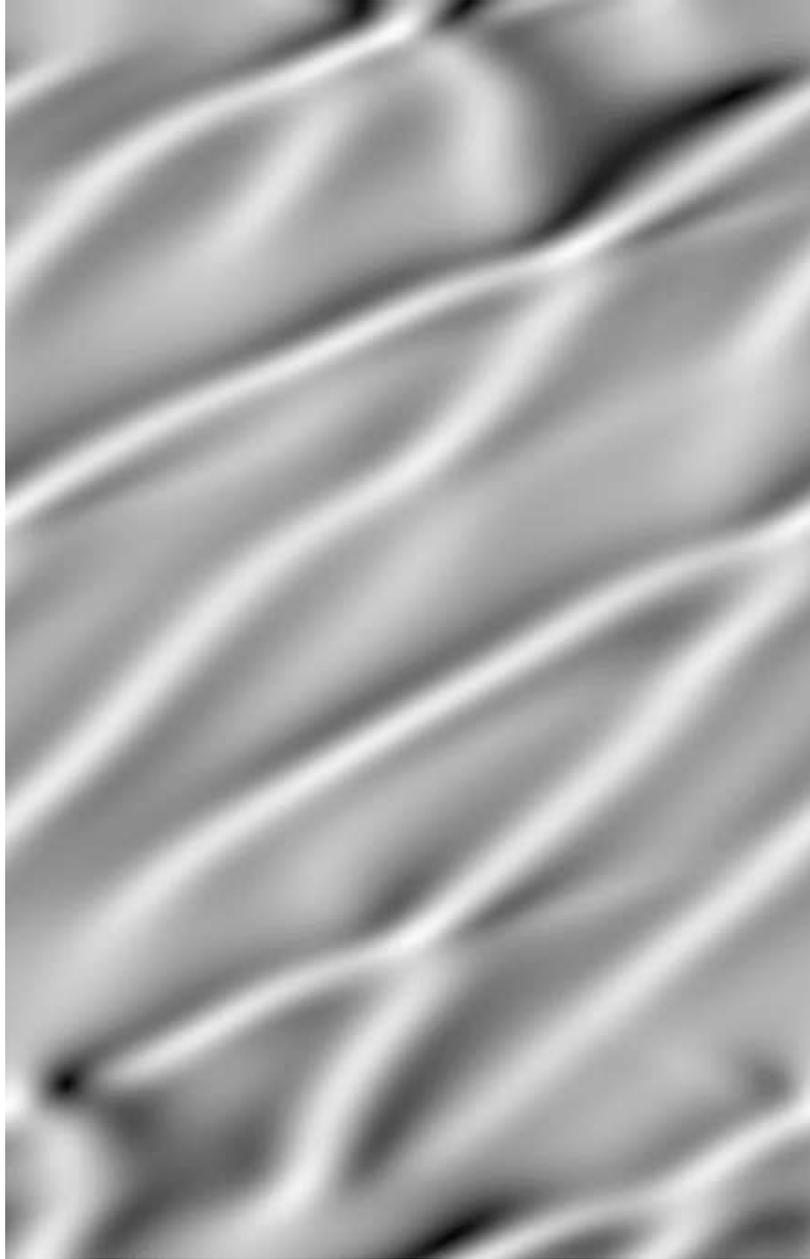


Fig. 3.12 – Diagramme spatio-temporel correspondant à la figure 3.11 mais pour le module de l'amplitude $|A(x,t)|$.

Chapitre 4

Remarques de conclusion

De très nombreuses remarques pourraient être faites en guise de conclusion. Pour des questions de place, nous avons opéré une sélection draconienne portant sur quelques-uns seulement des prolongements possibles de ce cours. Ces remarques seront judicieusement complétées par la lecture des annexes A et B.

4.1 Systèmes présentant plusieurs modes critiques différents

Un système isotrope, tel que la thermoconvection dans la géométrie de Rayleigh-Bénard¹, présente une infinité de modes critiques lorsque $R = R_c$, à savoir toutes les structures² de vecteur d'onde horizontal \mathbf{k} de module q_c . La *compétition entre un nombre discret p de tels modes* $V_1(\mathbf{q}_j)$ peut se modéliser en calculant les équations d'amplitudes associées à la solution faiblement non linéaire correspondante

$$V = \sum_{j=1}^p A_j V_1(\mathbf{q}_j) + c.c. + V_{\text{passifs}} .$$

On obtient avec le schéma de la section 2.1 un *système d'équations d'amplitudes couplées* de la forme

$$\partial_t A_j = \frac{\epsilon}{\tau} A_j - g |A_j|^2 A_j - \sum_k g_{jk} |A_k|^2 A_j$$

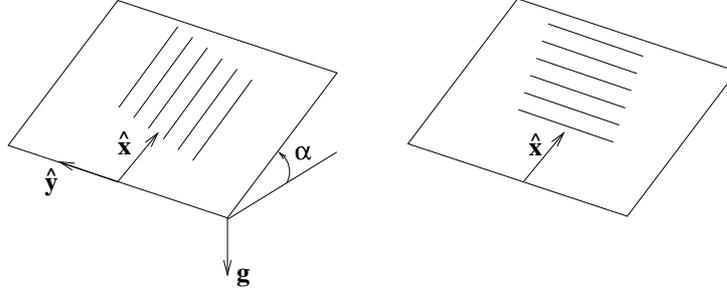
dans le cas d'un système « symétrique » interdisant des résonances à l'ordre quadratique³. Aucune difficulté fondamentale n'est rencontrée dans un tel calcul, qui peut aussi être mené par des *méthodes multiéchelles* comme cela est exposé par exemple dans Fauve (1998). On peut seulement s'interroger sur la pertinence du choix a priori de p modes actifs $V_1(\mathbf{q}_j)$ parmi tous les modes $V_1(\mathbf{k}, \dots)$ avec $|\mathbf{k}| = q_c$, qui ne peut se justifier que par comparaison à des expériences ou des simulations numériques du modèle complet. Cette petite faiblesse nous incite à ne pas passer plus de temps sur cet exemple où la multiplicité des modes critiques est due à la haute symétrie du système, pour aborder plutôt le cas de systèmes moins symétriques possédant exceptionnellement deux modes critiques différents...

¹Ou un système de réaction-diffusion dans un gel, cf. l'annexe A.2.3.

²Ces structures se déduisent par rotation autour d'un axe vertical du mode critique xz calculé section 1.6 dans le cas de la thermoconvection. On notera que dans ce cas le vecteur d'état V permettant de décrire des rouleaux d'orientation quelconque doit maintenant comporter deux potentiels de vitesse (au lieu de la seule fonction courant ψ) à cause du passage de deux à trois dimensions d'espace.

³C'est le cas en thermoconvection Boussinesq.

Considérons donc un système anisotrope quasi bi-dimensionnel invariant par translations dans le plan horizontal xy , par exemple la thermoconvection dans une couche inclinée par rapport à l'horizontale ; alors le vecteur $\hat{\mathbf{x}}$ projection de l'opposé de l'accélération de la pesanteur dans le plan de la couche définit la direction d'un écoulement moyen de cisaillement (voir la section 9.2 de Bodenschatz et al. 2000). Selon la valeur α de l'angle d'inclinaison de la couche par rapport à l'horizontale, des rouleaux d'axes parallèles ou transverses à l'écoulement moyen sont préférés au seuil de l'instabilité $R = R_c$ de thermoconvection⁴ :



Pour des fluides possédant un nombre de Prandtl de l'ordre de 1, on observe des rouleaux parallèles (de vecteur d'onde $\mathbf{k} = p_c \hat{\mathbf{y}}$) si α est plus petit qu'une valeur limite α_0 , et des rouleaux transverses (de vecteur d'onde $\mathbf{k} = q_c \hat{\mathbf{x}}$) si α est plus grand. Au *point de codimension deux* $R = R_c$, $\alpha = \alpha_0$, ainsi nommé car il nécessite un réglage fin de *deux* paramètres de contrôle, on peut étudier la *compétition entre les deux modes critiques* correspondants que nous noterons $V_1(\mathbf{q}_p)$ et $V_1(\mathbf{q}_t)$ en recherchant les équations d'amplitudes associées à la solution faiblement non linéaire

$$V = AV_1(\mathbf{q}_p) + BV_1(\mathbf{q}_t) + c.c. + V_{\text{passifs}} .$$

Grâce au schéma de la section 2.1 on aboutit, compte tenu des symétries du problème, à un système d'équations d'amplitudes couplées de la forme

$$\begin{cases} \partial_t A = \frac{\epsilon}{\tau_p} A - g_p |A|^2 A - g_{tp} |B|^2 A \\ \partial_t B = \frac{\epsilon}{\tau_t} B - g_p |B|^2 B - g_{pt} |A|^2 B \end{cases} ,$$

où ϵ est l'écart réduit au seuil d'instabilité commun aux deux modes critiques, $\epsilon = (R - R_c)/R_c$. Les lois d'échelles généralisant celles posées section 2.1.7,

$$t = \epsilon^{-1} t' , \quad A = \epsilon^{1/2} A' , \quad B = \epsilon^{1/2} B' ,$$

transforment le système d'équations couplées précédent en un système où tous les termes sont du même ordre $\epsilon^{3/2}$. Ceci montre que ce système peut être obtenu par une méthode multiéchelle. Par contre, lorsque $\alpha < \alpha_0$ par exemple, et que le mode de rouleaux parallèles a un seuil R_p strictement inférieur à celui R_t des rouleaux transverses, on aboutit avec le schéma de la section 2.1, en posant $\epsilon = (R - R_p)/R_p$ et $\epsilon_t = (R_t - R_p)/R_p > 0$, au système

$$\begin{cases} \partial_t A = \frac{\epsilon}{\tau_p} A - g_p |A|^2 A - g_{tp} |B|^2 A \\ \partial_t B = \frac{\epsilon - \epsilon_t}{\tau_t} B - g_p |B|^2 B - g_{pt} |A|^2 B \end{cases} ,$$

dont tous les termes ne peuvent être rendus du même ordre par des lois d'échelles. Ceci signifie que toute tentative de calcul de ce système par des méthodes multiéchelles est vouée à l'échec⁵.

⁴On pourrait même imaginer des rouleaux obliques dont les axes font un angle fini avec $\hat{\mathbf{x}}$.

⁵Cette critique sera tempérée par la lecture de l'annexe D et en particulier de sa conclusion.

4.2 Analyse linéaire et faiblement non linéaire numérique

Les exemples très simples d'applications donnés dans ce cours ont porté sur des systèmes modèles permettant des calculs analytiques complets. Bien entendu, un système réel présentant des instabilités ne permet pas en général de tels calculs analytiques à cause de la complexité intrinsèque des équations du problème ou de sa géométrie⁶. Ceci oblige le modélisateur à recourir à l'**analyse numérique** pour étudier le système, mais n'est pas un inconvénient majeur en ce qui concerne les méthodes développées ici, à condition d'avoir une bonne maîtrise de l'outil numérique utilisé.

En effet par discrétisation du problème par quelque méthode numérique que ce soit, on transforme typiquement les équations de champ d'évolution du problème (1.3) en équation « matricielles »

$$\mathbf{D} \cdot \partial_t \mathbf{V} = \mathbf{L}_R \cdot \mathbf{V} + \mathbf{N}_2(\mathbf{V}, \mathbf{V}) + \mathbf{N}_2(\mathbf{V}, \mathbf{V}, \mathbf{V})$$

où \mathbf{V} est un long vecteur colonne à Nn composantes, N étant la « résolution numérique » utilisée pour discrétiser chacun des n champs composantes de V . On peut alors implanter une **analyse linéaire numérique de stabilité** en cherchant les valeurs propres et modes propres solutions de⁷

$$\sigma \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}_1 = \mathbf{L}_R \cdot \mathbf{V}_1$$

c'est-à-dire en essayant de diagonaliser numériquement la matrice $\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{L}_R$ (en fait un problème de cette forme est appelé « problème aux valeurs propres généralisé », et on peut avoir intérêt à utiliser des algorithmes spécifiques pour le résoudre). Il est clair que l'on ne peut ainsi que calculer Nn valeurs et modes propres, ce qui pourrait inquiéter puisque l'on sait qu'il en existe une infinité. Cependant les modes qui nous intéressent pour les calculs sont les seuls modes actifs, et, pour des problèmes physiques bien posés, on observe que ceux-ci sont bien décrits même en prenant des valeurs relativement faible de la résolution numérique N ; en effet ce sont typiquement des modes présentant une structure spatiale simple⁸. Un critère de convergence d'une telle analyse linéaire numérique de stabilité serait donc d'obtenir, lorsque l'on augmente la résolution de N à $N+1$, que les champs discrétisés des modes actifs et leurs valeurs propres⁹ ne sont pas modifiés de plus de 1%.

On peut alors, une fois le seuil de l'instabilité détecté numériquement, envisager une **analyse faiblement non linéaire numérique** dans laquelle le schéma de la section 2.1 par exemple est implanté numériquement. Pour cela il faut compléter l'analyse linéaire par la résolution du problème adjoint, dont il faut bien sûr expliciter les équations. L'explicitation de (2.13) est alors simple, les produits scalaires nécessaires étant calculés en revenant à la définition du produit scalaire (on peut par exemple mettre $\langle V, U \rangle$ sous la forme $\mathbf{V} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{U}^*$ où \mathbf{G} est la matrice représentative du produit scalaire dans la base de discrétisation utilisée). Le fait que la « base » de l'espace des modes passifs utilisée pour écrire (2.13) soit incomplète du fait de la discrétisation ne doit pas inquiéter, puisque la structure spatiale de V_a étant « simple » près du seuil, celle de $N_2(V_a, V_a)$ donc de V_{passifs} l'est aussi, i.e. on n'a besoin que d'une bonne description des « premiers modes passifs ». Enfin les équations d'amplitudes (voire d'enveloppe) des modes actifs (2.19) s'obtiennent en calculant des produits scalaires numériquement, ce qui ne pose pas de problème particulier. La convergence d'une telle analyse se vérifie sur la convergence des valeurs des coefficients des équations d'amplitudes et de la forme de V_{passifs} .

4.3 Analyse fortement non linéaire : méthodes de continuation

Ces mêmes méthodes numériques peuvent être étendues au régime fortement non linéaire où les non-linéarités des équations d'évolution ne peuvent plus être traitées en perturbations. Une approche intéressante

⁶Il suffit d'une « complexité faible » pour cela, voir par exemple le cas mentionné section 1.6 de la thermoconvection en conditions de bords rigides pour la vitesse.

⁷Dans le cas de systèmes invariants par translations on effectue la « transformée de Fourier » consistant à rechercher des modes propres en $\exp(ix + i py)$ analytiquement.

⁸Voir par exemple la figure 1.3 : une méthode de différence finie avec N points sur l'axe des z (hors les points frontières en $z = \pm 1/2$) donnerait accès grosso-modo aux N premiers modes en $\sin(n\pi z)$; les modes « oubliés » en $\sin(n\pi z)$ pour $n > N$ sont des modes passifs très amortis (cf. la valeur propre associée (1.72) $\sigma(\mathbf{0}, R) = R - n^2\pi^2$) qui n'ont aucune influence sur la dynamique près du seuil d'instabilité.

⁹A vecteur d'onde fixé représentatif si on est passé en transformée de Fourier.

permettant de calculer des solutions fortement non linéaires est constituée par les *méthodes de continuation* qui, partant d'une solution calculée à ϵ faible, recherchent des solutions correspondant à des valeurs plus grandes de ϵ par des méthodes itératives. En se restreignant à des solutions stationnaires¹⁰, partant d'une solution \mathbf{V}_0 connue à $R = R_c(1 + \epsilon)$, on veut au pas suivant obtenir une solution \mathbf{V}_∞ à $R = R_c(1 + \epsilon + \delta\epsilon)$, c'est-à-dire résoudre

$$\mathbf{L}_R \cdot \mathbf{V}_\infty + \mathbf{N}_2(\mathbf{V}_\infty, \mathbf{V}_\infty) = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

dans un système à non-linéarités quadratiques seulement¹¹. Cette équation non linéaire peut par exemple se résoudre numériquement par la *méthode itérative de Newton*, en réglant

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n + \delta\mathbf{V}_n$$

si \mathbf{V}_n est connu de façon à satisfaire l'équation précédente linéarisée en $\delta\mathbf{V}_n$:

$$\mathbf{L}_R \cdot \delta\mathbf{V}_n + \mathbf{N}_2(\mathbf{V}_n | \delta\mathbf{V}_n) = -\mathbf{L}_R \cdot \mathbf{V}_n - \mathbf{N}_2(\mathbf{V}_n, \mathbf{V}_n)$$

avec la notation (1.4b) ; on calcule donc $\delta\mathbf{V}_n$ par inversion de l'opérateur linéarisé

$$\mathbf{M}_{R,n} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{L}_R \cdot \mathbf{V} + \mathbf{N}_2(\mathbf{V}_n | \mathbf{V}) \implies \delta\mathbf{V}_n = -\mathbf{M}_{R,n}^{-1} \cdot [\mathbf{L}_R \cdot \mathbf{V}_n + \mathbf{N}_2(\mathbf{V}_n, \mathbf{V}_n)].$$

En règle générale cette méthode itérative (qui peut être raffinée) converge rapidement... à condition de partir d'une solution approximative pas trop mauvaise à ϵ faible, c'est-à-dire d'une solution faiblement non linéaire.

Pour concrétiser cette démarche, nous terminerons ce cours en montrant plus précisément comment nous avons pu calculer la solution fortement non linéaire correspondant à la photographie expérimentale de thermoconvection figure 4.2a, correspondant à un régime très fortement non linéaire puisque $R = 12000$ implique, d'après la valeur du seuil en conditions réalistes de bords rigides (1.92),

$$\epsilon = R/R_c - 1 = 12000/1708 - 1 = 6,03.$$

Nous avons utilisé une *méthode spectrale de résidus pondérés* pour calculer des solutions de période critique

$$V = V_0 + \left[\sum_{k=1}^{N_x} V_k \exp(ikq_c x) + c.c. \right] \quad (4.2)$$

où

$$V_k = \left(\sum_{l=1}^{N_z} \Psi_{kl} f_{kl}(z), \sum_{l=1}^{N_z} \Theta_{kl} g_{kl}(z) \right), \quad (4.3)$$

les fonctions de base f_{kl} et g_{kl} satisfaisant les conditions limites correspondantes. Par injection de telles formes de solution dans les équations de la dynamique (1.35) et (1.37) puis projection sur les fonctions de base on obtient des équations scalaires portant sur le vecteur des coefficients

$$\mathbf{V} = (\dots \Psi_{kl} \dots \Theta_{kl} \dots)$$

qui sont bien de la forme (4.1). La résolution se fait en partant d'une solution faiblement non linéaire calculée à $\epsilon = 0,3$, soit

$$V_{fnl} = [AV_1(\mathbf{q}_c) + c.c.] + [A^2V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c) + c.c.] + |A|^2V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*) \quad (4.4)$$

en reprenant les notations (2.26), puis en itérant la méthode de Newton pour trouver une solution fortement non linéaire à $\epsilon = 0,3$. Le paramètre ϵ est alors augmenté par petits pas, en itérant à chaque fois la méthode de Newton jusqu'à ce que le nombre de Nusselt calculé ne varie pas de plus de 10^{-4} ; ces valeurs sont présentées figure 4.1. La solution fortement non linéaire obtenue finalement figure 4.2b reproduit très fidèlement la structure expérimentale caractérisée par Stasiek (1997) figure 4.2a. Pour d'autres exemples d'application de ces méthodes de continuation fortement non linéaires, dans le cas d'écoulements ouverts, on consultera l'annexe B.

¹⁰On peut généraliser cette méthode au cas de solutions périodiques en temps, voire à ce sujet l'annexe B.4.

