

Indiquez en tête de vos copies votre *groupe de TD* (1.x ou 2.y).

Rédigez avec soin et en langue française. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques sera, a priori, considérée comme nulle. Lorsque l'on demande des « *commentaires* », on attend toujours des *commentaires physiques*.

Un corrigé succinct sera publié dès cet après-midi sur la page web des annales, avec quelques compléments.

**Problème : Étude d'une pale d'éolienne bloquée soumise à un vent fort**

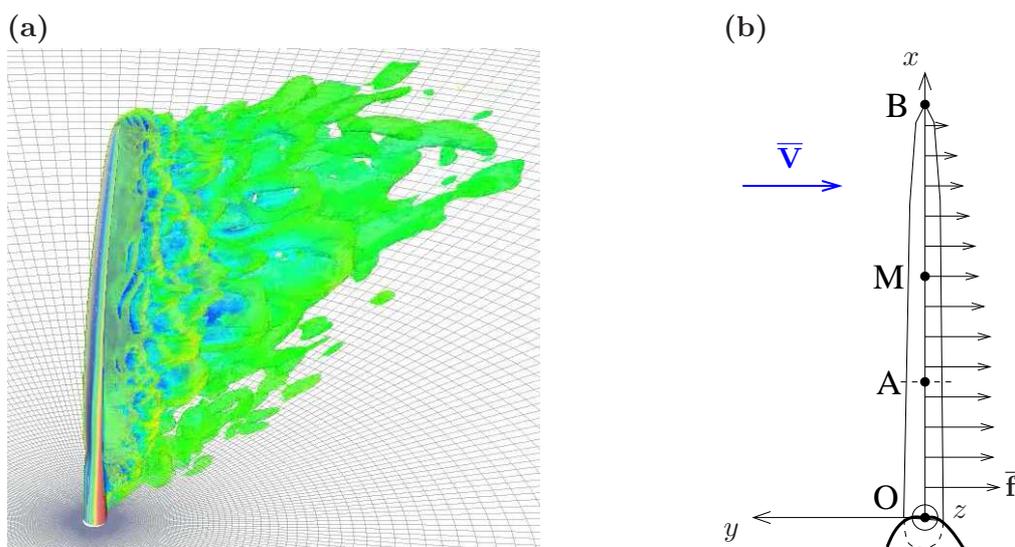
On étudie une *pale d'éolienne* en situation de *tempête*, soumise dans la configuration « actuelle » ou « finale » à un vent de vitesse moyenne  $\bar{V}$ . La rotation de l'éolienne est bloquée. On suppose pour fixer les idées que, dans la configuration de référence sans vent, la pale est orientée dans la direction verticale  $x$ . L'éolienne présente malheureusement face au vent, orienté dans la direction horizontale  $-y$ , son profil le moins aérodynamique et le plus large. Cette situation a été étudiée numériquement, pour une pale de longueur  $L = 60$  m d'une éolienne 5 MW, dans le laboratoire ForWind - IWES, qui a produit le film que l'on vient de vous montrer, dont la dernière image se trouve en figure a. La figure b présente le repère cartésien  $Oxyz$  utilisé. La base orthonormée correspondante est notée  $\{\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z\}$ . Sur la « *fibre moyenne* », définie dans la configuration de référence par le segment

$$\{ A(x,0,0) \text{ avec } x \in [0,L] \}, \quad (1)$$

figurent le point O à la « *racine* » de la pale, là où elle est fixée sur le moyeu, le point A où on imaginera une coupe virtuelle de la pale, un autre point courant M, et enfin le point B extrémité de la pale. Dans la configuration actuelle, le *vecteur déplacement* du point A est

$$\bar{u}(x) = v(x) \bar{e}_y \quad (2)$$

avec  $v$  la « *flèche* », que l'on veut calculer. On se place dans l'hypothèse de petits déplacements et petite transformation, et d'une réponse élastique linéaire de la structure de la pale. La température ambiante est de l'ordre de 20°C.



**Fig. a :** Image du film de ForWind - IWES, calculé pour  $V = \|\bar{V}\| = 50$  m/s. Les structures dans le sillage de la pale sont les zones tourbillonnaires de l'écoulement, visualisées à l'aide d'un critère de calcul tensoriel. **b :** Schéma de principe avec la pale dans la situation de référence, mais le vecteur vitesse du vent  $\bar{V}$  et la densité de force  $\bar{f}$  de la configuration finale - échelle non respectée. La ligne pointillée en A représente la coupe virtuelle étudiée en question 3.