¹¹Cette hypothèse n'est pas fondamentale : on peut développer un schéma analogue pour un modèle comportant aussi des non-linéarités cubiques.

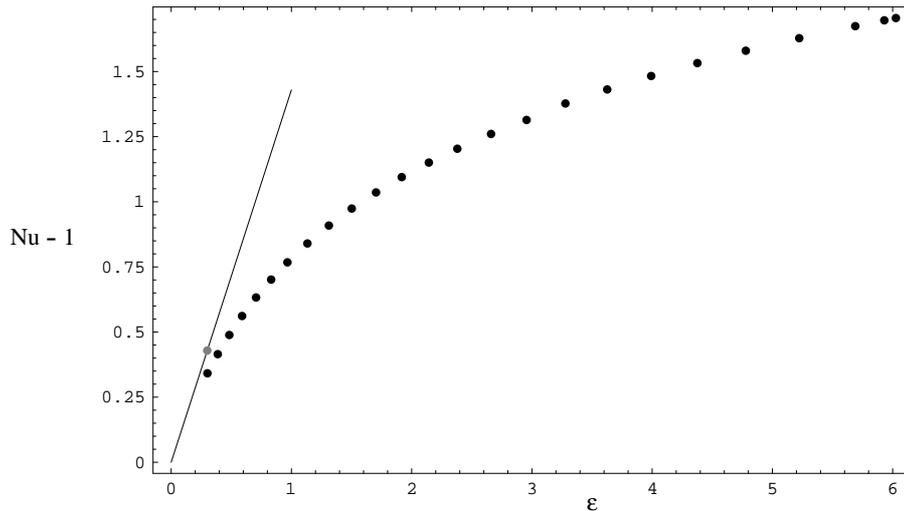


Fig. 4.1 – Présentation dans le plan écart au seuil réduit ϵ - nombre de Nusselt réduit $Nu - 1$ des différentes étapes du calcul de la *solution fortement non linéaire* (4.2), (4.3) correspondant à la figure 4.2b. Il est indispensable d’initialiser le premier calcul itératif par méthode de Newton avec la solution faiblement non linéaire (4.4) menant à la valeur représentée par le point gris, qui se trouve bien sûr sur la droite d’équation (2.52) prédite par Schlüter et al. (1965). Au terme du premier calcul itératif, on se trouve donc sur le premier point noir (déjà en régime « assez fortement non linéaire »). On augmente alors ϵ par petits pas, en appliquant à chaque étape la méthode de Newton itérative jusqu’à convergence.

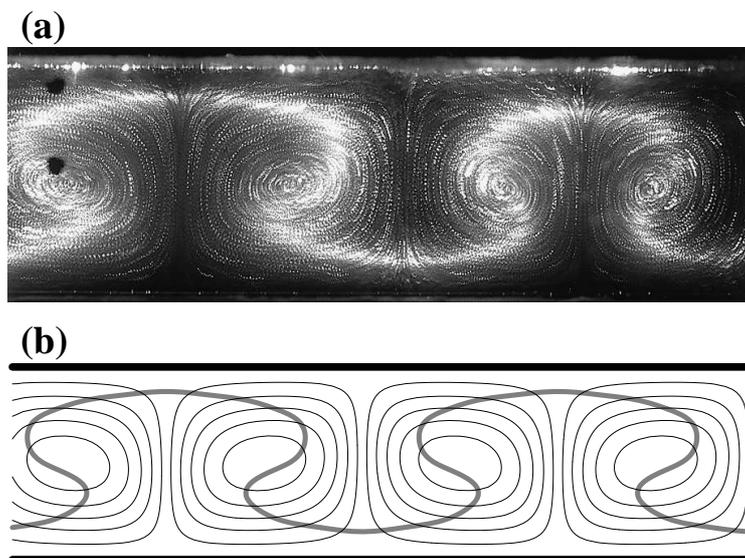


Fig. 4.2 – (a) : photographie par Stasiek (1997) de cellules de convection dans du glycérol de nombre de Prandtl $P = 12500$ en géométrie de Rayleigh-Bénard, à un nombre de Rayleigh $R = 12000$ plus de 6 fois critique. Le glycérol contient une suspension de micro-goutellettes de cristaux liquides thermochromes, en concentration 0.03% en masse, ce qui permet d’observer par réflexion sélective de la lumière une isotherme. D’autre part, la photographie a été obtenue grâce à 8 flashes lancés à 6 secondes d’intervalle, ce qui permet de visualiser le champ de vitesse de l’écoulement à partir des positions successives des micro-goutellettes. (b) : lignes de courants (lignes fines) et isotherme (ligne épaisse grise) calculées théoriquement à partir de la solution fortement non linéaire (4.2), (4.3) correspondant au dernier point de la figure 4.1.

Annexe A

Exemples complémentaires en dimension finie

Cette annexe propose quelques éléments sur des exemples de systèmes dynamiques qui sont abordés au début du cours oral dans un souci de « simplicité », puisque en général un système d'équations différentielles ordinaires est plus facile à résoudre qu'un système d'équations aux dérivées partielles! Une transition « en douceur » vers des systèmes de dimension infinie est d'autre part effectuée dans la toute dernière section.

A.1 Modèle de laser

A.1.1 Présentation du modèle - Mise sous forme adimensionnelle

Un laser, par exemple le laser à semi-conducteur de votre lecteur de CD ou de DVD, est constitué d'une zone optiquement active dont les atomes sont excités par « pompage », et peuvent réémettre des photons cohérents par émission stimulée. Une petite partie de ces photons cohérents s'échappe par un miroir semi-transparent de sortie pour constituer le faisceau laser. On considère ici le modèle le plus simple de laser à deux niveaux ou de « classe B » donné par les équations (23) de Dangoisse et al. (1998),

$$\begin{cases} \frac{dJ}{dt^*} = -\frac{J}{\tau_p} + c\sigma JN^* , \\ \frac{dN^*}{dt^*} = -\frac{N^*}{\tau_a} + R^* - 2\sigma JN^* , \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où J est le flux de photons cohérents, t^* le temps physique, τ_p le temps caractéristique des pertes photoniques par le miroir semi-transparent de sortie, c la vitesse de la lumière, σ la section efficace caractérisant l'émission induite et l'absorption, N^* le nombre d'atomes excités par unité de volume¹, τ_a la durée de vie des deux niveaux, supposée identique², R^* le taux de pompage. Pour adimensionner ce modèle on introduit

$$t = \frac{t^*}{\tau_p} , \quad N = \frac{N^*}{N_0} , \quad n = \frac{2J}{N_0 c} \quad (\text{A.2})$$

où N_0 est une densité typique d'atomes excités. Pour simplifier, N et n peuvent être considérés comme les nombres d'atomes excités et de photons cohérents réduits. On obtient ainsi les équations adimensionnelles³

$$\begin{cases} \dot{n} = -n + GnN , \\ \dot{N} = -fN + R - GnN , \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

¹Plus précisément N^* désigne la *différence de population* c'est-à-dire la différence entre les densités d'atomes occupant le niveau excité et le niveau d'énergie plus basse.

²Cette durée de vie finie est due à des relaxations par émission spontanée de photons (non cohérents) mais aussi à des collisions entre atomes ou à des vibrations du milieu.

³Nous utiliserons ici le point pour désigner la dérivée par rapport au temps, comme cela est souvent fait en théorie des systèmes dynamiques.

avec $G = \tau_p c \sigma N_0$ le « coefficient de gain de l'émission stimulée »⁴, $f = \tau_p / \tau_a$ le rapport des temps caractéristiques de pertes atomiques et photoniques et $R = \tau_p R^* / N_0$ le taux de pompage réduit.

A.1.2 Analyse

La recherche des solutions d'équilibre ou points fixes du système (A.3) conduit à identifier une solution « laser éteint »

$$n = 0, \quad N = R/f, \quad (\text{A.4})$$

et une solution « laser allumé »

$$n = R - f/G, \quad N = 1/G. \quad (\text{A.5})$$

Comme $n > 0$, cette dernière solution ne peut exister que pour $R > f/G$, ce qui donne la valeur du seuil d'allumage du laser

$$R_c = f/G. \quad (\text{A.6})$$

Le tracé de ces solutions et le comportement de n au-dessus du seuil de bifurcation en $R_c \epsilon$ où $\epsilon = R/R_c - 1$ montre que l'allumage du laser est associé à une **bifurcation trans-critique**.

Pour analyser cette bifurcation plus en détail avec le formalisme du cours, on introduit l'écart

$$V = \begin{pmatrix} n \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ N - R/f \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

à la solution de base « laser éteint » (A.4), et on met les équations de la dynamique sous la forme

$$\dot{V} = L_\epsilon \cdot V + N_2(V, V). \quad (\text{A.8})$$

Le problème linéarisé admet deux modes propres, $V_1(+, \epsilon)$ actif et lent, $V_1(-, \epsilon)$ passif et rapide au sens de la section 2.1. La décomposition modale

$$V = AV_1(+, \epsilon) + A_- V_1(-, \epsilon) \quad (\text{A.9})$$

conduit après projection sur les modes adjoints $U_1(\pm, 0) = U_1(\pm)$ aux équations d'amplitudes

$$\begin{cases} \dot{A} &= \epsilon A + \langle N_2(V, V), U_1(+) \rangle, \\ \dot{A}_- &= -f A_- + \langle N_2(V, V), U_1(-) \rangle. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

L'hypothèse de domination du mode actif conduit à l'ordre le plus bas à

$$N_2(V, V) = A^2 N_2(V_1(+), V_1(+)) \quad (\text{A.11})$$

d'où l'**équation d'amplitude générique** d'une bifurcation trans-critique (2.23)

$$\dot{A} = \frac{\epsilon}{\tau} A - \gamma A^2 \quad (\text{A.12})$$

avec $\tau = 1$ le temps caractéristique, $\gamma = -\langle N_2(V_1(+), V_1(+)), U_1(+) \rangle$ le coefficient de saturation. L'amplitude esclave peut d'autre part être éliminée selon

$$A_- = -\gamma' A^2 / f + t.o.s. \quad (\text{A.13})$$

avec $\gamma' = -\langle N_2(V_1(+), V_1(+)), U_1(-) \rangle$, d'où l'expression de la **variété centrale**

$$V = AV_1(+, \epsilon) + A_-(A)V_1(-, \epsilon) = \begin{pmatrix} A \\ -\frac{1}{f}A + \frac{1}{f}\left(\frac{1}{f} - 1\right)\epsilon A + \frac{G}{f^2}\left(1 - \frac{1}{f}\right)A^2 \end{pmatrix} + t.o.s. \quad (\text{A.14})$$

Un portrait de phase de ce système est tracé sur la figure A.1 pour les valeurs $G = 1$, $f = 0.5$, $\epsilon = 0.05$ des paramètres adimensionnels. On constate que l'approximation de la variété centrale donnée par le vecteur

⁴On pourrait, en choisissant $N_0 = 1/(\tau_p c \sigma)$, qui correspond à une condition d'égalité des deux termes de droite de l'équation de la dynamique de J (A.1), se ramener au cas $G = 1$. Nous ne le faisons pas tout de suite pour garder dans le modèle ce paramètre G montrant explicitement l'influence de l'émission stimulée.

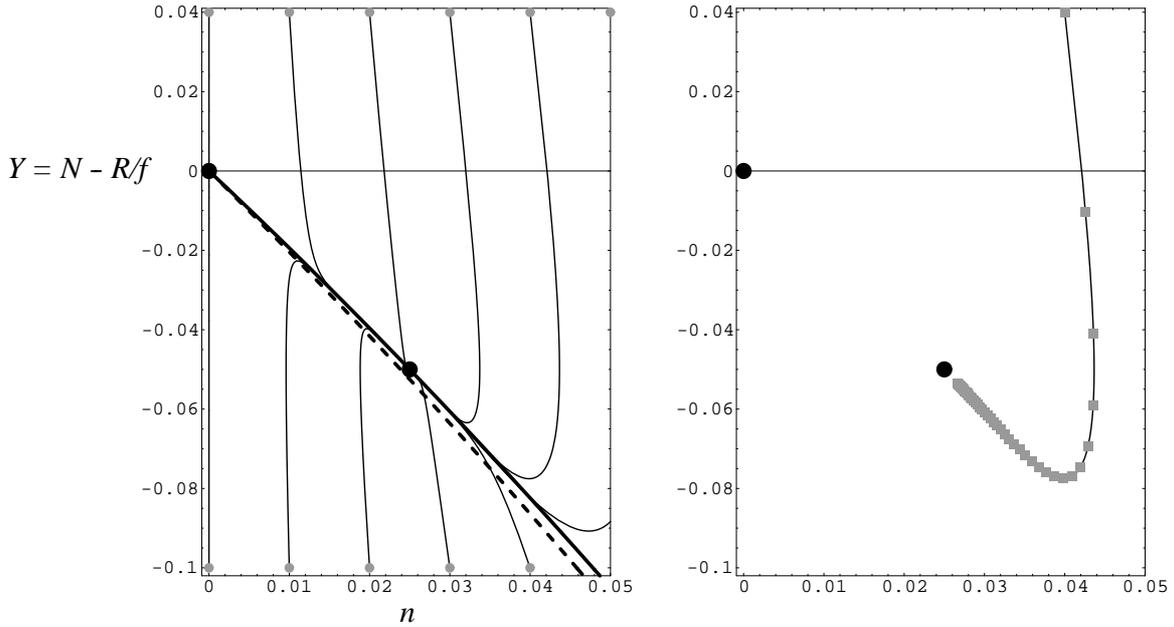


Fig. A.1 – *Gauche* : portrait de phase du système modèle de laser (A.3). Les trajectoires noires ont été obtenues par intégration numérique du système en partant des conditions initiales données par les disques gris. Les disques noirs indiquent les points fixes du système (A.4) et (A.5). La courbe épaisse est la *variété centrale* donnée par l'expression analytique (A.14). La courbe en pointillés est une approximation d'ordre plus faible de la variété centrale obtenue en ne tenant pas compte du terme dépendant de ϵ dans (A.14). *Droite* : déroulement temporel de la trajectoire partant à $t = 0$ de $n = Y = 0.04$, représenté par des carrés donnant l'état du système aux instants $t = 0, 1, 2, \dots, 40$. Notez le transitoire rapide durant lequel on atteint la variété centrale, puis la dynamique lente sur cette variété centrale.

du membre de droite de (A.14) (hors les *t.o.s.*), montrée par la courbe épaisse, est excellente. Par contre l'approximation d'ordre plus faible

$$V \simeq \left(-\frac{1}{f}A + \frac{G}{f^2} \left(1 - \frac{1}{f} \right) A^2 \right)$$

donne des résultats moins bons (courbe en pointillés), ce qui montre que la prise en compte de l'expression complète du mode $V_1(+,\epsilon)$, qui introduit le fameux terme en ϵ , est importante pour une bonne description de la variété centrale.

A.2 Modèles de réactions chimiques

Les systèmes chimiques sont intéressants car, d'une part ils sont dynamiques (au moins pendant un certain temps, ou à condition d'assurer une alimentation continue en réactifs), et d'autre part ils peuvent être selon les réalisations expérimentales soit « non-étendus » soit « étendus » : alors que dans le cas de réacteurs continuellement agités l'état du système est caractérisé (en première approximation) par des concentrations homogènes, dans des cas plus généraux ces systèmes sont caractérisés par des concentrations dépendant de l'espace.

A.2.1 Présentation des modèles - Mise sous forme adimensionnelle

Lengyel & Epstein (1991) se sont intéressés à la modélisation d'un système très étudié expérimentalement, à savoir la réaction $\text{ClO}_2^- - \text{I}^- - \text{MA}$ (chlorite-iodide-acide malonique). Les équations (7) et (8) de Lengyel & Epstein (1991) présentent leur modèle,

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt^*} = k'_1 - k'_2 X - 4k'_3 XY/(u + X^2), \\ \frac{dY}{dt^*} = k'_2 X - k'_3 XY/(u + X^2), \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

X étant la concentration $[\text{I}^-]$ en ions iodide et Y la concentration $[\text{ClO}_2^-]$ en ions chlorite, supposées dans un premier temps homogènes, t^* étant le temps physique. Dans ces équations les coefficients k'_1 , k'_2 et k'_3 , strictement positifs, sont des fonctions de constantes cinétiques intrinsèques et de certaines concentrations contrôlées extérieurement. D'autre part les termes en $1/(u + X^2)$ décrivent des effets d'inhibition par le réactif I^- ; la concentration caractéristique du début de l'inhibition \sqrt{u} donne justement une échelle naturelle de concentration. Adimensionnant les concentrations avec cette échelle, nous introduisons donc

$$x = \frac{X}{\sqrt{u}} \quad \text{et} \quad z = \frac{Y}{\sqrt{u}}. \quad (\text{A.16})$$

En divisant les équations (A.15) par \sqrt{u} on obtient, en posant

$$K_1 = \frac{k'_1}{\sqrt{u}} \quad \text{et} \quad K_3 = \frac{k'_3}{\sqrt{u}}, \quad (\text{A.17})$$

que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt^*} = K_1 - k'_2 x - 4K_3 xz/(1 + x^2), \\ \frac{dz}{dt^*} = k'_2 x - K_3 xz/(1 + x^2). \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Reste à adimensionner le temps en utilisant $1/k'_2$ comme échelle, c'est-à-dire en posant

$$t = k'_2 t^*. \quad (\text{A.19})$$

En posant donc

$$\alpha = \frac{K_1}{k'_2} = \frac{k'_1}{\sqrt{u}k'_2}, \quad \beta = \frac{K_3}{k'_2} = \frac{k'_3}{\sqrt{u}k'_2}, \quad (\text{A.20})$$

il vient, en divisant les équations (A.18) par k'_2 , et en utilisant le point pour désigner l'opérateur d/dt ,

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - x - 4\beta xz/(1 + x^2), \\ \dot{z} = x - \beta xz/(1 + x^2). \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Une dernière simplification s'obtient en posant

$$y = \beta z = \beta \frac{Y}{\sqrt{u}} \quad (\text{A.22})$$

d'où, en reprenant la première équation et en multipliant la deuxième équation par β ,

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - x - 4xy/(1 + x^2), \\ \dot{y} = \beta x - \beta xy/(1 + x^2). \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Dans le cas d'un système inhomogène, par exemple les réacteurs membranaires en gels utilisés par Castets et al. (1990) ou Ouyang & Swinney (1991) (voir la figure A.4a et aussi la figure B.16 de Rabinovich et al. 2000), x et y deviennent fonction de deux coordonnées spatiales x_1 et x_2 , et des effets de diffusion existent; il faut alors remplacer les équations différentielles ordinaires (A.23) par les équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t x = \alpha - x - 4xy/(1 + x^2) + D_x \Delta x, \\ \partial_t y = \beta x - \beta xy/(1 + x^2) + D_y \Delta y, \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

D_x et D_y étant les diffusivités adimensionnelles respectives des ions iodide et chlorite.

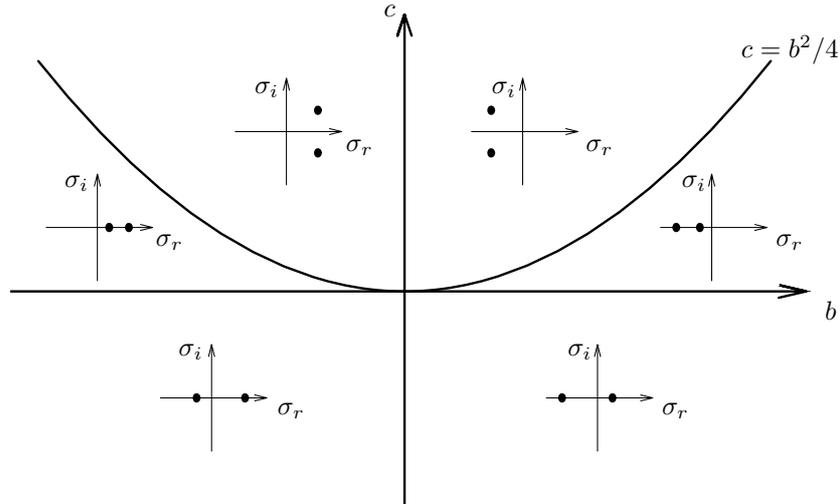


Fig. A.2 – Diagramme montrant la position des valeurs propres associées au **problème d'évolution linéarisé général** $\dot{V} = L \cdot V$ en dimension 2, dans le cas d'une matrice L donnée par (A.28), donc d'une équation caractéristique de la forme (A.29). En exercice le lecteur annotera cette figure en y notant les régions de stabilité et d'instabilité, et en précisant de quels types d'instabilités il s'agit.

A.2.2 Étude du modèle « non-étendu »

Nous nous intéressons seulement ici au cas où les concentrations sont spatialement homogènes (cas d'un réacteur agité) i.e. au système (A.23). Son seul point fixe est donné par

$$x_0 = \alpha/5, \quad y_0 = 1 + (\alpha/5)^2. \quad (\text{A.25})$$

Afin d'étudier sa stabilité, nous introduisons l'écart à cette solution d'équilibre

$$V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

et mettons (A.23) sous la forme

$$\dot{V} = L \cdot V + N_2(V,V) + N_3(V,V,V) + t.o.s. \quad (\text{A.27})$$

L'opérateur L prend ici une forme plus compliquée que celle trouvée pour le modèle de laser. On a donc intérêt à l'écrire sous la **forme générale**

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

avec des coefficients a_{ij} réels, et à étudier en général la position des valeurs propres associées σ_+ et σ_- dans le plan complexe. Elles sont solutions de l'équation caractéristique

$$\sigma^2 + b\sigma + c = 0 \quad \text{avec} \quad b = -(a_{11} + a_{22}) \quad \text{et} \quad c = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (\text{A.29})$$

Le discriminant de cette équation étant $\Delta = b^2 - 4c$, on obtient que

$$\begin{aligned} c < b^2/4 &\iff 0 < \Delta &\iff \text{valeurs propres réelles,} \\ c > b^2/4 &\iff 0 > \Delta &\iff \text{valeurs propres complexes.} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Les fonctions symétriques

$$\sigma_+ + \sigma_- = -b \quad \text{et} \quad \sigma_+ \sigma_- = c \quad (\text{A.31})$$

étant connues, il est alors facile de positionner systématiquement les valeurs propres σ_{\pm} comme cela est fait figure A.2. On obtient ici que le point fixe (A.25) est stable sauf lorsque

$$\beta < \beta_c = 3\alpha/5 - 25/\alpha, \quad (\text{A.32})$$

auquel cas une instabilité *oscillante* a lieu. Des oscillations chimiques ont effectivement été observées expérimentalement dans ce système pour certaines valeurs des concentrations, comme cela est décrit par exemple dans Lengyel et al. (1990). Afin de décrire le développement faiblement non linéaire de cette instabilité, nous appliquons le schéma de la section 2.2, dans le cas où $\alpha = 10$ pour simplifier les calculs. Alors $\beta_c = 7/2$, et nous introduisons naturellement le paramètre de contrôle réduit

$$\epsilon = 1 - \beta/\beta_c \quad \text{de sorte que} \quad \beta = \beta_c(1 - \epsilon) \quad (\text{A.33})$$

et $\epsilon > 0$ signale l'instabilité. On trouve une fréquence angulaire critique

$$\omega_c = \sqrt{7} \quad (\text{A.34})$$

et un mode critique

$$V_1(+) = \begin{pmatrix} (7 - 5i\sqrt{7})/28 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.35})$$

que l'on donne pour $\epsilon = 0$. Nous notons naturellement $V_1(-) = V_1(+)^*$ son complexe conjugué; avec la technique de l'annexe C, on calcule le mode adjoint

$$U_1(+) = \begin{pmatrix} -2i\sqrt{7}/5 \\ (5 + i\sqrt{7})/10 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

Avec la technique de la section 1.8.1 par exemple, on obtient à partir de l'évaluation du terme d'ordre ϵ dans

$$\langle L_{\epsilon} \cdot V_1(+), U_1(+) \rangle$$

le temps caractéristique de l'instabilité et le décalage en fréquence linéaire

$$\tau = \frac{10}{7}, \quad s = \frac{5}{\sqrt{7}}. \quad (\text{A.37})$$

L'élimination des modes quadratiques esclaves de la partie « active » de la solution

$$V_a = A \exp(-i\omega_c t) V_1(+) + c.c. \quad (\text{A.38})$$

conduit d'une part à une contribution lentement variable selon (2.69), soit $|A|^2 V_2(+, -)$ avec

$$V_2(+, -) = -L_0^{-1} \cdot N_2(V_1(+), V_1(-)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/28 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.39})$$

d'autre part à une contribution en $\exp(-2i\omega_c t)$ selon (2.68), soit $A^2 \exp(-2i\omega_c t) V_2(+, +)$ avec

$$V_2(+, +) = -(L_0 + 2i\omega_c)^{-1} \cdot N_2(V_1(+), V_1(+)) = \begin{pmatrix} 4(7 + 3i\sqrt{7})/735 \\ (11i\sqrt{7} - 1)/420 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.40})$$

On en déduit le coefficient de saturation complexe γ dans l'équation d'amplitude (2.72)

$$\partial_t A = \frac{1 + is}{\tau} \epsilon A - \gamma |A|^2 A \quad (\text{A.41})$$

selon (2.73), soit

$$\gamma = \gamma_{10} + \gamma_{12} + \gamma_{111}$$

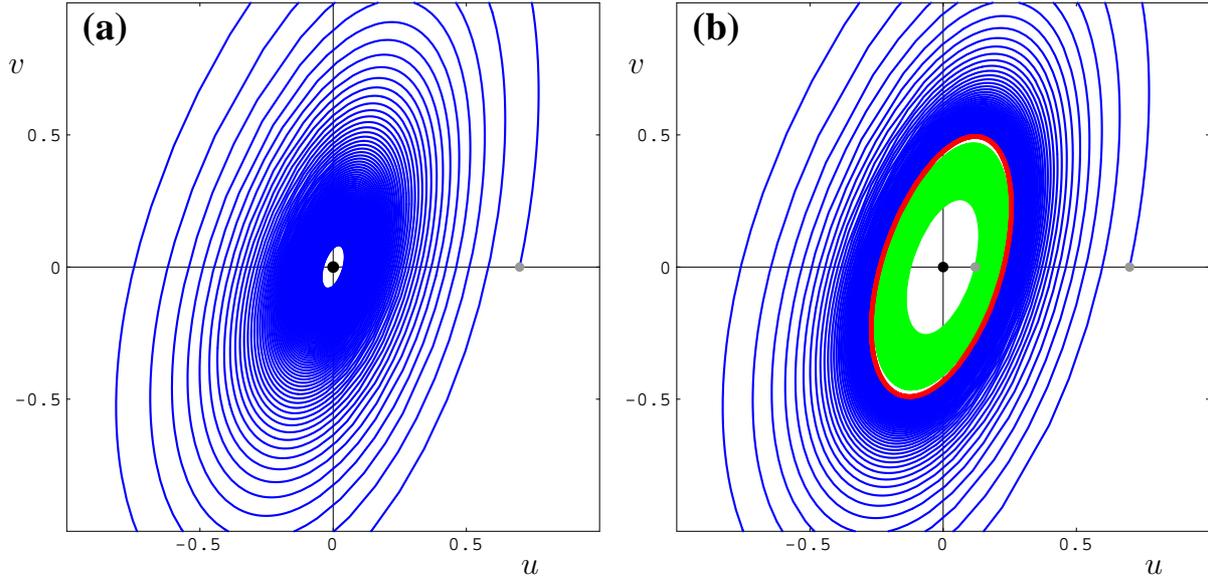


Fig. A.3 – Portraits de phase, dans le plan (u, v) défini par (A.26), du modèle (A.23) de réaction chimique de Lengyel & Epstein pour $\alpha = 10$, $\beta = \beta_c(1 - \epsilon)$. **(a)** : $\epsilon = -0.01$ sous le seuil de la bifurcation oscillante. La trajectoire partie du disque gris $(u, v) = (0.7, 0)$ spirale lentement vers le point fixe indiqué par le disque noir. **(b)** : $\epsilon = +0.01$ au-dessus du seuil de la bifurcation oscillante. La trajectoire bleue partie du disque gris $(u, v) = (0.7, 0)$ spirale maintenant vers le *cycle limite* indiqué en rouge. La trajectoire verte partie du disque gris $(u, v) = (0.12, 0)$ spirale elle aussi mais « de l'intérieur » vers ce cycle limite. Ce cycle limite a été calculé *analytiquement* grâce aux expressions (A.43) et (A.44) obtenues par l'analyse faiblement non linéaire.

avec

$$\begin{aligned}\gamma_{10} &= -\langle N_2(V_1(+)|V_2(+,-)), U_1(+) \rangle = -3/350, \\ \gamma_{12} &= -\langle N_2(V_1(-)|V_2(+,+)), U_1(+) \rangle = (63 - 67i\sqrt{7})/14700, \\ \gamma_{111} &= -\langle N_3(V_1(+), V_1(+)|V_1(-)), U_1(+) \rangle = (21 + i\sqrt{7})/175.\end{aligned}$$

Au bilan

$$\gamma = g(1 + ic) \quad \text{avec} \quad g = 81/700 \quad \text{et} \quad c = 17/(243\sqrt{7}). \quad (\text{A.42})$$

La positivité de g indique une *bifurcation oscillante sur-critique*. L'expression de la solution oscillante faiblement non linéaire déduite

$$V = 2\text{Re}[A \exp(-i\omega_c t) V_1(+)] + |A|^2 V_2(+,-) + 2\text{Re}[A^2 \exp(-2i\omega_c t) V_1(+,+)] \quad (\text{A.43})$$

dans laquelle on injecte, selon (2.74), (2.76) et (2.77),

$$A = \sqrt{\epsilon/(\tau g)} \exp[i(s - c)\epsilon t/\tau], \quad (\text{A.44})$$

conduit à une très bonne description du « *cycle limite* » lorsque $\epsilon > 0$, comme cela est montré sur la figure A.3b.

A.2.3 Étude du modèle « étendu »

Dans le cas d'un réacteur membranaire supposé très étendu dans les directions x_1 et x_2 , nous utilisons pour simplifier des conditions limites périodiques en x_1 et x_2 . Nous menons donc l'analyse de stabilité du modèle (A.24) en recherchant les modes propres sous la forme de modes de Fourier

$$u = \tilde{u} \exp[i(qx_1 + px_2)], \quad v = \tilde{v} \exp[i(qx_1 + px_2)], \quad (\text{A.45})$$

$\mathbf{k} = q\hat{\mathbf{e}}_1 + p\hat{\mathbf{e}}_2$ étant le vecteur d'onde du mode. On est conduit à une nouvelle matrice représentant l'opérateur d'évolution linéarisé pour \tilde{u} et \tilde{v} ,

$$L' = \begin{pmatrix} a_{11} - D_x k^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - D_y k^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.46})$$

$k = \sqrt{q^2 + p^2}$ étant le nombre d'onde. On a donc à nombre d'onde fixé une nouvelle équation caractéristique

$$\sigma^2 + b'\sigma + c' = 0 \quad \text{avec} \quad b' = b + D_x k^2 + D_y k^2 \quad \text{et} \quad c' = c - a_{22} D_x k^2 - a_{11} D_y k^2 + D_x D_y k^4. \quad (\text{A.47})$$

On peut donc avoir stabilité vis-à-vis de perturbations homogènes $k = 0$, i.e.

$$b > 0 \quad \text{et} \quad c > 0, \quad (\text{A.48})$$

mais instabilité vis-à-vis de perturbations structurées $k \neq 0$, i.e.

$$c' < 0. \quad (\text{A.49})$$

Une étude de la fonction $c'(k)$ montre que ceci se produit si

$$a_{11} D_y + a_{22} D_x > 2\sqrt{D_x D_y c} \quad (\text{A.50})$$

qui est l'équation (13) de Lengyel & Epstein (1991). Comme on est ici dans le cas d'un couple « activateur-inhibiteur » vérifiant $a_{11} > 0$ et $a_{22} < 0$, cette dernière condition n'est remplie que si

$$D_y \gg D_x \quad (\text{A.51})$$

i.e. la diffusion de l'inhibiteur est beaucoup plus rapide que celle de l'activateur : ceci arrive d'après Lengyel & Epstein parce que $X = I^-$ est « ralenti » par des liaisons temporaires avec des espèces piégées par le gel. On aboutit d'après la figure A.2, lorsque c' devient négatif par variation de certains paramètres de contrôle, à une **instabilité stationnaire structurante** de nombre d'onde critique

$$k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{a_{11}}{D_x} + \frac{a_{22}}{D_y} \right)}. \quad (\text{A.52})$$

Une application numérique conduit d'après Lengyel & Epstein à une longueur d'onde

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \simeq 0,15 \text{ mm} \quad (\text{A.53})$$

de l'ordre de grandeur de celle mise en évidence par Castets et al. (1990) et visible sur la figure A.4c. À cause de l'isotropie du système, on n'observe pas un seul vecteur d'onde dominant mais trois vecteurs d'ondes dominants répartis à $2\pi/3$ sur un cercle, ce qui conduit à une structure hexagonale. La formation de telles structures peut s'expliquer par une résonance, et être modélisée par trois équations d'amplitudes couplées, comme cela est par exemple discuté dans le chapitre «*crystal formation*» de Rabinovich et al. (2000). L'expérience de Castets et al. (1990) a été reprise et améliorée par Ouyang & Swinney (1991), qui ont utilisé une membrane beaucoup plus étendue. Leurs résultats présentés figure A.5 montrent, en fonction de certains paramètres de contrôle, des structures à un, deux ou trois vecteurs d'ondes dominants. L'intérêt des scientifiques pour de telles instabilités en chimie et biochimie provient de ce qu'elles pourraient expliquer la génération spontanée de certaines formes observées en biologie, comme cela a été suggéré par Turing (1952). Cet article représente d'ailleurs un exemple remarquable de travail en modélisation, puisque Turing a imaginé et décrit des structures de réaction-diffusion qui n'ont pu être mise en évidence expérimentalement que trente-huit ans plus tard, par Castets et al. (1990) justement⁵.

⁵En hommage à ce travail, ces structures sont souvent désignées comme des « **structures de Turing** » ; voir à ce sujet Mori & Kuramoto (1997) et Rabinovich et al. (2000).

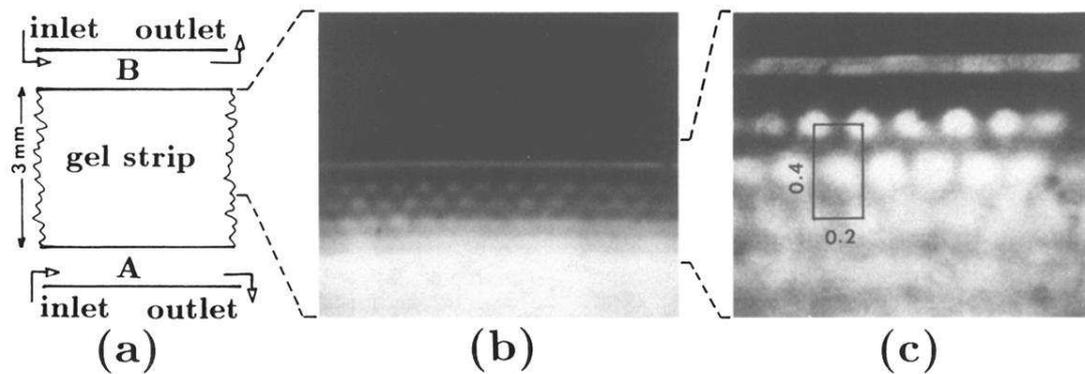


Fig. A.4 – Figure tirée de Castets et al. (1990) montrant la première réalisation expérimentale d'une *instabilité structurante dans un système de réaction-diffusion*. (a) : schéma de principe du réacteur membranaire utilisé, prenant la forme d'une bande d'épaisseur 1 mm dans la direction perpendiculaire au plan de la figure, de largeur 3 mm comme indiqué, et de longueur 20 mm. Les réactants sont transmis au gel par contact avec les réservoirs continuellement agités A et B. (b) : des gradients de concentrations s'établissent dans l'épaisseur du gel, et sont révélés par un indicateur coloré. (c) : zoom sur la zone chimiquement active montrant des structures qui brisent la symétrie d'invariance par translations parallèlement à la grande direction de la bande. Les dimensions indiquées sont en millimètres.

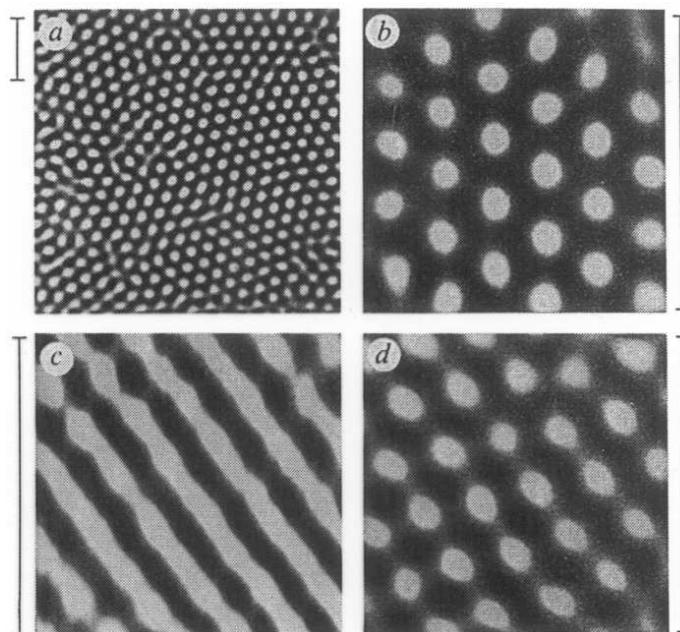


Fig. A.5 – Figure tirée de Ouyang & Swinney (1991) présentant des instabilités structurantes dans un système de réaction-diffusion du type de celui de Castets et al. (1990). Les barres à côté de chaque image font 1 mm. Selon les valeurs de certaines concentrations imposées dans les réservoirs d'alimentation, on observe des structures à un (c), deux (d) ou trois (a et b) vecteurs d'ondes dominants. On notera aussi sur **a** la présence de *défauts*.

Annexe B

Exemples complémentaires en hydrodynamique : écoulements cisailés

On rencontre fréquemment dans des systèmes naturels ou industriels des écoulements *cisailés* tels la *couche de mélange* présentée sur la gauche de la figure B.1, ou encore l'*écoulement de Poiseuille* présenté sur sa droite. Dans ces systèmes « réels » ces écoulements sont typiquement tridimensionnels ; par exemple les canalisations le plus souvent utilisées sont cylindriques. Il apparaît cependant intéressant, d'un point de vue fondamental, d'étudier le cas plus simple d'écoulements de base *bidimensionnels*. C'est ce que nous faisons dans la première partie (sections B.1 à B.3) de ce complément de cours, qui a aussi pour but de montrer que des analyses de stabilité peuvent donner des informations intéressantes sur le début de la *transition à la turbulence* ; on présentera aussi par la même occasion des exemples concrets et pertinents de bifurcations sous-critiques. Dans une seconde partie (section B.4), qui sera surtout développée à l'oral, nous donnerons quelques éléments sur des résultats d'analyse fortement non linéaire très récents obtenus pour des *écoulements tridimensionnels*, notamment en *canalisations cylindriques*.