## 1 Modèle géométrique de la section de la pale dans le plan $xOz$

**1.1** Dans le plan  $xOz$  face au vent, la section de la pale est définie par sa frontière dans le demi-plan  $z > 0$ , l'arc paramétré

$$z_+(x) = a \sqrt{1 - x/L} \quad \text{avec} \quad a = 2,8 \text{ m},$$

et sa frontière dans le demi-plan  $z < 0$ , l'arc paramétré

$$z_-(x) = -z_+(x).$$

Représentez soigneusement sur votre copie, à l'échelle 1/400ème, les fonctions  $z_{\pm}(x)$  dans le plan  $xOz$ . Montrez que la frontière peut être décrite par une équation simple reliant  $x$  et  $z^2$ , et déduisez-en un adjectif pour qualifier la forme géométrique de cette section de la pale.

**1.2** On définit le diamètre de la pale face au vent à une distance  $x$  du moyeu comme la distance entre les deux points intersection de la frontière précédemment caractérisée avec le plan d'abscisse  $x$ . Rajoutez sur le schéma de la question 1.1 ces deux points, dans un cas quelconque. Dans le cas général, montrez que

$$d(x) = d_0 \sqrt{1 - x/L}. \quad (3)$$

Calculez  $d_0$  analytiquement et numériquement.

## 2 Force de traînée aérodynamique par unité de longueur

On admet que les forces aérodynamiques dominantes sont celles de traînée, qui sont bien décrites par une densité linéique de force  $\bar{\mathbf{f}} = -f_y(x) \bar{\mathbf{e}}_y$ , avec  $f_y$  calculée localement comme dans le cas d'un cylindre. Montrez que

$$f_y(x) = f_0 \sqrt{1 - x/L}. \quad (4)$$

Calculez  $f_0$  analytiquement, puis, numériquement, en prenant  $V = 50$  m/s et un coefficient de traînée  $C_t = 1,8$  adapté aux vents forts. Commentez succinctement la valeur et forme de  $f_y(x)$ , et la valeur de  $C_t$ .

## 3 Couple de flexion correspondant

On admet que la flexion de la pale est contrôlée essentiellement par le couple de flexion  $\bar{\Gamma}(x_A)$  total en « aval » du point A, en lequel on considère une coupe virtuelle de la pale (cf. figure b). Exprimez le couple élémentaire  $d\bar{\Gamma}$  exercé au point A par la force  $\bar{\mathbf{f}} dx$  appliquée autour M de coordonnées  $(x,0,0)$  avec  $x > x_A$ . En intégrant  $d\bar{\Gamma}$  sur la partie avale de la poutre, montrez que le couple de flexion total au niveau de A prend la forme

$$\bar{\Gamma}(x_A) = \Gamma(x_A) \bar{\mathbf{e}}_z \quad \text{avec} \quad \Gamma(x_A) = -G_0 (L - x_A)^\alpha. \quad (5)$$

Calculez  $G_0$  analytiquement en fonction de  $f_0$  et  $L$ , et l'exposant  $\alpha$ , qui est un rationnel.

Représentez par des flèches courbes l'allure des couples  $\bar{\Gamma}(x)$  le long de la fibre moyenne de la pale, dans le plan  $xOy$ , et commentez succinctement.

## 4-6 Étude de la flexion, en passant par le coefficient de rigidité en flexion

On admet que, bien que la pale soit de nature composite, la théorie développée dans le problème 5.1 du cours, sur l'étude de poutres en flexion plane, s'applique. Ainsi, la flèche  $v(x)$  est déterminée par l'équation différentielle ordinaire, dite *équation d'Euler - Bernoulli*,

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\Gamma(x)}{K(x)} \quad (6)$$

où  $K(x)$  est le *coefficient de rigidité en flexion*. Celui-ci dépend du module d'Young des matériaux qui constituent la pale, et de la géométrie de la section de la pale dans le plan d'abscisse  $x$ .

**4.1** Afin de simplifier les calculs et de leur conférer un peu d'universalité, on adimensionne les longueurs par  $L$ ,  $K$  par sa valeur à la racine, soit  $K_0 = K(x=0)$ , et  $\Gamma$  par  $\Gamma_0 = K_0^\beta L^\gamma$ . Déterminez les valeurs (entières) des exposants  $\beta$  et  $\gamma$  par analyse dimensionnelle.