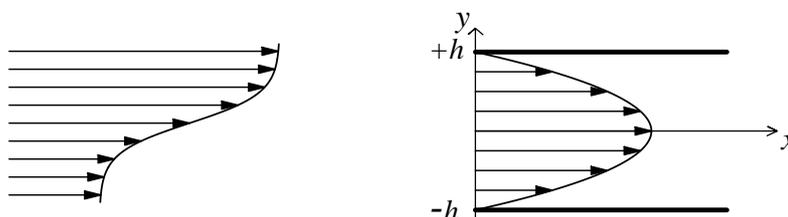


Fig. B.1 – Exemples d'écoulements cisailés bidimensionnels unidirectionnels représentés par leur profil de vitesse : couche de mélange à gauche, écoulement de Poiseuille plan à droite.

B.1 Généralités

B.1.1 Contraintes de Reynolds

Rappelons que l'*équation de Navier-Stokes* pour un fluide visqueux incompressible isotherme, déjà rencontrée, en présence d'effets thermiques non pertinents ici, section 1.2.2, peut s'écrire sous la forme équivalente¹

$$\rho \partial_t \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \operatorname{div} \bar{\tau} \quad (\text{B.1})$$

¹Dans cete annexe p est la pression « motrice » somme de la pression hydrodynamique et de l'énergie potentielle volumique de pesanteur.

où le seul terme non linéaire, physiquement le terme d'advection du champ de vitesse par lui-même $-\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, est exprimé comme la divergence du « *tenseur des contraintes de Reynolds* »

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = -\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} . \quad (\text{B.2})$$

Cette façon de présenter le terme non linéaire, qui pourrait sembler un jeu d'écriture gratuit, est en fait très féconde, que cela soit d'un point de vue numérique, en modélisation de la turbulence, ou, comme nous allons le voir, en analyse de stabilité.

En adimensionnant les longueurs à l'aide d'une unité de longueur h correspondant à une taille caractéristique de l'écoulement étudié, les vitesses en unité d'une vitesse caractéristique U , et la pression en unité de ρU^2 , l'équation (B.1) devient

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla p + R^{-1} \Delta \mathbf{v} + \mathbf{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \quad (\text{B.3})$$

avec

$$R = \frac{Uh}{\nu} \text{ le nombre de Reynolds} \quad (\text{B.4})$$

et

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = -\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \text{ le tenseur des contraintes de Reynolds adimensionné.} \quad (\text{B.5})$$

B.1.2 Équations régissant la stabilité d'un écoulement bidimensionnel unidirectionnel

Un écoulement *bidimensionnel unidirectionnel*

$$\mathbf{v} = U_0(y) \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{B.6})$$

peut être solution de (B.3) quelque soit la fonction $U_0(y)$ lorsque le terme visqueux est négligeable, c'est-à-dire lorsque le nombre de Reynolds est grand - c'est par exemple le cas pour une couche de mélange « rapide » -, ou à la condition que $U_0'''(y)$ soit nul et qu'un gradient de pression homogène dans la direction de l'écoulement $p'_0(x) \hat{\mathbf{x}}$ soit imposé lorsque le terme visqueux est important - c'est par exemple le cas pour l'écoulement de Poiseuille plan -. La stabilité de cet écoulement s'étudie en introduisant de petites perturbations de la vitesse et de la pression i.e. en effectuant les changements

$$\mathbf{v} \rightarrow U_0(y) \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \quad \text{et} \quad p \rightarrow p_0 + p , \quad (\text{B.7})$$

puis en résolvant (B.3),

$$\partial_t \mathbf{v} = -\nabla p + R^{-1} \Delta \mathbf{v} - U_0 \partial_x \mathbf{v} - v_y U_0' \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \quad (\text{B.8})$$

avec

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = -\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} . \quad (\text{B.9})$$

Un résultat important dû à Squire (1933), qui se prouve à l'aide d'une *transformation* des équations qui porte son nom², montre que ce sont toujours des *perturbations bidimensionnelles xy*, vérifiant

$$\partial_z = 0 \quad \text{et} \quad v_z = 0 , \quad (\text{B.10})$$

qui possèdent les taux de croissance linéaires les plus grands. On vérifie alors facilement que l'équation de Navier-Stokes suivant z est trivialement vérifiée, et on introduit grâce à la condition d'incompressibilité une *fonction courant* ψ telle que

$$\mathbf{v} = \mathbf{rot}(\psi \hat{\mathbf{z}}) = (\partial_y \psi) \hat{\mathbf{x}} - (\partial_x \psi) \hat{\mathbf{y}} . \quad (\text{B.11})$$

²Pour une présentation de cette transformation on pourra aussi consulter, par exemple, Huerre & Rossi (1998) ou Drazin (2002).

On élimine ensuite la pression en résolvant l'équation de la vorticité, dont la seule composante non triviale est suivant $\hat{\mathbf{z}}$,

$$\underbrace{\partial_t(-\Delta\psi)}_{D\cdot\partial_t V} = \underbrace{-R^{-1}\Delta\Delta\psi + U_0\partial_x(\Delta\psi) - U_0''(\partial_x\psi)}_{L_R\cdot V} + \underbrace{(\partial_x^2 - \partial_y^2)\tau_{xy} + \partial_x\partial_y(\tau_{yy} - \tau_{xx})}_{N_2(V,V)}. \quad (\text{B.12})$$

On a fait figurer sous cette équation les notations standards des divers opérateurs en considérant que le vecteur d'état local est seulement

$$V = (\psi). \quad (\text{B.13})$$

Cependant il faut bien prendre garde au fait que la résolution de l'équation de la vorticité assure seulement l'existence d'un champ de pression p complètement quelconque, qui peut donc, éventuellement, être non physique au sens où il ne respecte pas les conditions globales imposées sur l'écoulement,

- soit établi à gradient de pression moyen fix ³, i.e., en notant $\langle \cdot \rangle_x$ la valeur moyenne par rapport à x ,

$$\langle \partial_x p \rangle_x = 0; \quad (\text{B.14})$$

- soit établi à débit moyen fixé,

$$\langle \langle v_x \rangle_x \rangle_y = 0. \quad (\text{B.15})$$

Il est clair qu'au stade de l'analyse linéaire de stabilité, le passage à des modes normaux de la forme (B.20) avec $q \neq 0$ assurera que

$$\langle \partial_x p \rangle_x = \langle v_x \rangle_x = 0,$$

donc les deux conditions (B.14) et (B.15) seront trivialement vérifiées. Par contre, au stade non linéaire quadratique, un écoulement moyen homogène en x , de la forme $U_2(y)\hat{\mathbf{x}}$, pourra éventuellement être engendré.   ce stade l'équation de la vorticité (B.12) ne suffira pas ni au calcul du champ de pression moyen associé $p_2(y)$ ni même au calcul complet de $U_2(y)$. En effet l'équation de la vorticité (B.12) possède comme « modes globaux neutres » tous les écoulements de la forme $U_2(y)\hat{\mathbf{x}}$ avec U_2 polynôme de degré 2 en y et les champ de pression de la forme $p_2(y)$. Il sera donc indispensable, au stade non linéaire, de résoudre pour l'écoulement moyen l'équation de Navier-Stokes moyenne dans la direction x ,

$$\partial_t \langle v_x \rangle_x = -\langle \partial_x p \rangle_x + R^{-1}\Delta \langle v_x \rangle_x + \partial_y \langle \tau_{xy} \rangle_x \quad (\text{B.16})$$

complétée des conditions soit (B.14) soit (B.15). Avec ce schéma, l'équation de la vorticité (B.12) ne sert qu'à calculer la fonction de courant « modul e » ψ vérifiant

$$\langle \psi \rangle_x = 0; \quad (\text{B.17})$$

on peut d'ailleurs noter que la nécessité d'ajouter à l'équation (B.12) les équations (B.16), (B.14) ou (B.15) montre que l'on n'est pas stricto sensu dans le cadre simple introduit section 1.1.

Les conditions limites à utiliser

$$v_y = 0 \quad \text{en} \quad y = y_{\pm} \quad (\text{B.18})$$

sont des conditions de non-pénétration aux parois dans le cas d'un écoulement confiné, où typiquement $y_{\pm} = \pm 1$, de décroissance à l'infini dans le cas d'un écoulement non confiné, où $y_{\pm} = \pm\infty$. En fluides visqueux, i.e.   Reynolds fini, elles doivent être complétées par les conditions d'adhérence ou de décroissance à l'infini

$$v_x = 0 \quad \text{en} \quad y = y_{\pm}. \quad (\text{B.19})$$

³Ou « pertes de charge » fixées en jargon d'hydraulicien.

B.1.3 Passage à des modes normaux - Équations linéarisées

Pour simplifier on complète en général les conditions limites dans la direction y précédentes par des conditions limites périodiques dans la direction x , ce qui permet de rechercher les modes normaux complexes du problème sous la forme de modes de Fourier

$$\psi_1 = \Psi(y) \exp(iqx) . \quad (\text{B.20})$$

On peut vérifier que les modes homogènes $q = 0$ sont tous amortis. Pour $q > 0$, on écrit traditionnellement en hydrodynamique la valeur propre sous la forme

$$\sigma = -i\omega = -icq \quad (\text{B.21})$$

où ω est une fréquence angulaire complexe et c une vitesse de phase complexe; un tel mode est amplifié si $c_i = \text{Im}(c) > 0$. On obtient alors, par linéarisation de l'équation de la vorticité (B.12),

$$iqc\Delta\Psi = -R^{-1}\Delta\Delta\Psi + iq(U_0\Delta\Psi - U_0''\Psi) \quad (\text{B.22})$$

qui porte le nom d'*équation de Rayleigh* dans le cas non visqueux ($R^{-1} = 0$), d'*Orr-Sommerfeld* dans le cas visqueux ($R^{-1} > 0$). Les conditions limites (B.18) deviennent, dans le cas intéressant où $q > 0$,

$$\Psi = 0 \quad \text{en} \quad y = y_{\pm} , \quad (\text{B.23})$$

à compléter dans le cas visqueux par

$$\Psi' = 0 \quad \text{en} \quad y = y_{\pm} . \quad (\text{B.24})$$

B.1.4 Contrainte de Reynolds moyenne à l'ordre quadratique

À l'ordre non linéaire quadratique $|A|^2$ en l'amplitude A d'un mode pur réel

$$\psi = A\psi_1 + A^*\psi_1^* = A\Psi(y) \exp(iqx) + A^*\Psi^*(y) \exp(-iqx) , \quad (\text{B.25})$$

le seul terme source éventuel d'écoulement moyen dans l'équation moyenne (B.16) est la dérivée par rapport à y de

$$\bar{\tau}_{xy} = -\langle v_x v_y \text{ à l'ordre } |A|^2 \rangle_x = -iq\Psi'(y)\Psi^*(y) + c.c. = 2q \text{Im}(\Psi'\Psi^*) . \quad (\text{B.26})$$

B.2 Écoulements sujets à des instabilités « non visqueuses »

Dans cette section on s'intéresse à des écoulements typiquement « non visqueux » pour lesquels on peut négliger le terme en R^{-1} dans l'équation (B.22).

B.2.1 Critère d'instabilité de Rayleigh

Dans un article mémorable, Rayleigh (1880) a eu l'idée géniale d'estimer de deux façons différentes l'effet global du terme non linéaire $\partial_y \langle \tau_{xy} \rangle_x$ à l'ordre quadratique dans l'équation de l'écoulement moyen (B.16), soit encore $\partial_y \bar{\tau}_{xy}$ avec la notation (B.26). Naïvement, on aurait pu penser que ce calcul n'a aucune pertinence en analyse linéaire de stabilité, mais nous allons voir que ce n'est sûrement pas le cas⁴.

⁴Mentionnons que Rayleigh n'a pas présenté ce calcul comme nous le faisons pour la bonne raison que le concept de « contraintes de Reynolds » est ultérieur. Il fut introduit à la suite de Reynolds (1895) qui établit la loi d'évolution de l'énergie cinétique totale du champ de vitesse de perturbation \mathbf{v} , cf. par exemple Drazin (2002). Un point intéressant est que, dans cette équation de l'énergie, le seul terme « moteur » permettant la croissance éventuelle de perturbations est un terme qui apparaît dans la double contraction $\bar{\mathbf{D}} : \bar{\boldsymbol{\tau}}$ où $\bar{\mathbf{D}}$ est le tenseur des taux de déformation, soit le terme $\int_{y_-}^{y_+} u_0'(y) \bar{\tau}_{xy} dy$. Pour ces interprétations énergétiques, on se penchera avec profit sur le problème 2.

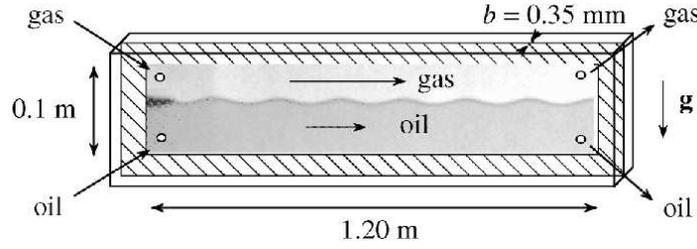


Fig. B.2 – Écoulement de Meignin et al. (2003), cisailé interfacial quasi bidimensionnel par confinement dans une cellule très mince dite de Hele-Shaw.

Rayleigh suppose comme point de départ l'existence d'un mode amplifié de (B.22), pour lequel on peut donc écrire, après division de cette équation par $iq(U_0 - c)$, que

$$\Delta\Psi = \Psi'' - q^2\Psi = \frac{U_0''}{U_0 - c} \Psi. \quad (\text{B.27})$$

En conséquence la formule (B.26) montre que

$$\partial_y \bar{\tau}_{xy} = 2q \operatorname{Im}(\Psi''\Psi^*) = 2q \operatorname{Im}\left(\frac{U_0''}{U_0 - c} |\Psi|^2\right) = \frac{2q c_i U_0''}{(U_0 - c_r)^2 + c_i^2} |\Psi|^2. \quad (\text{B.28})$$

D'autre part, Rayleigh remarque que, d'après les conditions limites (B.23),

$$\int_{y_-}^{y_+} (\partial_y \bar{\tau}_{xy}) dy = [\bar{\tau}_{xy}]_{y_-}^{y_+} = 0.$$

Il obtient ainsi, comme par hypothèse $c_i > 0$,

$$\int_{y_-}^{y_+} \frac{U_0''}{(U_0 - c_r)^2 + c_i^2} |\Psi|^2 dy = 0. \quad (\text{B.29})$$

Il peut donc formuler son *critère d'instabilité* : pour qu'un profil $U_0(y)$ d'écoulement non visqueux soit instable, il faut nécessairement que la fonction $U_0''(y)$ change de signe dans le domaine d'écoulement, c'est-à-dire que l'écoulement possède un *point d'inflexion*. En termes heuristiques, ceci veut dire que l'écoulement doit être « suffisamment » cisailé pour être instable. Ceci suggère que la couche de mélange de la figure B.1 peut présenter des instabilités non visqueuses ; c'est effectivement le cas. Par contre, on peut affirmer que l'écoulement de Poiseuille plan, non inflexionnel, est stable en non-visqueux ; ceci aussi est vérifié. Avant d'en venir plus précisément à un exemple de « couche de mélange » au sens large, mentionnons que l'on peut raffiner le critère d'instabilité de Rayleigh en un critère d'instabilité dit de Fjørtoft, cf. par exemple Huerre & Rossi (1998).

B.2.2 Exemple : instabilités interfaciales de Kelvin-Helmholtz

L'étude d'une couche de mélange du type de celle présentée figure B.1 s'avère compliquée à la fois du point de vue expérimental, puisqu'il est très difficile d'imposer à l'écoulement de base de rester strictement unidirectionnel sans évolution aucune dans la direction x , et du point de vue théorique, puisque, même dans la configuration idéalisée unidirectionnelle, des calculs numériques sont nécessaires pour calculer les modes normaux de l'équation de Rayleigh (B.22). Les choses sont plus simples pour un système comportant une *interface plane* entre un fluide lourd se déplaçant lentement et un fluide léger se déplaçant plus rapidement, système que l'on peut considérer heuristiquement comme une couche de mélange d'épaisseur nulle. Une réalisation expérimentale de ce système est présentée sur la figure B.2 ; on peut aussi penser, plus poétiquement, au vent au dessus de la surface de la mer.

C'est un exercice classique d'hydrodynamique de niveau M1 que de considérer justement le cas idéal non confiné d'une mer infinie non visqueuse, de densité ρ et de vitesse $U_g \hat{x}$, surmontée d'une atmosphère infinie non visqueuse, de densité ρ_g et de vitesse $U_g \hat{x}$. En tenant compte d'une tension superficielle de coefficient γ à l'interface

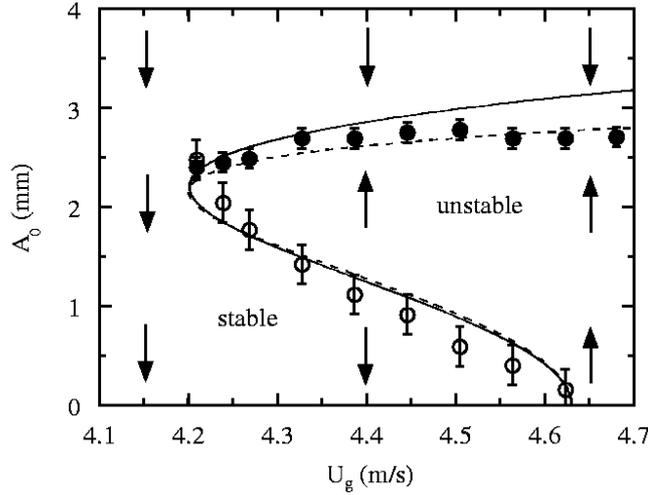


Fig. B.3 – Diagramme de réponse de l'expérience de Meignin et al. (2003) à des perturbations localisées d'amplitude A_0 à l'entrée du système. L'axe des abscisses indique les valeurs du paramètre de contrôle principal, à savoir la vitesse débitante de gaz U_g .

située dans la configuration de base en $y = 0$, ainsi que des effets de l'accélération de la pesanteur $-g\hat{y}$, on obtient⁵ les valeurs propres du problème ou plutôt les « vitesses de phase » complexes du problème⁶

$$c = \frac{\rho U + \rho_g U_g}{\rho + \rho_g} \pm i \sqrt{\frac{\rho \rho_g}{(\rho + \rho_g)^2} (U - U_g)^2 + \frac{g}{q} \frac{\rho_g - \rho}{\rho + \rho_g} - \frac{\gamma}{\rho + \rho_g} q}. \quad (\text{B.30})$$

On a instabilité si l'expression sous la racine est positive, avec alors deux modes de vitesses de phase complexes conjuguées⁷. Comme bien sûr $\rho_g < \rho$, le second terme, de pesanteur, sous la racine, est naturellement stabilisant⁸. De même la tension superficielle s'oppose à toute déformation de l'interface, comme le montre le dernier terme toujours négatif. Par contre le terme de cisaillement en $(U - U_g)^2$, toujours positif, est toujours déstabilisant. Par optimisation vis-à-vis du nombre d'onde q , on montre qu'une instabilité *structurante oscillante* se développe lorsque le cisaillement $|U - U_g|$ est suffisamment grand. Si l'application de cette théorie aux *vagues* qui se forment à la surface de la mer (la faire!) n'est pas totalement satisfaisante, notamment à cause d'effets de turbulence non pris en compte ici, ce modèle simple est néanmoins intéressant.

On peut aussi se poser la question du développement non linéaire de ces « *instabilités de Kelvin-Helmholtz* ». L'étude théorique correspondant au modèle idéalisé décrit ci-dessus a été menée par Weissman (1979) ; on peut noter qu'elle sort du cadre strict posé section 1.1 puisque deux milieux continus séparés par une interface doivent être considérés. Weissman (1979) a montré que la bifurcation associée aux instabilités de Kelvin-Helmholtz est typiquement *sous-critique*.

Dans la configuration expérimentale mise au point par Meignin et al. (2003), une bifurcation sous-critique a aussi été mise en évidence, de façon particulièrement propre puisque la réponse à des perturbations localisées d'amplitude bien contrôlée A_0 a été mesurée. Le diagramme de la figure B.3 montre les résultats de cette étude. Il représente une réalisation concrète et expérimentale du diagramme prédit théoriquement figure 2.5 ; d'ailleurs la courbe continue de la figure B.3 représente un ajustement à une *équation de Landau* strictement identique à l'équation (2.53). On peut aussi signaler que Meignin et al. (2003) ont poussé l'étude jusqu'à celles d'ondes modulées et non seulement pures, et ont montré qu'une *équation de Ginzburg-Landau* d'ordre 5 décrit bien leurs observations.

⁵À l'aide d'un modèle d'écoulements irrotationnels potentiels.

⁶Les hydrodynamiciens désignent l'équation (B.30) comme une « *relation de dispersion* ».

⁷Cette situation est typique d'un système *conservatif*.

⁸Lorsque l'on met un fluide lourd au dessus d'un fluide léger, on a par contre un effet déstabilisant de la pesanteur ; mais il s'agit là d'une autre histoire, appelée « *instabilité de Rayleigh-Taylor* ».

B.3 Écoulement sujet à des instabilités « visqueuses » : écoulement de Poiseuille plan

L'écoulement de Poiseuille plan (figure B.1) est en quelque sorte le modèle d'écoulement visqueux le plus simple. On peut le considérer comme se réalisant « au milieu » d'une conduite de section rectangulaire de grand rapport d'aspect, loin des bords les plus petits. En négligeant ces effets de bords, on considère donc une configuration de base du système où le champ de vitesse

$$\mathbf{v} = U_0(y)\hat{\mathbf{x}} = (1 - y^2)\hat{\mathbf{x}} \quad (\text{B.31})$$

est imposé par un gradient de pression contrôlé $-G\hat{\mathbf{x}}$ constant. Les unités adimensionnelles utilisées sont la demi-épaisseur de la conduite h pour les longueurs et la vitesse maximale du fluide U pour les vitesses ; un calcul hydrodynamique élémentaire montre que $U = Gh^2/(2\mu)$. Cette étude rentre bien sûr dans le cadre développé section B.1. Ainsi au stade linéaire les modes les plus dangereux, bidimensionnels, dérivent d'une fonction courant (B.11), et peuvent être recherchés sous la forme de modes normaux (B.20). Ils vérifient donc l'équation d'Orr-Sommerfeld (B.22) qui doit être munie des conditions limites (B.23) et (B.24).

B.3.1 Analyse linéaire de stabilité : ondes de Tollmien-Schlichting

L'analyse linéaire de stabilité de ce modèle ne peut se faire que numériquement, par exemple par une méthode spectrale de résidus pondérés⁹. On obtient de façon classique, à q fixé, une famille dénombrable de modes de structure verticale de plus en plus compliqués, que l'on peut donc indexer par un entier n . Seuls les modes de structure verticale la plus simple $n = 1$ sont susceptibles de devenir actifs lorsque le nombre de Reynolds dépasse une valeur critique

$$R_c = 5772 . \quad (\text{B.32})$$

L'instabilité correspondante est *structurante oscillante*, le nombre d'onde critique étant non nul,

$$q_c = 1,02 , \quad (\text{B.33})$$

et la fréquence angulaire critique aussi,

$$\omega_c = 0,269 . \quad (\text{B.34})$$

Les modes actifs correspondants, en $\exp[i(qx - \omega t)]$ avec q proche de q_c et ω proche de ω_c , sont qualifiés d'*ondes de Tollmien-Schlichting* en hommage aux théoriciens qui ont prévu leur existence vers les années 1930, voir par exemple Bayly et al. (1988). L'onde de Tollmien-Schlichting critique, par exemple, est caractérisée par les lignes de courant présentées figure B.4a, qui sont les lignes d'iso-valeurs de

$$\psi_{1r\acute{e}elle} = A \Psi(y) \exp[i(q_c x - \omega_c t)] + c.c. \quad (\text{B.35})$$

où A est une amplitude complexe de petit module et Ψ la fonction propre de l'équation (B.22) associée. Physiquement, cette onde n'existe pas seule mais se superpose à l'écoulement de base (B.31). Il est donc intéressant de tracer, comme cela est fait figure B.4b, les lignes de courant de la fonction courant totale

$$\psi = \psi_0 + \psi_{1r\acute{e}elle} \quad (\text{B.36})$$

où $\psi_0 = y^3/3 - y$. Signalons que, contrairement au cas de la structure de rouleaux de Rayleigh-Bénard montrée figure 1.5, les lignes de courant de la figure B.4b, qui mettent en évidence des *rouleaux ou vortex « transverses »* typiques de ces instabilités bidimensionnelles, ne correspondent pas aux trajectoires des particules fluides, puisque l'écoulement résultant est non permanent.

⁹Voir à ce sujet le TP Mathematica proposé dans le cadre de l'UE301 du Master sur

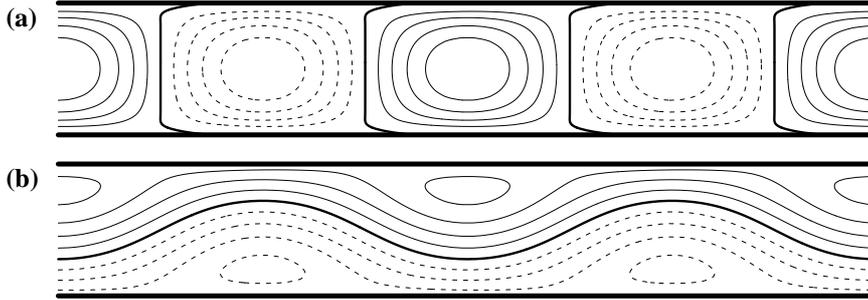


Fig. B.4 – (a) : Lignes de courant de l’onde de Tollmien-Schlichting critique déstabilisant l’écoulement de Poiseuille plan. Les lignes fines continues (resp. pointillées) correspondent à des niveaux $\psi_{1réelle} > 0$ (resp. $\psi_{1réelle} < 0$), tandis que les lignes épaisses correspondent aux *séparatrices* $\psi_{1réelle} = 0$, la fonction courant réelle étant donnée par (B.35). (b) : Lignes de courant du champ de vitesse total résultant de la superposition de l’écoulement de Poiseuille plan et de l’onde de Tollmien-Schlichting critique, en utilisant une « petite » valeur de l’amplitude A . Il s’agit donc des lignes $\psi > 0$, $\psi < 0$ et $\psi = 0$ de la fonction courant totale (B.36).

Des ondes de Tollmien-Schlichting similaires apparaissent plus généralement dans beaucoup d’écoulements visqueux unidirectionnels *non inflectionnels*, c’est-à-dire de la forme $\mathbf{v} = U_0(y)\hat{\mathbf{x}}$ avec U_0 fonction de y ne présentant pas de points d’inflections, par exemple dans la couche limite de Blasius au dessus d’une plaque plane. On parle alors d’*instabilités « visqueuses »*, par opposition aux *instabilités « non visqueuses »* qui affectent les écoulements unidirectionnels *inflectionnels* et ont été étudiées dans la section B.2.

B.3.2 Analyse faiblement non linéaire : nature sous-critique de la bifurcation

En se focalisant sur le scénario de bifurcation associé aux structures qui possèdent la périodicité de l’onde critique, c’est-à-dire en considérant comme seul mode actif le mode critique, le schéma de calcul de la section 2.2 s’applique. Les calculs correspondants ont été menés pour la première fois par Reynolds & Potter (1967). En utilisant les notations de la section 2.2, les nombres \mathbf{q} correspondent au couple nombre d’onde, nombre indexant la dépendance verticale, $\mathbf{q} = (q, n)$. Le mode critique est donc repéré par $\mathbf{q}_c = (q_c, 1)$, et son mode conjugué par $\mathbf{q}_c^* = (-q_c, 1)$. Reynolds & Potter (1967) ont dans un premier temps calculé les modes esclaves à l’ordre A^2 , i.e. $V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c)$, de nombre d’onde $2q_c$, et $V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*)$, de nombre d’onde nul, en résolvant numériquement les équations correspondantes, c’est-à-dire (2.68) pour (B.12) et (2.69) pour (B.16). Plus précisément le mode homogène

$$V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*) = \Psi_{20}(y), \quad (\text{B.37})$$

correspond à un *écoulement moyen créé par effet non linéaire* dont le profil est montré figure B.5a. Bien entendu, puisque visiblement

$$\langle U_{20} \rangle_y = 0,$$

la condition utilisée pour ce calcul est celle de *débit moyen fixé* (B.15), et on peut montrer qu’un *gradient de pression moyen* correspondant à une *augmentation des pertes de charge* est induit simultanément¹⁰.

Dans un deuxième temps Reynolds & Potter (1967) ont explicité le problème adjoint¹¹ et l’ont résolu numériquement pour calculer le mode critique adjoint $U_1(\mathbf{q}_c)$.

Enfin ils ont explicité le coefficient g de saturation à l’ordre A^3 , donné par la partie réelle de (2.73), soit, puisque les seules non-linéarités de l’équation de la vorticité (B.12) sont quadratiques,

$$g = -\text{Re} \langle N_2(V_1(\mathbf{q}_c^*) | V_2(\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_c)) + N_2(V_1(\mathbf{q}_c) | V_2(\mathbf{q}_c | \mathbf{q}_c^*)), U_1(\mathbf{q}_c) \rangle. \quad (\text{B.38})$$

¹⁰Une interprétation énergétique de ce phénomène très important est donnée dans le problème 2 page 112. Notez que si on fait l’hypothèse que le *gradient de pression moyen est fixé*, on observe un écoulement moyen différent qui exprime une *diminution du débit* associée à la transition.

¹¹C’est un excellent exercice que de le faire vous-même!

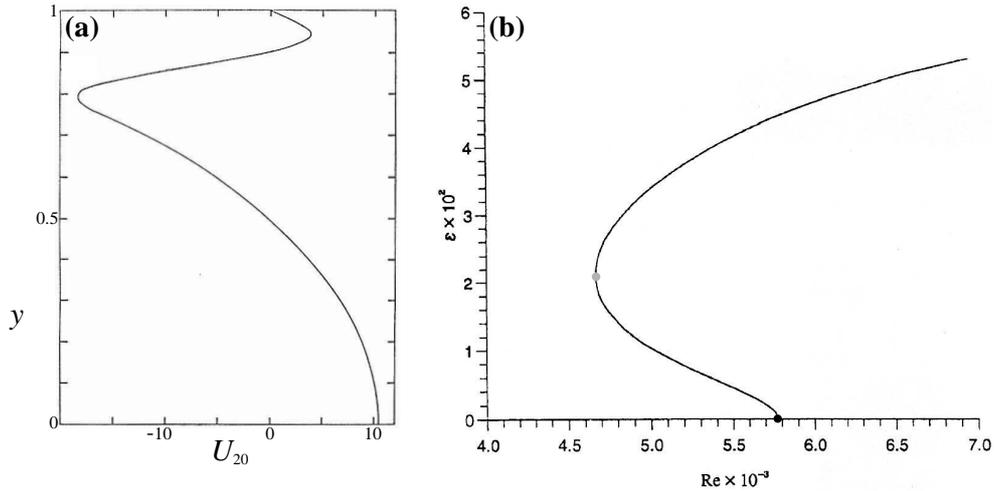


Fig. B.5 – (a) : Profil dans le demi-plan supérieur de l'écoulement moyen $U_{20} = \partial_y \Psi_{20}$ créé par effet non linéaire par l'onde de Tollmien-Schlichting critique d'après Reynolds & Potter (1967). Le profil dans le demi-plan inférieur s'obtient par symétrie, sachant que la fonction u_{20} est paire. (b) : Caractérisation de solutions ondes non linéaires (B.39) possédant comme nombre d'onde de base le nombre d'onde critique. L'axe horizontal correspond au nombre de Reynolds, l'axe vertical à l'énergie cinétique totale du champ de vitesse \mathbf{v}' associé. Le disque noir représente le point de bifurcation $(R_c, 0)$ et le disque gris le point de retournement qui situe approximativement le seuil d'énergie cinétique au delà duquel les ondes sont stables vis-à-vis de perturbations bidimensionnelles. Calcul d'Ehrenstein publié dans Huerre & Rossi (1998).

Ils ont montré que le coefficient g est négatif, ce qui indique une *bifurcation sous-critique*. Ce résultat peut être interprété par le fait que l'écoulement homogène u_{20} présente deux points d'inflexion très marqués en $y = \pm 0.8$, et est en conséquence, d'après le critère de Rayleigh, bien plus instable que l'écoulement de Poiseuille. En d'autres termes, lorsque l'écoulement de Poiseuille est destabilisé par l'onde de Tollmien-Schlichting critique, celle-ci modifie cet écoulement par effet non linéaire en un écoulement de profil différent plus instable.

B.3.3 Analyse fortement non linéaire : des ondes non linéaires instables

À l'aide de calculs fortement non linéaires du type de ceux présentés section 4.3, divers auteurs ont réussi à calculer des solutions ondes bidimensionnelles de la forme

$$\psi = \Psi_0(y) + \sum_{k=1}^{N_x} \{ \Psi_k(y) \exp[ik(qx - \omega t)] + c.c. \} \quad (\text{B.39})$$

des équations (B.12) et (B.16). C'est le cas par exemple de Ehrenstein, dont un résultat typique est présenté figure B.5b. Ce diagramme est une autre réalisation concrète du diagramme de la figure 2.5. On voit clairement sur la figure B.5b le danger d'extrapolations trop rapides des résultats de l'analyse linéaire : certes, lorsque seules des perturbations infinitésimales sont introduites, l'écoulement de Poiseuille plan sera stable jusqu'à $R = R_c \simeq 5800$; cependant, en présence de perturbations d'amplitudes finies, on peut quitter la solution de base dès $R \simeq 4800$, soit à des vitesses caractéristiques de l'ordre de 20% plus faibles.

Avoir calculé des ondes non linéaires stables vis-à-vis de perturbations bidimensionnelles, comme c'est le cas sur les branches de la figure B.5b au dessus du point de retournement représenté en gris, n'assure pas que celles-ci soient stables. En effet, Orszag & Patera (1980) ont montré, par une analyse de stabilité linéaire des solutions numériques (B.39), introduisant donc

$$\psi = \Psi_0(y) + \sum_{k=1}^{N_x} \{ \Psi_k(y) \exp[ik(qx - \omega t)] + c.c. \} + \psi_{pert} \quad (\text{B.40})$$

et étudiant l'équation d'évolution linéarisée de ψ_{pert} , que ces ondes sont typiquement *instables vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles*. Ces *instabilités secondaires de courte échelle*, donc très différentes

des instabilités secondaires d'Eckhaus, saturent typiquement sur des *ondes tridimensionnelles elles-mêmes instables*, d'où une *transition vers des écoulements « turbulents »*, cf. par exemple Bayly et al. (1988); Huerre & Rossi (1998), ou encore la figure B.6 et la discussion correspondante.

B.4 À propos de scénarios fortement non linéaires et de structures (très) cohérentes

Le cas d'*écoulements en conduite cylindrique à section circulaire*¹², d'une importance pratique capitale, pose un grave problème au modélisateur. En effet la *solution laminaire de Hagen-Poiseuille*

$$\mathbf{v}(r, \varphi, z) = U \left(1 - r^2/r_{ext}^2\right) \hat{\mathbf{z}}, \quad p(r, \varphi, z) = p_0 - Gz \quad (\text{B.41})$$

en coordonnées cylindriques (r, φ, z) avec r_{ext} le rayon de la conduite, $G = 4\mu U/r_{ext}^2$, est *linéairement stable quelque soit le nombre de Reynolds*

$$R = \frac{2Ur_{ext}}{\nu}, \quad (\text{B.42})$$

cf. par exemple Lessen et al. (1968); Salwen et al. (1980); Schmid & Henningson (1994, 2001). Or en pratique, selon les expériences et le niveau des perturbations qui y existent, on observe à Reynolds « élevé » non pas cet écoulement laminaire mais un écoulement « turbulent ». Ce phénomène, qui ne peut être que d'une nature « *fortement non linéaire* », a été clairement établi par Reynolds (1883), qui trouva avec son expérience fameuse¹³ un nombre de Reynolds de transition de l'ordre de 2000. Dans des expériences très soignées on peut par contre garder un écoulement laminaire jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de 100000 (voir Hof et al. 2003 et ses références). Ainsi le « seuil » de transition à la turbulence est sensible au niveau des perturbations introduites dans le système, comme l'avait déjà noté Reynolds (1883), et comme l'a précisé l'étude quantitative de Hof et al. (2003). Dans cet article très intéressant, ces auteurs ont d'ailleurs proposé la description « phénoménologique » suivante, non dénuée d'intérêt :

D'un point de vue « système dynamique », les équations de Navier-Stokes pour les écoulements en conduite cylindrique possèdent un point fixe linéairement stable (B.41) quelque soit R et, lorsque $R > R_t$, un « attracteur turbulent »¹⁴. En conséquence quand $R < R_t$ toutes les conditions initiales sont attirées vers l'état laminaire qui est un attracteur global du système. Quand $R > R_t$, l'état laminaire devient un attracteur local, car certaines conditions initiales aboutissent à la turbulence. Enfin quand $R \gg R_t$ presque toutes les conditions initiales aboutissent à la turbulence.

Passant (un peu rapidement) sur ce mystérieux R_t qui vaudrait environ 2000, Hof et al. (2003) ont déterminé expérimentalement, pour $R > R_t$, le seuil en amplitude de perturbation A nécessaire pour faire transiter l'écoulement à la turbulence¹⁵. Ils ont montré l'existence d'une loi d'échelle de la forme

$$A \sim A_0 R^{-1}, \quad (\text{B.43})$$

qui exprime en fait que la taille du bassin d'attraction de l'état laminaire décroît en R^{-1} lorsque $R \rightarrow +\infty$.

Au niveau théorique, les questions que l'on doit légitimement se poser sont donc les suivantes :

1. Peut-on « expliquer » au moins en partie en quoi consiste l'« attracteur turbulent » suscité, et pourquoi il n'apparaît qu'au delà de $R_t \simeq 2000$?
2. Peut-on « expliquer » la loi d'échelle (B.43) ?

¹²Le tuyau d'arrivée d'eau de votre appartement !

¹³Celle-la même qui lui valut l'honneur de « posséder » un nombre adimensionnel portant son nom !...

¹⁴La « phénoménologie » est ici avérée, puisque ce concept d'« attracteur turbulent » n'est pas clairement défini à l'heure actuelle.

¹⁵Ce seuil dépend bien entendu de la forme de la perturbation utilisée. On raisonne dans ce qui suit à « forme de perturbation » fixée.

Des éléments de réponse théorique à cette deuxième question peuvent être trouvés dans Gavarini et al. (2004); Ben-Dov & Cohen (2007); Schneider et al. (2007), articles et lettre d'excellente qualité, dont je recommande vivement la lecture¹⁶. De gros progrès ont aussi été fait très récemment pour donner des éléments de réponse à la première question. Ces travaux (théoriques) sont basés sur l'observation (expérimentale) qu'au niveau de la transition à la turbulence, vers $R \gtrsim R_t$, l'écoulement n'est en fait pas totalement turbulent mais contient des « **structures cohérentes** » qui persistent pendant des transitoires plus ou moins longs avant de perdre leur cohérence... et d'être remplacées par d'autres structures cohérentes, cependant non corrélées aux précédentes. Un exemple de telles structures cohérentes est donné figure B.7a. On note par exemple la présence de deux vortex « longitudinaux »¹⁷ assez forts, et celle de six « jets » rapides près de la paroi de la conduite, qui sont répartis à peu près régulièrement en azimut.