**4.2** On définit le couple adimensionné  $g$  en fonction de l'abscisse adimensionnée  $X = x/L$  par les équations

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 g(x/L) \iff g(X) = \Gamma(LX)/\Gamma_0 . \quad (7)$$

Montrez, à l'aide des résultats de la question 3, que

$$g(X) = -g_0 (1 - X)^\alpha \quad (8)$$

et calculez  $g_0$  analytiquement en fonction de  $f_0$ ,  $K_0$  et  $L$ .

**5** On admet que le coefficient de rigidité adimensionné  $k$ , défini par les équations

$$K(x) = K_0 k(x/L) \iff k(X) = K(LX)/K_0 , \quad (9)$$

est donné par

$$k(X) = \frac{(1 - X)^{5/2}}{1 + 7X + 17X^2 - 25X^3} = \frac{(1 - X)^{3/2}}{1 + 8X + 25X^2} . \quad (10)$$

Représentez la fonction  $k(X)$  et commentez succinctement ce graphe.

**6.1** En introduisant finalement la flèche adimensionnée  $w$  à l'aide des équations

$$v(x) = L w(x/L) \iff w(X) = v(LX)/L , \quad (11)$$

adimensionnez l'équation (6). Résolvez-la analytiquement, en écrivant aussi des conditions limites simples pour exprimer qu'en  $x = 0$  la pale est encastree dans le moyeu fixe. Montrez que

$$w(X) = -g_0 \frac{X^2}{12} P(X) \quad (12)$$

et calculez le polynôme  $P(X)$ .

**6.2** Représentez le graphe de la fonction  $w(X)/g_0$ . Commentez succinctement.

**6.3** Revenant à la flèche dimensionnelle  $v(x)$ , calculez sa valeur absolue maximale  $v_{\max}$ , et dites où elle est atteinte. Vous donnerez l'expression analytique de  $v_{\max}$  en fonction de  $f_0$ ,  $L$  et  $K_0$ , et expliquerez physiquement la dépendance de  $v_{\max}$  par rapport à ces trois paramètres.

**6.4** Dans le cas où  $V = 50$  m/s, sachant d'autre part que la rigidité à la racine  $K_0 = 19 \cdot 10^9$  N m<sup>2</sup>, calculez la valeur numérique de  $v_{\max}$ . Représentez dans le plan  $xOy$ , sur une figure à l'échelle 1/400ème, l'allure de la fibre moyenne déformée par le vent et du champ de vecteurs déplacement  $\bar{\mathbf{u}}(x)$  le long de la fibre moyenne. Concluez sur la qualité du modèle proposé.

## 7 Étude sommaire des contraintes

On admet qu'en première approximation, la partie la plus rigide de la section de la pale à sa racine est une structure creuse légère qui occupe une surface  $\Sigma_0$  dans le plan  $x = 0$ . On admet que sur  $\Sigma_0$  le tenseur des contraintes  $\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_{xx} \bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_x$  avec  $\sigma_{xx} = -\Gamma(0) y/I$  où le moment quadratique  $I = 0,1$  m<sup>4</sup>.

**7.1** Donnez l'expression analytique de  $\sigma_{xx}$  en fonction de  $f_0$ ,  $y$ ,  $L$  et  $I$ . Sur  $\Sigma_0$  vue comme une coupe virtuelle de la pale à sa racine, calculez le vecteur contrainte  $\bar{\mathbf{T}}$  exercé par la pale sur sa racine encastree. Représentez dans le plan  $xOy$  l'allure du champ  $\bar{\mathbf{T}}$ . Expliquez la physique des efforts correspondants.

**7.2** Dans le cas  $V = 50$  m/s, sachant que la valeur maximale de  $|y|$  sur  $\Sigma_0$  est  $b = 1$  m, calculez la valeur absolue maximale de la contrainte  $\sigma_{xx}$  sur  $\Sigma_0$ , analytiquement puis numériquement. Commentez succinctement. Comment pourrait-on prolonger de façon pertinente cette étude ?

**Barème indicatif :** 4 points environ de « bonus » devraient être disponibles :

Question	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points	1,5	2,5	3,25	1,25	1,5	8,5	5,5	24