Des structures cohérentes de ce type sont en fait couramment observées en écoulements ouverts cisailés, en géométries cylindrique *et* plane; ceci a naturellement mené beaucoup de chercheurs à s'y intéresser. Une approche originale proposée par Waleffe (1997), pour mieux comprendre ces structures cohérentes, consiste à tenter de calculer des « **structures très cohérentes** »¹⁸ apparentées qui seraient *parfaitement périodiques en temps et en espace*. Ces structures très cohérentes, en général *instables*, formeraient un « *squelette* » pour l'« *attracteur turbulent* », le système sautant d'une structure très cohérente à une autre au fil de leurs instabilités (voir à ce sujet Busse 2004). Par une analyse fine des mécanismes physiques qui font que ces structures existent, Waleffe (1997) a réussi effectivement à les mettre en évidence sur un écoulement modèle, puis dans le cas d'écoulements plus réalistes, à savoir les *écoulements de Couette* et *Poiseuille plans* (Waleffe 1998, 2001). Dans ce dernier cas, ces structures très cohérentes correspondent en fait à des **ondes non linéaires** périodiques dans les deux directions du plan moyen, donc complètement tridimensionnelles :

$$\mathbf{v}(x,y,z,t) = U (1 - y^2/h^2) \hat{\mathbf{x}} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{v}_n(y) \exp[ni(qx + pz - \omega t)] . \quad (\text{B.44})$$

Elles sont très probablement les états que l'on obtiendrait en laissant saturer les instabilités tridimensionnelles des ondes de Tollmien-Schlichting évoquées à la fin de la section B.3.3; on peut donc considérer en ce sens que les résultats de Waleffe (1998, 2001) n'apportent pas de révolution par rapports aux approches plus traditionnelles faiblement puis fortement non linéaires, partant de la première bifurcation à $R_c = 5772$, cf. la section B.3 et le chemin « faiblement non linéaire » de la figure B.6. Un pas important a cependant été franchi dans Waleffe (1998) puisqu'il a obtenu ces structures très cohérentes non pas par ce chemin « traditionnel » mais *directement à partir de l'écoulement de base*, en modifiant lors d'une phase intermédiaire de calcul (non physique!) les équations de Navier-Stokes au moyen d'un terme de forçage ad-hoc. Ce terme de forçage, dont la forme est celle des structures cohérentes que l'on veut obtenir, est d'intensité F . Si F est suffisamment grand, une bifurcation sous-critique se produit, qui sature sur une structure très cohérente. Par continuation, on peut, tout en augmentant l'amplitude A de cette structure, en modifiant sa forme de façon adéquate, et en diminuant le coefficient F , obtenir, si le nombre de Reynolds est assez élevé, une structure très cohérente avec $F = 0$, c'est-à-dire de nature physique. Cette démarche nouvelle et audacieuse permet d'économiser beaucoup de temps de calcul par rapport au chemin « traditionnel », comme cela est représenté schématiquement sur la figure B.6. Son aboutissement, dans le cas d'écoulements entre plans sous gradient de pression représenté sur cette figure, est de localiser en fonction des nombres d'onde longitudinal q et transverse p la **bifurcation nœud-col** qui voit ces structures apparaître¹⁹. Le nombre de Reynolds correspondant signale l'émergence de nouvelles solutions « non laminares » susceptibles de « supporter » des états « turbulents ».

¹⁶Par exemple Schneider et al. (2007) montrent que la frontière $A(R)$ évoquée ci-dessus a en fait une structure **fractale**; ceci est un très bel exemple de **sensibilité aux conditions initiales** dans un système hydrodynamique.

¹⁷Pour ce qui concerne leur axe i.e. leur vecteur vorticité moyen; le champ de vitesse associé, lui, est bien « transverse » i.e. sans composante axiale.

¹⁸Ou « **structures cohérentes exactes** » selon les termes de Waleffe.

¹⁹Rappelons que la notion de **bifurcation nœud-col** a été introduite section 2.1.10, dans le contexte de l'étude d'une bifurcation sous-critique standard, et insistons sur le fait que ce concept est général, indépendant de l'existence ou non d'une bifurcation sous-critique plus ou moins « lointaine ».

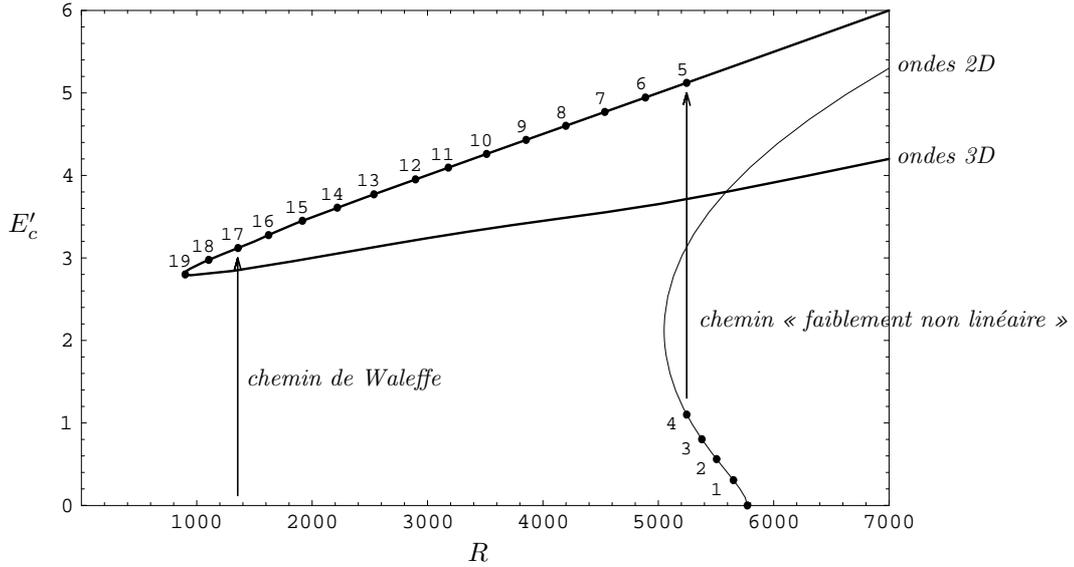


Fig. B.6 – Schéma de principe (non calculé!) montrant les deux approches possibles permettant d'obtenir des structures très cohérentes ondes non linéaires tridimensionnelles en écoulements entre plans sous gradient de pression. L'axe horizontal correspond aux nombres de Reynolds R , l'axe vertical à l'énergie cinétique de perturbation par rapport à l'écoulement de base de Poiseuille (B.31). Cette figure peut donc être considérée comme précisant la figure B.5b. Le chemin « faiblement non linéaire » traditionnel pour obtenir des ondes non linéaires tridimensionnelles consisterait justement, comme Ehrenstein, à calculer d'abord des ondes de Tollmien-Schlichting bidimensionnelles, i.e., sur la branche en trait fin, les points 1 à 4; le point 1 serait obtenu avec, pour initier la méthode de continuation, une solution faiblement non linéaire, comme sur la figure 4.1. Ensuite on laisserait se développer les instabilités tridimensionnelles évoquées section B.3.3 pour aboutir, comme l'indique la flèche verticale, à une onde non linéaire tridimensionnelle, le point 5 sur la branche correspondante en trait épais. Il faudrait alors suivre ces ondes par continuation (points 6 à 19) en faisant décroître le nombre de Reynolds, jusqu'à arriver à la bifurcation nœud-col au point 19. L'approche de Waleffe (1998, 2001), qui passe lors d'une étape intermédiaire par un forçage non physique, lui permet de démarrer à un nombre de Reynolds beaucoup plus bas et d'arriver « directement » en un point tel que le point 17. Avec deux étapes de continuation en nombre de Reynolds seulement, Waleffe est donc capable d'obtenir le point de bifurcation nœud-col 19. On notera que l'intersection qui se produit aux alentours de $(R, E'_c) = (5800, 3.8)$ entre les branches bi- et tridimensionnelles de solutions n'est pas une bifurcation, mais est due à la « projection » dans le plan (R, E'_c) .

La démarche nouvelle de Waleffe illustrée sur la figure B.6 s'est avérée très féconde parce qu'elle peut être appliquée à un écoulement de base toujours stable, i.e. **en l'absence de toute bifurcation**. Elle a donc permis de débloquent l'impasse dans laquelle se trouvait l'étude de la stabilité de l'écoulement de Hagen-Poiseuille (B.41). Cette application très intéressante de la méthode de Waleffe a été accomplie par Faisst & Eckhardt (2003) puis précisée par Wedin & Kerswell (2004); Pringle & Kerswell (2007). Pringle & Kerswell (2007) ont ainsi montré que les équations de Navier-Stokes en conduite cylindrique à section circulaire admettent lorsque $R \geq 773$, valeur en laquelle a lieu la toute première bifurcation nœud-col, des solutions structurées autres que la solution de Hagen-Poiseuille, à savoir des structures très cohérentes périodiques dans la direction axiale, en azimut et en temps, i.e. des ondes non linéaires de la forme

$$\mathbf{v}(r, \varphi, z, t) = U \left(1 - r^2/r_{ext}^2\right) \hat{\mathbf{z}} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{v}_n(r) \exp[ni(qz + m\varphi - \omega t)]. \quad (\text{B.45})$$

Ce résultat est visible sur la figure B.7c. Si on se focalise sur le voisinage de la première bifurcation nœud-col, ce diagramme est similaire à celui de la figure B.6. La grande nouveauté, répétons-le, est qu'il n'existe aucun chemin « faiblement non linéaire » pour « attraper » ces solutions, qui ne rejoignent *jamais* la solution laminaire pour laquelle $f = 64/R$.

Il semblerait que les ondes de nombre d'onde azimutal de base $m = 1$, qui apparaissent les plus tôt (pour $R = 773$), se trouvent à la « frontière » entre les bassins d'attraction de l'état laminaire et de l'« attracteur

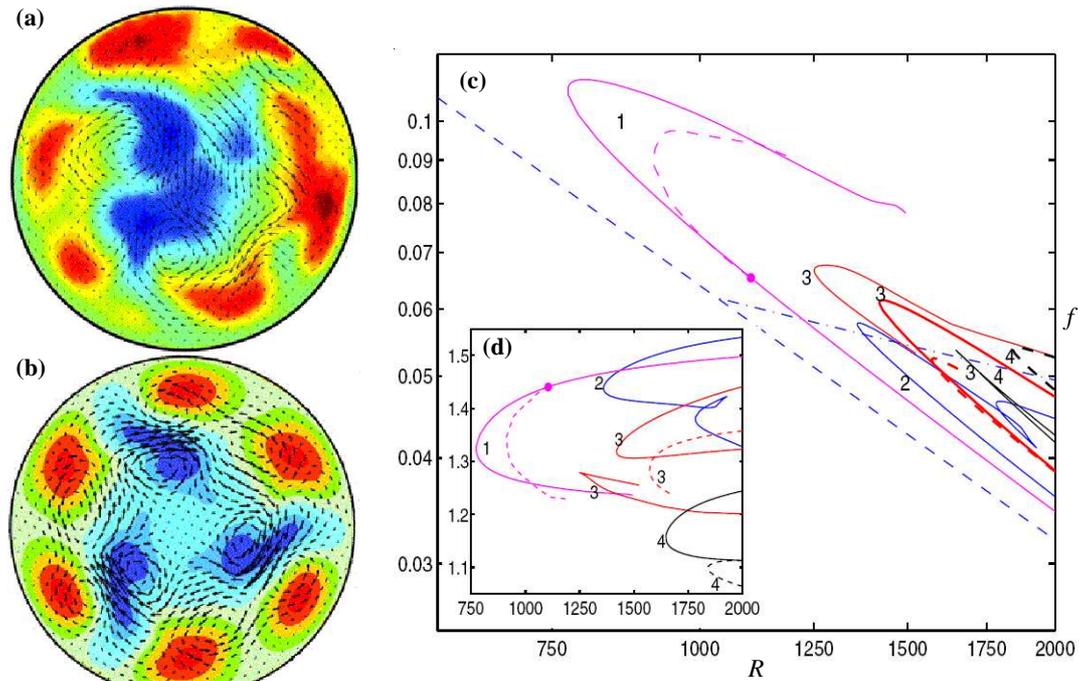


Fig. B.7 – (a) & (b) présentent des exemples de *structures cohérentes* obtenues en écoulements en conduite cylindrique à section circulaire. (a) : dans une section de la conduite, champ de vitesse expérimental instantané (flèches noires : écoulements transverses ; niveaux de couleurs : différence entre la vitesse axiale mesurée et celle de l'écoulement de base parabolique) mesuré par imagerie par vélocimétrie de particules à $R = 2000$ par Hof et al. (2004). (b) : champ de vitesse numérique d'une onde non linéaire (ou « *structure très cohérente* ») calculée à $R = 1250$ par Faisst & Eckhardt (2003); Wedin & Kerswell (2004). (c) & (d) présentent les propriétés de solutions numériques calculées par Pringle & Kerswell (2007). (c) donne les coefficients de perte de charge f en fonction du nombre de Reynolds R . La droite pointillée inférieure montre la loi $f = 64/R$ correspondant à la solution de Hagen-Poiseuille (B.41) connue depuis plus de 150 ans. La droite pointillée-tirée supérieure donne le coefficient de perte de charge d'une corrélation empirique utilisée en turbulence. Les courbes continues correspondent aux *nouvelles solutions* du type (B.45), avec les nombres d'onde azimutaux de base m indiqués. (d) donne, en fonction de R , les vitesses de phase ω/q dans la direction axiale, en unité de la vitesse débitante, pour toutes ces ondes.

turbulent », comme le montre le parallèle entre la figure 1 de Pringle & Kerswell (2007) et la figure 5 de Schneider et al. (2007).

Par contre les ondes de nombre d'onde azimutal de base $m \geq 2$, qui apparaissent plus tard (pour $R = 1350$ si $m = 2$, $R = 1250$ si $m = 3$), ressemblent beaucoup à certaines structures cohérentes observées expérimentalement, comme le montre la comparaison entre les figures B.7a et b (voir aussi la figure 4 de Hof et al. 2004). Elles semblent donc représentatives des écoulements faiblement turbulents, ce que confirme le fait que leur coefficient de perte de charge est proche de ceux obtenus dans de tels écoulements, donnés typiquement par la droite pointillée-tirée de la figure B.7c. Ces structures très cohérentes, toutes *instables*, formeraient donc le « *squelette* » de l'« *attracteur turbulent* » évoqué par Hof et al. (2003), le système sautant d'une structure très cohérente à une autre au fil de leurs instabilités. On obtient ainsi par cette approche théorique un nombre de Reynolds d'apparition de l'« *attracteur turbulent* » de l'ordre de 1400 (supposant qu'il faut l'existence de très nombreuses structures très cohérentes pour le constituer, donc avoir passé « largement » les seuils d'apparition des ondes de nombre d'onde de base 2 et 3), en accord semi-quantitatif avec la valeur $R_t \simeq 2000$ déduite des expériences, comme expliqué au début de cette section.

Cette approche nouvelle ouvre bien entendu des pistes à explorer, par exemple du côté de l'étude de la transition à la turbulence en fluides non newtoniens²⁰...

²⁰Cette transition est encore moins bien comprise, à l'heure actuelle, qu'en fluides newtoniens.

Annexe C

Introduction des modes adjoints en dimension finie

Nous revenons ici, dans le cadre plus simple d'un système de dimension finie n , sur le problème abordé section 1.7. Nous allons d'abord montrer que l'on peut, si on le désire, calculer tous les modes adjoints à partir d'une seule inversion de matrice. Nous redécouvrirons ensuite les règles de définition des modes adjoints en tant que vecteurs propres d'un problème adjoint.

Considérons donc pour $V \in \mathbb{C}^n$ l'équation d'évolution linéarisée

$$\dot{V} = L \cdot V, \quad (\text{C.1})$$

dans un cas « régulier » où les *modes propres* associés solutions de

$$\sigma(q)V_1(q) = L \cdot V_1(q) \quad (\text{C.2})$$

forment une base de \mathbb{C}^n . Étant donné un vecteur d'état $V = (V_i)_{i=1, \dots, n}$ donné dans la base canonique de \mathbb{C}^n , on se pose le problème du calcul des *amplitudes* $A(q)$ telles que

$$V = \sum_q A(q)V_1(q). \quad (\text{C.3})$$

Soit P la *matrice de présentation* des vecteurs propres de L dans la base canonique telle que

$$\forall q \in \{1, \dots, n\}, \quad V_1(q) = (P_{iq})_{i=1, \dots, n}, \quad (\text{C.4})$$

i.e. $V_1(q)$ est la $q^{\text{ème}}$ colonne de P . En composantes dans la base canonique, l'équation (C.3) s'écrit

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad V_i = \sum_q A(q)P_{iq} = \sum_q P_{iq}A(q) \iff V = P \cdot W$$

en introduisant un vecteur colonne W contenant les amplitudes $A(q)$. En conséquence

$$W = P^{-1} \cdot V \iff \forall q \in \{1, \dots, n\}, \quad A(q) = \sum_i P_{qi}^{-1}V_i = \sum_i V_i P_{qi}^{-1},$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\forall q \in \{1, \dots, n\}, \quad A(q) = \langle V, U_1(q) \rangle \quad (\text{C.5})$$

à condition d'introduire le *produit scalaire hermitien*

$$\langle V, U \rangle = \sum_i V_i U_i^* \quad (\text{C.6})$$

et les *modes adjoints*

$$U_1(q) = (P_{qi}^{-1})_{i=1,\dots,n}^*, \text{ i.e. } \boxed{U_1(q) \text{ est la } q^{\text{ème}} \text{ ligne de la matrice complexe conjuguée de } P^{-1}}. \quad (\text{C.7})$$

On remarque que l'on a la propriété d'orthogonalité

$$\forall q, q' \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle V_1(q), U_1(q') \rangle = \delta_{qq'} = \begin{cases} 1 & \text{si } q = q' \\ 0 & \text{si } q \neq q' \end{cases}. \quad (\text{C.8})$$

Montrons maintenant que ces modes adjoints calculables par l'inversion de la matrice P sont les modes propres d'un problème adjoint. Pour cela nous repartons de la relation de définition des modes propres (C.2), qui donne en composantes

$$\forall q, i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sigma(q)P_{iq} = \sum_j L_{ij}P_{jq},$$

soit matriciellement

$$P \cdot S = L \cdot P \quad (\text{C.9})$$

si S est la matrice diagonale d'éléments diagonaux $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$, i.e. $S_{jq} = \sigma(q)\delta_{jq}$. En multipliant l'identité matricielle (C.9) à gauche et à droite par P^{-1} il vient

$$S \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot L$$

soit en composantes

$$\forall q, i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sigma(q)P_{qi}^{-1} = \sum_j P_{qj}^{-1}L_{ji}.$$

En introduisant la *matrice adjointe* de L , la transposée conjuguée de L ,

$$L^\dagger = L^{*t}, \quad (\text{C.10})$$

telle que

$$\forall U, V, \quad \langle L \cdot V, U \rangle = \langle V, L^\dagger \cdot U \rangle, \quad (\text{C.11})$$

il vient

$$\forall q, i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sigma^*(q)(P_{qi}^{-1})^* = \sum_j (P_{qj}^{-1})^* L_{ij}^\dagger = \sum_j L_{ij}^\dagger (P_{qj}^{-1})^*,$$

soit, compte tenu de la définition (C.7) des modes adjoints,

$$\forall q \in \{1, \dots, n\}, \quad \boxed{\sigma^*(q)U_1(q) = L^\dagger \cdot U_1(q)}. \quad (\text{C.12})$$

Ainsi les modes adjoints sont les modes propres de L^\dagger associés aux valeurs propres complexes conjuguées des $\sigma(q)$; cette règle est un cas particulier de la règle plus compliquée (1.99).

Dans certains cas où l'on n'a besoin que d'un seul mode « direct » et un seul mode « adjoint » (typiquement les modes critiques $V_1(q_c)$ et $U_1(q_c)$), la formule (C.12) est précieuse, puisqu'elle permet d'accéder au mode U_1 cherché par un seul calcul de vecteur propre (en sus du calcul du mode V_1). Par contre, si on a besoin de tous les $V_1(q)$ et $U_1(q)$, il est clairement plus efficace de calculer d'abord tous les $V_1(q)$ pour obtenir la matrice P d'où les $U_1(q)$ par une seule inversion de matrice d'après (C.7). Insistons cependant sur le fait que cette dernière technique « matricielle » ne peut se généraliser au cas d'un système de dimension infinie, alors que (C.12) est valable aussi en dimension infinie; c'est en fait l'équation (1.97).

Annexe D

Analyse faiblement non linéaire rigoureuse d'une instabilité oscillante

L'approche pragmatique utilisée section 2.2 pour mener à bien l'analyse faiblement non linéaire d'une instabilité oscillante est critiquable, essentiellement au niveau du lemme pragmatique posé p. 40. En effet sa « démonstration » ne conduit en toute rigueur qu'à $B_m(t_0) \simeq 0$, et non $B_m(t_0) = 0$. L'objet de cette annexe est de combler cette faiblesse en reprenant dans un premier temps ce lemme pour le préciser.

Lemme :

Soit $v(t)$ un scalaire complexe de la forme

$$v(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n(t) \exp(-in\omega_c t) \quad (\text{D.1})$$

avec les $B_n(t)$ lentement variables, i.e.

$$\forall n, \quad \partial_t B_n = O(\epsilon B_n) . \quad (\text{D.2})$$

Alors

$$v(t) = 0 \quad \implies \quad \forall n, \quad B_n = O\left(\epsilon \sum_p B_p\right) . \quad (\text{D.3})$$

La démonstration suit initialement le même chemin que p. 40; on arrive ainsi, pour $m \in \mathbb{Z}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ quelconques, à

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} \int_{t_0 - T_c/2}^{t_0 + T_c/2} B_{m-p}(t) \exp(ip\omega_c t) dt = 0 \quad (\text{D.4})$$

avec $T_c = 2\pi/\omega_c$. D'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall t \in [t_0 - T_c/2, t_0 + T_c/2] , \quad |B_m(t) - B_m(t_0)| = O(\epsilon B_m) ,$$

on a

$$B_m(t_0) = \int_{t_0 - T_c/2}^{t_0 + T_c/2} B_m(t) \frac{dt}{T_c} + O(\epsilon B_m) .$$

En combinant cette équation avec (D.4), on obtient

$$B_m(t_0) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \int_{t_0 - T_c/2}^{t_0 + T_c/2} B_{m-p}(t) \exp(ip\omega_c t) \frac{dt}{T_c} + O(\epsilon B_m) . \quad (\text{D.5})$$

Or pour $p \neq 0$ on peut effectuer une intégration par partie dans l'intégrale oscillante

$$I_p = \int_{t_0 - T_c/2}^{t_0 + T_c/2} B_{m-p}(t) \exp(ip\omega_c t) dt ,$$

qui conduit à

$$I_p = \frac{1}{ip\omega_c} [B_{m-p}(t) \exp(ip\omega_c t)]_{t_0-T_c/2}^{t_0+T_c/2} - \frac{1}{ip\omega_c} \int_{t_0-T_c/2}^{t_0+T_c/2} \dot{A}_{m-p}(t) \exp(ip\omega_c t) dt .$$

En appliquant le théorème des accroissements finis au terme tout intégré et en utilisant l'hypothèse des variations temporelles lentes (D.2), on aboutit à

$$I_p = O(\epsilon B_{m-p}) ,$$

d'où par injection dans (D.5) le résultat annoncé (D.3).

On conclut alors en postulant, guidé par les résultats de l'approche pragmatique de la section 2.2, l'existence de lois d'échelles assurant une certaine hiérarchie entre les amplitudes B_n , de sorte que l'une d'entre elles en domine d'autres, qui elles-mêmes en dominent d'autre, et ainsi de suite. Plus précisément nous allons poser, en gardant à l'esprit le fait que le lemme s'applique non pas à une composante de V équation (2.58) mais à une composante de l'équation de la dynamique (2.1) (pour les termes en $\exp(i\omega_c t)$ voir (2.63)), que

$$B_{\pm 1} \sim b_{\pm 1} \epsilon^{3/2} , \quad B_0 \sim b_0 \epsilon , \quad B_{\pm 2} \sim b_{\pm 2} \epsilon$$

et

$$\forall n \in \mathbb{Z} , \quad |n| \geq 3 \quad \implies \quad B_n = O(\epsilon^2) .$$

Le résultat du lemme (D.3) implique alors que, dans une composante de l'équation de la dynamique (2.1),

$$b_0 \epsilon = O\left(\epsilon \sum_p B_p\right) = O(\epsilon^2)$$

d'où $b_0 = 0$. De même

$$b_{\pm 2} \epsilon = O(\epsilon^2)$$

donc $b_{\pm 2} = 0$. Alors

$$b_{\pm 1} \epsilon^{3/2} = O\left(\epsilon \sum_p B_p\right) = O(\epsilon^{5/2})$$

donc $b_{\pm 1} = 0$. Au bilan on a montré que l'on peut identifier dans l'équation de la dynamique les coefficients de $\exp(0t)$, $\exp(\pm i\omega_c t)$ et $\exp(\pm 2i\omega_c t)$; ceci suffit en pratique pour l'analyse faiblement non linéaire à l'ordre le plus bas.

La rencontre que nous venons de faire avec les limites de l'approche sans lois d'échelles nous permet en guise de conclusion d'ouvrir (de façon plus positive maintenant qu'en 4.1!) sur les *méthodes multiéchelles*, qui présentent l'inconvénient d'être plus formelles et donc d'un abord plus délicat, mais qui en contre-partie permettent d'organiser les calculs sur la base d'une analyse « asymptotique » qui a fait ses preuves. Dans le cas qui nous intéresse ici d'une bifurcation oscillante, l'approche multiéchelle consiste à introduire un « *temps lent* »

$$t' = \epsilon t$$

et à poser directement pour la solution faiblement non linéaire

$$V = \epsilon^{1/2} [a(t') \exp(-i\omega_c t) V_1(\mathbf{q}_c) + c.c.] + \epsilon [a_0(t') V_0 + a_2(t') \exp(-2i\omega_c t) V_2 + c.c.] + \dots \quad (\text{D.6})$$

Les calculs se déroulent alors confortablement (du moins pour un esprit « mathématique ») par identification ordre par ordre en puissances de $\epsilon^{1/2}$ dans l'équation de la dynamique.

Annexe E

Résolution analytique des équations d'amplitude

E.1 Cas d'une bifurcation trans-critique

Pour résoudre analytiquement l'équation (2.23),

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\epsilon}{\tau}A - \gamma A^2, \quad (\text{E.1})$$

munie de la condition initiale

$$A(0) = A_0, \quad (\text{E.2})$$

on a intérêt à opérer dans un premier temps les changements de variables naturels¹

$$t = \tau t' / \epsilon \quad \text{et} \quad A = \epsilon A' / (\tau \gamma). \quad (\text{E.3})$$

Ceci conduit à l'équation réduite

$$\frac{dA'}{dt'} = A' - A'^2, \quad (\text{E.4})$$

d'où par intégration temporelle

$$\ln |A'| - \ln |1 - A'| = t' - t'_0.$$

Par application de la fonction exponentielle il vient

$$A' / (1 - A') = \exp(t') / \alpha$$

ce qui donne

$$A' = 1 / [1 + \alpha \exp(-t')]. \quad (\text{E.5})$$

Par inversion du changement de variable (E.3) on obtient

$$A = \frac{\epsilon}{\tau \gamma} \frac{1}{1 + \alpha \exp(-\epsilon t / \tau)}, \quad (\text{E.6})$$

la condition (E.2) donnant

$$\alpha = \epsilon / (\tau \gamma A_0) - 1. \quad (\text{E.7})$$

¹Excluant le cas marginal $\epsilon = 0$, dont la résolution est laissée en exercice au lecteur. Celui-ci observera notamment dans ce cas exceptionnel le phénomène de *stabilité conditionnelle* de la solution $A = 0$, ainsi qu'un phénomène d'« explosion » en temps fini. Il notera que ce phénomène non physique disparaît lorsque l'on inclut un terme saturant d'ordre supérieur en $-gA^3$ dans l'équation d'amplitude.

E.2 Cas d'une bifurcation sur-critique

Nous nous plaçons d'emblée dans le cas d'une bifurcation *oscillante* c'est-à-dire de l'équation (2.72),

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1+is}{\tau} \epsilon A - g(1+ic)|A|^2 A, \quad (\text{E.8})$$

dans lequel nous avons vu que la représentation polaire

$$A = \rho \exp(i\phi) \quad (\text{E.9})$$

conduit à

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\epsilon}{\tau} \rho - g\rho^3, \quad (\text{E.10})$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{s\epsilon}{\tau} - gc\rho^2. \quad (\text{E.11})$$

L'équation (E.10) est en fait équivalente à celle (2.31) du module de l'amplitude associée à une bifurcation sur-critique *stationnaire* ; dans ce cas la dynamique de la phase (si elle existe, c'est-à-dire dans le « cas complexe » au sens de la section 2.1.6) est triviale d'après (E.11) dans laquelle on doit considérer que $s = c = 0$.

Pour résoudre (E.10) munie de la condition initiale

$$\rho(0) = \rho_0, \quad (\text{E.12})$$

on opère ici encore les changements de variables naturels²

$$t = \tau t' / \epsilon \quad \text{et} \quad \rho = \sqrt{\epsilon / (\tau g)} \rho' \quad (\text{E.13})$$

conduisant à l'équation réduite

$$\frac{d\rho'}{dt'} = \rho' - \rho'^3. \quad (\text{E.14})$$

Par intégration temporelle on obtient

$$\ln |\rho'| - \frac{1}{2} \ln |1 + \rho'| - \frac{1}{2} \ln |1 - \rho'| = t' - t'_0,$$

d'où après multiplication par deux et application de la fonction exponentielle

$$\rho'^2 / (1 - \rho'^2) = \exp(2t') / \alpha.$$

Ainsi

$$\rho' = 1 / \sqrt{1 + \alpha \exp(-2t')}, \quad (\text{E.15})$$

et par inversion de (E.13)

$$\rho = \sqrt{\frac{\epsilon}{\tau g} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha \exp(-2\epsilon t / \tau)}}}, \quad (\text{E.16})$$

la valeur

$$\alpha = \epsilon / (\tau g \rho_0^2) - 1 \quad (\text{E.17})$$

étant donnée par (E.12).

²Là encore la résolution du cas marginal exceptionnel $\epsilon = 0$ est laissée en exercice au lecteur.

En appliquant le changement de variables (E.13) à l'équation de la phase (E.11), on voit que l'on doit résoudre pour celle-ci

$$\frac{d\phi}{dt'} = s - c\rho'^2 = s - \frac{c}{1 + \alpha \exp(-2t')} . \quad (\text{E.18})$$

On obtient par intégration temporelle

$$\phi = \phi_0 + st' + \frac{c}{2} \ln \frac{\alpha + 1}{\alpha + \exp(2t')} , \quad (\text{E.19})$$

ϕ_0 étant bien entendu la valeur initiale de la phase. En revenant au temps physique t il vient finalement

$$\boxed{\phi = \phi_0 + \frac{s\epsilon t}{\tau} + \frac{c}{2} \ln \frac{\alpha + 1}{\alpha + \exp(2\epsilon t/\tau)} .} \quad (\text{E.20})$$

Annexe F

Exercices et problèmes

Exercice 1 *Exemple de système dynamique « non normal »*

On considère le système dynamique linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= x. \end{cases}$$

Quels sont ses modes normaux et les valeurs propres σ correspondantes ?

Ces modes forment-ils un système total de l'espace des phases ?

Ce système est-il stable ou instable ?

Commentaires : ce système est « exponentiellement stable », i.e. d'éventuelles perturbations croissantes ne peuvent croître que moins vite que $\exp(\mu t)$ quelque soit $\mu \in \mathbb{R}^{+*}$. Par contre il présente une « instabilité algébrique », c'est-à-dire que certaines perturbations peuvent croître en t^α avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Mentionnons aussi que le concept d'« opérateur d'évolution L normal », et donc de « système linéaire $\dot{V} = L \cdot V$ normal », a un sens précis en mathématiques¹.

Exercice 2 *Modèle de réaction chimique de Lengyel & Epstein modifié* (*examen* 2003 - 2004)

On se pose la question de l'importance des effets d'inhibition traduits par les dénominateurs en $1 + x^2$ dans le modèle de réaction chimique de Lengyel & Epstein étudié section A.2. On se propose donc d'étudier une version modifiée de ce modèle dans laquelle ces dénominateurs sont omis. Le modèle à analyser, adimensionnel, prend la forme

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha - x - 4xy, \\ \dot{y} &= \beta x - \beta xy, \end{cases}$$

x et y désignant des concentrations homogènes dans l'espace, α et β étant deux paramètres de contrôle strictement positifs.

Étudiez la dynamique de ce système lorsqu'il est soumis à de petites perturbations et concluez.

¹Un opérateur L normal est un opérateur qui commute avec son adjoint L^\dagger . En dimension finie, cette propriété est équivalente avec le fait de posséder un système total de vecteurs propres deux à deux orthogonaux. La démonstration de cette équivalence est aisée; elle se fait par récurrence sur la dimension n de \mathbb{C}^n , après avoir démontré en lemme que les sous-espaces propres d'un opérateur normal sont deux à deux orthogonaux.

Problème 1 *Étude de la thermoconvection de Rayleigh-Bénard à l'aide du modèle réduit de Lorenz* (∈ examen 2005 - 2006)

On veut étudier la dynamique d'une couche plane de fluide newtonien chauffée par le bas à l'aide du modèle réduit de Lorenz, dans le cas de structures bidimensionnelles et sous les approximations de Boussinesq. Le modèle xz correspondant a été introduit section 1.2.2. On utilise la même formulation adimensionnelle en fonction courant ψ et écart de température θ ; le vecteur d'état local du fluide $V = (\psi, \theta)$, et les équations de la vorticité (1.35) et de la chaleur (1.37) prennent ensemble la forme classique

$$D \cdot \partial_t V = L \cdot V + N_2(V, V) + N_3(V, V, V) . \quad (\text{Dyn})$$

Enfin on travaille avec les conditions limites d'isothermalité (1.38) et de glissement sans frottement (1.40). Guidé par les résultats de l'analyse faiblement non linéaire systématique de ce problème, on va tenter une recherche de solutions par une méthode de Fourier-Galerkin, sous la forme d'une superposition de deux termes qui permettraient de retrouver un mode actif et d'un troisième terme qui permettrait de retrouver le premier mode passif excité par celui-ci, à savoir un mode de température homogène. On pose donc, pour un certain nombre d'onde $q > 0$,

$$\psi = \Psi_1(t) \sin(qx) \sin(\pi z) \quad \text{et} \quad \theta = \Theta_1(t) \cos(qx) \sin(\pi z) - \Theta_2(t) \sin(2\pi z) . \quad (\text{V})$$

1.a Vérifiez que cette forme de solution satisfait les conditions limites du modèle.

1.b Calculez les deux composantes du vecteur $N_2(V, V)$. Quel phénomène observez vous ? Expliquez pourquoi (V) ne permettra pas d'obtenir des solutions *exactes* du problème.

1.c On se résout donc à vouloir obtenir des solutions *approchées* du problème de départ. Précisez quelle approximation doit être faite pour cela, et comment on peut extraire de (Dyn) des équations d'évolution pour les coefficients Ψ_1 , Θ_1 et Θ_2 . Calculez effectivement ces équations.

1.d Afin d'obtenir une forme réduite, plus concise, de ces équations, on définit une nouvelle variable temporelle

$$t' = (q^2 + \pi^2)t ,$$

et des variables réduites

$$X = \frac{\pi q}{\sqrt{2}(q^2 + \pi^2)} \Psi_1 , \quad Y = \frac{\pi q^2}{\sqrt{2}(q^2 + \pi^2)^3} \Theta_1 , \quad Z = \frac{\pi q^2}{(q^2 + \pi^2)^3} \Theta_2 .$$

Montrez que l'on obtient à partir des équations établies en 1.c le **système de Lorenz**

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt'} = P(Y - X) \\ \frac{dY}{dt'} = rX - Y - XZ \\ \frac{dZ}{dt'} = -bZ + XY \end{cases} . \quad (\text{Lorenz})$$

Vous donnerez notamment l'expression des paramètres r et b en fonction de R et q .

§

2.a Que représente physiquement le point fixe trivial $X = Y = Z = 0$ du système de Lorenz ?

2.b Montrez que si le paramètre r est suffisamment grand, un (ou plusieurs) autre(s) point(s) fixe(s) du système de Lorenz apparaît (apparaissent). Représentez tous les points fixes dans les plans (paramètre de contrôle

principal, amplitudes des rouleaux de convection), c'est-à-dire les plans (r, X) et (r, Y) . Comment appelle t'on précisément le phénomène que vous êtes en train de caractériser ? À quoi correspond t'il physiquement ?

2.c À l'aide de l'expression de r établie en **1.d**, par un processus d'optimisation que vous expliquerez, déterminez la longueur d'onde « optimale » des rouleaux de convection, c'est-à-dire la longueur d'onde des premiers rouleaux stationnaires que l'on peut obtenir en augmentant progressivement la différence de température appliquée $\delta T = T_2 - T_1$, en partant d'une situation où $\delta T = 0$. Donnez la valeur précise de la différence de température δT_c à laquelle ces rouleaux apparaissent.

2.d Calculez la valeur « optimale » du paramètre « géométrique » b .

§

On veut aller plus loin que ce que nous avait déjà appris l'analyse faiblement non linéaire du problème de départ, en s'intéressant à la *stabilité secondaire* en régime « *fortement non linéaire* », pour $r \gg 1$, des rouleaux de convection retrouvés en **2.b**. On note que, d'après la symétrie de (Lorenz) sous

$$(X, Y, Z) \mapsto (-X, -Y, Z), \tag{SymL}$$

on peut se focaliser sur l'étude du point fixe rouleaux « supérieur » tel que X et Y soient positifs.

3.a Calculez la matrice L de l'opérateur d'évolution linéarisé qui permet de prédire, d'après (Lorenz), l'évolution de petites perturbations de ce point fixe rouleaux.

Vous traiterez un cas général i.e. garderez P et b comme paramètres de contrôle secondaires, r comme paramètre de contrôle principal ; vous exprimerez r en terme d'un paramètre de contrôle réduit ϵ qui vaut 0 au seuil d'apparition des rouleaux trouvés en **2.b**, et qui est positif lorsque ces rouleaux existent.

3.b Un scénario observé numériquement, en intégrant (Lorenz) pour $P = 11$ et la valeur « optimale » $b = 8/3$, est l'apparition de perturbations² oscillantes amplifiées lorsque $r \gtrsim 25$. Au contraire, pour $r \lesssim 25$, on observe des perturbations² oscillantes amorties.

Au seuil de la bifurcation (secondaire) correspondante, quel doit être théoriquement le spectre de L , et en conséquence la forme du polynôme caractéristique de L ?

En calculant d'autre part ce polynôme directement à partir de la formule

$$\chi(L, \sigma) = \det(\sigma I - L),$$

I désignant la matrice identité, donnez une condition nécessaire (C) devant être vérifiée au seuil de cette bifurcation.

Vous continuerez à développer une théorie générale, i.e. pour des valeurs quelconques (positives) de P , b et ϵ .

3.c En admettant que cette condition (C) est aussi suffisante, déduisez en l'expression du seuil réduit ϵ_H auquel se produirait, d'après cette analyse théorique, cette bifurcation oscillante.

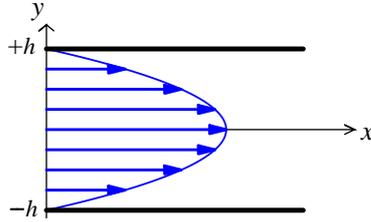
3.d Montrez que l'expression trouvée pour ϵ_H est cohérente avec le scénario découvert numériquement pour $P = 11$ et $b = 8/3$.

3.e Sur la base de cette étude théorique, peut on s'attendre à observer le même scénario de bifurcation secondaire oscillante avec $P = 1$ et $b = 8/3$?

²Perturbations d'un point fixe rouleaux trouvé en **2.b**.

Problème 2 Étude « énergétique » d'ondes de Tollmien-Schlichting (∈ examen 2004 - 2005)

Un modèle simple d'écoulement ouvert cisailé est constitué par l'écoulement de Poiseuille plan obtenu lorsqu'un fluide visqueux incompressible confiné entre deux plans parallèles situés en $y = \pm h$ est mis en mouvement par un gradient de pression uniforme dans la direction $-\hat{x}$:



On complète naturellement la base $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ par $\hat{z} = \hat{x} \wedge \hat{y}$, et on travaille en adimensionnel comme section B.3. De même que dans cette section, on considère exclusivement le devenir de perturbations bidimensionnelles xy données par un champ de vitesse de perturbation

$$\mathbf{v} = \text{rot}(\psi \hat{\mathbf{z}}) = (\partial_y \psi) \hat{\mathbf{x}} - (\partial_x \psi) \hat{\mathbf{y}}. \quad (\text{psi})$$

avec pour la fonction courant

$$\psi = \Psi(y) \exp(iqx) \quad (\text{MN})$$

en modes normaux, q étant le nombre d'onde.

1.a Explicitez l'équation d'Orr-Sommerfeld déterminant la valeur propre temporelle σ et la fonction propre complexe Ψ associées à un mode normal (MN), ainsi que les conditions limites correspondantes ; vous admettez que les modes $q = 0$, qui requièrent un traitement séparé, sont non dangereux, et considérez seulement le cas $q > 0$.

1.b Quelle est la nature du problème différentiel obtenu ? Pourquoi est-il difficile à résoudre ?

1.c On admet que ce système admet une *bifurcation structurante oscillante* lorsque le nombre de Reynolds R dépasse une valeur critique R_c , à laquelle correspond un seul mode critique. Expliquez ce que cela signifie précisément en terme de l'ensemble $S(R)$ des valeurs propres $\sigma(q, n, R)$ où $q \in]0, +\infty[$ et l'indice de modes $n \in \mathbb{N}$ repère les différents modes normaux de même nombre d'onde q à R fixé.

Que pouvez-vous dire des valeurs propres $\sigma(q, n, R)$ associées aux valeurs strictement négatives de q ?

§

Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, on note simplement q et Ψ les nombre d'onde et fonction propre critiques. On veut montrer, grâce à une méthode énergétique, sans effectuer le calcul précis³ de q et Ψ , que, dans un système à débit imposé, on a forcément des pertes de charge supplémentaires en régime non linéaire.

Pour cela on commence par caractériser d'un point de vue énergétique l'équilibre dynamique traduit par la neutralité du mode critique lorsque $R = R_c$. Bien entendu une telle méthode est globale i.e. elle s'intéresse à des valeurs moyennes de la forme

$$\langle f(y) \rangle_y = \int_{-1}^{+1} f(y) \frac{dy}{2}. \quad (\text{VM})$$

Vous utiliserez justement la notation suivante, valable pour n entier naturel :

$$I_n = \langle |\partial_y^n \Psi|^2 \rangle_y. \quad (\text{I})$$

³Qui ne peut être fait que numériquement !

2.a En développant complètement l'équation contrôlant la fonction propre critique Ψ au seuil $R = R_c$, la multipliant par la fonction critique complexe conjuguée Ψ^* et la moyennant par rapport à y , établissez une équation de la forme

$$i\omega_c J_1 + iqJ_2 = R^{-1}J_3 \tag{E0}$$

où ω_c est un paramètre réel que vous préciserez, J_1 , J_2 et J_3 , dépendant de q , u_0 et Ψ , sont des quantités que vous préciserez.

2.b Grâce à des intégrations par parties éventuellement répétées, exprimez J_1 et J_3 comme des combinaisons linéaires de certaines intégrales I_n .

2.c En prenant la partie réelle de l'équation (E0), montrez que l'on obtient une identité de la forme

$$qK_1 = R^{-1}K_2 \tag{E1}$$

où K_1 et K_2 sont des quantités dépendant de q , u_0 et Ψ que vous préciserez.

2.d Calculez l'intégrale de dissipation à l'ordre quadratique associée au mode critique réel

$$\psi = \Psi(y) \exp(iqx) + c.c. , \tag{MCR}$$

c'est-à-dire la quantité⁴

$$DI = 2 \langle \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} \rangle_{xy} \tag{DI}$$

où

$$\overline{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} (\overline{\nabla} \mathbf{v} + \overline{\nabla} \mathbf{v}^T)$$

est le tenseur des taux de déformation correspondants et le symbole $\langle \rangle_{xy}$ désigne la valeur moyenne par rapport à x et y , telle que, pour un mode de Fourier pur,

$$\langle f(y) \exp(ikx) \rangle_{xy} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 , \\ \langle f(y) \rangle_y & \text{si } k = 0 . \end{cases} \tag{RVMMF}$$

Vous explicitez un lien entre DI et la quantité K_2 introduite question **2.c**.

2.e Calculez la puissance transférée par l'écoulement de base au mode critique réel à l'ordre quadratique

$$P_c = \langle \overline{\mathbf{D}}_0 : \overline{\boldsymbol{\tau}} \rangle_{xy} \tag{PC}$$

où

$$\overline{\mathbf{D}}_0 = \frac{1}{2} (\overline{\nabla} \mathbf{v}_0 + \overline{\nabla} \mathbf{v}_0^T)$$

est le tenseur des taux de déformation associé à l'écoulement de base et

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = -\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \tag{tau}$$

est le tenseur des contraintes de Reynolds associé à l'écoulement critique (MCR).

Vous explicitez, grâce à une intégration par parties, un lien entre P_c et la quantité K_1 introduite question **2.c**.

2.f Déduisez de ce qui précède une réécriture de l'équation (E1), puis son interprétation énergétique.

⁴Je vous rappelle que, si $\overline{\mathbf{D}}$ et $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ sont deux tenseurs symétriques plans, leur produit doublement contracté vaut

$$\overline{\mathbf{D}} : \overline{\boldsymbol{\sigma}} = D_{xx}\sigma_{xx} + D_{yy}\sigma_{yy} + 2D_{xy}\sigma_{xy} .$$

§

On admet que le gradient de pression supplémentaire $\partial_x \bar{p}$ constant qu'il faut imposer à l'ordre quadratique pour maintenir un débit fixé en présence du mode 1 critique est donné par l'équation du mode 0, soit l'équation de Navier-Stokes moyenne à l'ordre quadratique

$$0 = -\partial_x \bar{p} + R^{-1} \partial_y^2 \bar{u} + \partial_y \langle \tau_{xy} \rangle_x . \quad (\text{EM0})$$

Dans cette équation $\bar{u}(y)$ est le champ de vitesse du mode 0, dont on requiert qu'il ne modifie pas le débit que l'on avait avec l'écoulement de base seul,

$$\langle \bar{u}(y) \rangle_y = 0 , \quad (\text{CDF})$$

τ_{xy} est la composante xy de (tau), et $\langle \rangle_x$ désigne la valeur moyenne par rapport à x . On admet de plus que la fonction courant propre critique, $\Psi(y)$, et la vitesse du mode 0, $\bar{u}(y)$, sont paires sous $y \mapsto -y$.

3.a Simplifiez l'expression du terme non linéaire source $\langle \tau_{xy} \rangle_x$, que vous noterez pour simplifier $\bar{\tau}_{xy}$, et donnez le lien entre les termes mis en évidence question **2.f.** et $\bar{\tau}_{xy}$. Donnez enfin la parité de la fonction $\bar{\tau}_{xy}$ sous $y \mapsto -y$.

3.b Intégrez une première fois (EM0) par rapport à y , et déterminez la constante d'intégration associée.

3.c Intégrez une deuxième fois (EM0) par rapport à y , et reliez la constante d'intégration associée à $\partial_x \bar{p}$.

3.d En exprimant la contrainte (CDF) à l'aide de ce qui précède, et grâce à une intégration par parties, montrez que $\partial_x \bar{p}$ est directement lié à un terme mis en évidence question **2.f.** Interprétez ce résultat.

Bibliographie

- AHLERS, G., CANNELL, D. S., DOMINGUEZ-LERMA, M. A. & HEINRICHS, R. 1986 Wavenumber selection and Eckhaus instability in Couette-Taylor flow. *Physica D* **23D**, 202–219.
- ANGILELLA, J.-R. 2006 *Caractérisation de phénomènes dynamiques*. Cours du Master 2 recherche de mécanique-énergétique de Nancy.
- ARANSON, I. S. & KRAMER, L. 2002 The world of the Complex Ginzburg-Landau Equation. *Rev. Mod. Phys.* **74**, 99–143.
- BAYLY, B. J., ORSZAG, S. A. & HERBERT, T. 1988 Instability mechanisms in shear-flow transition. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **20**, 359–391.
- BEN-DOV, G. & COHEN, J. 2007 Instability of optimal non-axisymmetric base-flow deviations in pipe Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **588**, 189–215.
- BODENSCHATZ, E., PESCH, W. & AHLERS, G. 2000 Recent developments in Rayleigh-Bénard Convection. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, 709–778.
- BUSSE, F. H. 2004 Visualizing the dynamics of the onset of turbulence. *Science* **305**, 1574–1575.
- CASTETS, V., DULOS, E., BOISSONADE, J. & KEPPER, P. D. 1990 Experimental evidence of a sustained standing Turing-type nonequilibrium chemical pattern. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2953–2956.
- CHARRU, F. 2007 *Instabilités hydrodynamiques*. EDP Sciences.
- DANGELMAYR, G. & KRAMER, L. 1998 Mathematical Tools for Pattern Formation. *Evolution of Spontaneous Structures in Dissipative Continuous Systems* (ed. F. H. Busse & S. C. Müller), *Lecture Notes in Physics*, vol. m 55, pp. 1–85. Springer-Verlag.
- DANGOISSE, D., HENNEQUIN, D. & ZEHNLE-DHAOUI, V. 1998 *Les lasers*. Dunod.
- DANIELS, P. G. & ONG, C. F. 1990 Nonlinear convection in a rigid channel uniformly heated from below. *J. Fluid Mech.* **215**, 503–523.
- DINKLAGE, A., BRUHN, B., DEUTSCH, H., JONAS, P., KOCH, B. P. & WILKE, C. 1998 Observation of the spatiotemporal dynamics of ionization wave mode transitions. *Phys. Plasmas* **5**, 833–835.
- DRAZIN, P. D. 2002 *Introduction to hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- FAISST, H. & ECKHARDT, B. 2003 Traveling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 224502, 1–4.
- FAUVE, S. 1998 Pattern forming instabilities. *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities* (ed. C. Godrèche & P. Manneville), pp. 387–491. Cambridge University Press.
- GAVARINI, M. I., BOTTARO, A. & NIEUWSTADT, F. T. M. 2004 The initial stage of transition in pipe flow : role of optimal base-flow distortions. *J. Fluid Mech.* **517**, 131–165.
- HAKEN, H. 1977 *Synergetics - An introduction*. Springer-Verlag.
- HAKIM, V. 1998 Asymptotic techniques in nonlinear problems : some illustrative examples. *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities* (ed. C. Godrèche & P. Manneville), pp. 295–386. Cambridge University Press.

- HOF, B., VAN DOORNE, C. W. H., WESTERWEEL, J., NIEUWSTADT, F. T. M., FAISST, H., ECKHARDT, B., WEDIN, H., KERSWELL, R. R. & WALEFFE, F. 2004 Experimental observation of nonlinear traveling waves in turbulent pipe flow. *Science* **305**, 1594–1598.
- HOF, B., JUEL, A. & MULLIN, T. 2003 Scaling of the turbulence transition threshold in a pipe. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 244502,1–4.
- HUERRE, P. & ROSSI, M. 1998 Hydrodynamic instabilities in open flows. *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities* (ed. C. Godrèche & P. Manneville), pp. 81–294. Cambridge University Press.
- KOLODNER, P. 1992 Observations of the Eckhaus instability in one-dimensional traveling-wave convection. *Phys. Rev. A* **46**, R1739–1742.
- LAKE, B. M., YUEN, H. C., RUNGALDIER, H. & FERGUSON, W. E. 1977 Nonlinear deep-water waves : theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train. *J. Fluid Mech.* **83**, 49.
- LENGYEL, I. & EPSTEIN, I. R. 1991 Modeling of Turing structures in the Chlorite-Iodide-Malonic Acid-Starch reaction system. *Science* **251**, 650–652.
- LENGYEL, I., RABAI, G. & EPSTEIN, I. R. 1990 Systematic design of chemical oscillators. Part 65. Batch oscillation in the reaction of chlorine dioxide with iodine and malonic acid. *J. Am. Chem. Soc.* **112**, 4606.
- LESSEN, M., SADLER, S. G. & LIU, T. Y. 1968 Stability of pipe Poiseuille flow. *Phys. Fluids* **11**, 1404–1409.
- LIU, Y. & ECKE, R. E. 1997 Eckhaus-Benjamin-Feir instability in rotating convection. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4391–4394.
- LIU, Y. & ECKE, R. E. 1999 Nonlinear traveling waves in rotating Rayleigh-Bénard convection : Stability boundaries and phase diffusion. *Phys. Rev. E* **59**, 4091–4105.
- LOWE, M. & GOLLUB, J. P. 1985 Pattern selection near the onset of convection : the Eckhaus instability. *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2575–2578.
- MANNEVILLE, P. 1991 *Structures dissipatives, chaos et turbulence*. Aléa Saclay.
- MANNEVILLE, P. 2004 *Instabilités, chaos et turbulence*. Ellipses.
- MATHIS, C., PROVANSAL, M. & BOYER, L. 1984 The Bénard-von Karman instability : an experimental study near the threshold. *J. Phys. (France) Lett.* **45**, 483–491.
- MEIGNIN, L., GONDRET, P., RUYER-QUIL, C. & RABAUD, M. 2003 Subcritical Kelvin-Helmholtz instability in a Hele-Shaw cell. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 234502,1–4.
- MORI, H. & KURAMOTO, Y. 1997 *Dissipative structures and chaos*. Springer-Verlag.
- NEWELL, A. C., PASSOT, T. & LEGA, J. 1993 Order parameter equations for patterns. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **25**, 399–453.
- NEWELL, A. C. & WHITEHEAD, J. A. 1969 Finite bandwidth, finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.* **38**, 279–303.
- NOACK, B. R. & ECKELMANN, H. 1994 Global stability analysis of the steady and periodic cylinder wake. *J. Fluid Mech.* **270**, 297–330.
- ORSZAG, S. A. & PATERA, A. T. 1980 Subcritical transition to turbulence in plane channel flow. *Phys. Rev. Lett.* **45**, 989–993.
- OSWALD, P. & PIERANSKI, P. 2000 *Les cristaux liquides*. Gordon & Breach.
- OUYANG, Q. & SWINNEY, H. L. 1991 Transition from a uniform state to hexagonal and striped Turing patterns. *Nature* **352**, 610–612.
- PAN, L. & DE BRUYN, J. R. 1994 Nonuniform broken-parity waves and the Eckhaus instability. *Phys. Rev. E* **49**, 2119–2129.
- PLAUT, E. 2003 Nonlinear dynamics of traveling waves in rotating Rayleigh-Bénard convection : effects of the boundary conditions and of the topology. *Phys. Rev. E* **67**, 046303,1–11.

- PLAUT, E. & PESCH, W. 1999 Extended weakly nonlinear theory of planar nematic convection. *Phys. Rev. E* **59**, 1747–1769.
- PRINGLE, C. C. T. & KERSWELL, R. R. 2007 Asymmetric, helical, and mirror-symmetric Traveling Waves in Pipe Flow. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 074502,1–4.
- RABINOVICH, M. I., EZERSKY, A. B. & WEIDMAN, P. D. 2000 *The dynamics of patterns*. World Scientific.
- RASHKEEV, S. N., GLAZOV, M. V. & BARLAT, F. 2001 Eckhaus instability - a possible wavelength changing mechanism in the evolution of dislocation patterns. *Comp. Materials Sci.* **21**, 230–242.
- RAYLEIGH, J. W. S. 1880 On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math. Soc.* **11**, 57–70.
- REYNOLDS, O. 1883 An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **174**, 935–982.
- REYNOLDS, O. 1895 On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **186**, 123–164.
- REYNOLDS, W. C. & POTTER, M. C. 1967 Finite-amplitude instability of parallel shear flows. *J. Fluid Mech.* **27**, 465–492.
- SALWEN, H., COTTON, F. W. & GROSCH, C. E. 1980 Linear stability of Poiseuille flow in a circular pipe. *J. Fluid Mech.* **98**, 273–284.
- SCHLICHTING, H. 1979 *Boundary-layer theory*. Mac Graw-Hill.
- SCHLÜTER, A., LORTZ, D. & BUSSE, F. H. 1965 On the stability of steady finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.* **23**, 129–144.
- SCHMID, P. J. & HENNINGSON, D. S. 1994 Optimal energy density growth in Hagen-Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **277**, 197–225.
- SCHMID, P. J. & HENNINGSON, D. S. 2001 *Stability and transition in shear flows*. Springer-Verlag.
- SCHNEIDER, T. M., ECKHARDT, B. & YORKE, J. A. 2007 Turbulence Transition and the Edge of Chaos in Pipe Flow. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 034502,1–4.
- SEGEL, L. A. 1969 Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection. *J. Fluid Mech.* **38**, 203–224.
- SQUIRE, H. B. 1933 On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. *Proc. R. Soc. London A* **142**, 621–628.
- STASIEK, J. 1997 Thermochromic liquid crystals and true colour image processing in heat transfer and fluid-flow research. *Heat and Mass Transfer* **33**, 27–39.
- STROGATZ, S. H. 1994 *Nonlinear dynamics and chaos*. Perseus Publishing.
- TURING, A. M. 1952 The chemical basis of morphogenesis. *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. B* **237**, 37–72.
- WALEFFE, F. 1997 On a self-sustaining process in shear flows. *Phys. Fluids* **9**, 883–900.
- WALEFFE, F. 1998 Three-dimensional coherent states in plane shear-flows. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4140–4143.
- WALEFFE, F. 2001 Exact coherent structures in channel flow. *J. Fluid Mech.* **435**, 93–102.
- WEDIN, H. & KERSWELL, R. R. 2004 Exact coherent structures in pipe flow : travelling wave solutions. *J. Fluid Mech.* **508**, 333–371.
- WEISSMAN, M. A. 1979 Nonlinear wave packets in the Kelvin-Helmholtz instability. *Phil. Trans. R. Soc. London A* **291**, 639–681.