

Indiquez en tête de votre copie votre *groupe de TD* (Ax ou By). Rédigez avec soin, de façon détaillée. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques risque d'être considérée comme nulle. Un corrigé succinct, avec quelques compléments, sera publié sur la page des annales.

Problème : Flexion d'un mât d'éolienne sous l'effet de la force du vent

On s'intéresse aux *phénomènes de flexion du mât d'éoliennes modernes*, comme introduits dans la présentation et le film préliminaires. On mènera dans le corps du problème, questions 1 à 14, une étude essentiellement analytique sur la base d'approches simples, en statique, en considérant une configuration initiale et de référence sans vent, et une configuration actuelle avec vent, d'où une *force aérodynamique* \vec{F} exercée par le vent sur le rotor et une flexion, cf. les figures abc ci-dessous. La dernière question 15 ouvrira par contre sur des phénomènes instationnaires, ceux du film. Les applications numériques seront faites pour l'éolienne du film V112 4 MW, notée plus brièvement **V112**. Cette éolienne a une puissance nominale de 4 MW, un rotor de diamètre $D = 112$ m, un mât de hauteur $H = 140$ m. On utilise un repère cartésien $Oxyz$ orthonormé direct tel que

- O se trouve au niveau du sol, sur l'axe de révolution du mât ;
- Oy est dirigé, dans la configuration avec vent incident, dans la direction opposée à celui-ci ;
- Ox vertical est l'axe de révolution du mât.

Ce mât est constitué de portions légèrement coniques, plus étroites et légères en haut qu'en bas, jointes entre elles par boulonnage. Cependant, pour simplifier, on considère que c'est un cylindre de rayons intérieur et extérieur uniformes, respectivement $a = 2,28$ m et $b = 2,3$ m, en *acier* de module d'Young $E = 200$ GPa, coefficient de Poisson $\nu = 0,28$.

L'air ambiant est à une température d'environ 20°C , sa masse volumique ρ est connue.

Dans une première partie, on discute de la *force aérodynamique* \vec{F} à l'aide du *modèle de Betz*, dans le régime en vent fort où la puissance P est constante à valeur nominale.

Dans une seconde partie, on calcule la *flèche* engendrée $v(x)$ à l'aide du *modèle d'Euler-Bernoulli*, et on étudie les *déformations associées*.

On termine par une partie d'ouverture.

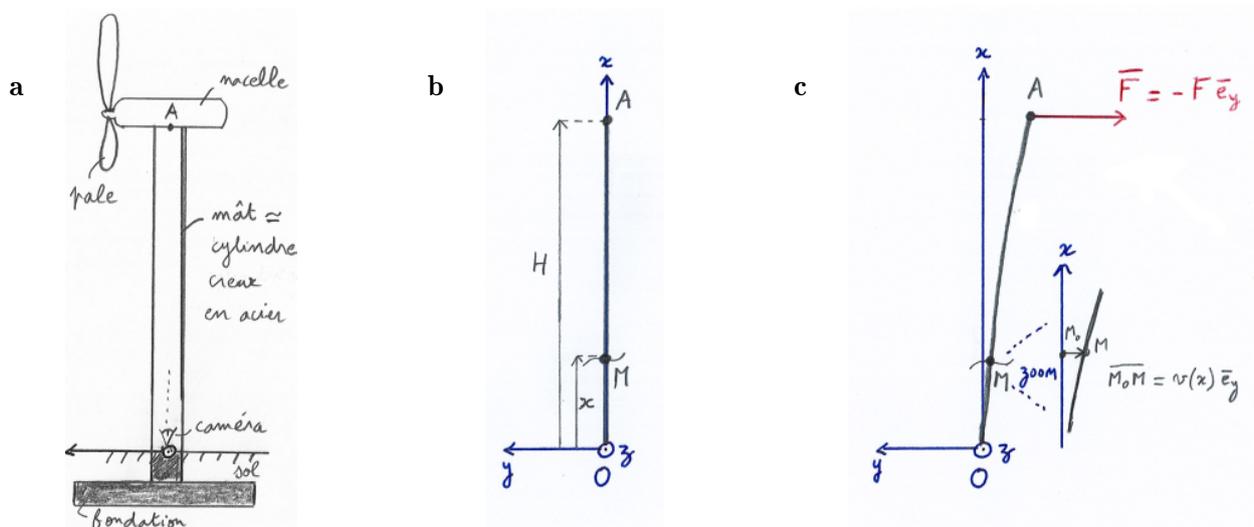


Fig. a : Schéma d'une éolienne sans vent, dans des proportions non respectées ; on a représenté la caméra utilisée pour tourner le film préliminaire. **b :** Encore plus schématiquement, configuration initiale et de référence de l'étude, sans vent, le mât est donc droit. **c :** Configuration actuelle avec vent, d'où la *force aérodynamique* \vec{F} appliquée au rotor et transmise par celui-ci à la nacelle puis au mât, qui fléchit. La fonction « *flèche* » $v(x)$ mesure le déplacement entre la position initiale M_0 d'un point M de la fibre moyenne et sa position actuelle, déplacement exagéré pour une bonne visualisation. Le \sim au niveau de M symbolise la coupe virtuelle discutée au niveau de l'équation (B.1).

Première partie : étude et estimation de la norme F de la force aérodynamique à l'aide du modèle de Betz

Les principaux résultats de ce modèle, supposé ici pertinent, sont présentés dans l'annexe A. On s'intéresse exclusivement, dorénavant, au **plateau à puissance nominale à vent « fort »**, qui se produit, pour V112, à $P = 4$ MW, lorsque la vitesse du vent incident $U \in [U_0 ; U_d] = [10,5 ; 25]$ m/s.

1 Montrez que le rendement c_p est alors connu analytiquement, et représentez la courbe $c_p(U)$ pour V112 dans l'intervalle du plateau. Commentez.

2 On se place à la vitesse d'entrée U_0 sur le plateau, où F et c_p sont grands ; on suppose que là, pour V112, $r = 0,6$. Estimez alors numériquement c_p puis F ; commentez.

3 On considère un autre cas, plus proche a priori de celui du début du film, d'un vent plus fort $U = 21$ m/s ; on suppose que là, pour V112, $r = 0,962$. Estimez alors numériquement c_p puis F ; montrez que c'est cohérent et commentez.

Deuxième partie : estimation de la flexion et des déformations associées à l'aide du modèle d'Euler-Bernoulli

Les hypothèses, supposées vérifiées ici, et résultats de ce modèle sont présentés dans l'annexe B. Les applications numériques seront bien sûr faites pour V112.

4 Calculez analytiquement le **couple de flexion** $\bar{\Gamma}(M)$ exercé en M à cause de la force $\bar{\mathbf{F}}$ que l'on suppose appliquée, à l'échelle du mât, à son sommet A. Identifiez sa composante z notée $\Gamma(x)$. Dans le plan xOy , représentez ces couples par des flèches courbes le long du mât et commentez succinctement.

5 Vérifiez que l'**équation d'Euler - Bernoulli** est ici une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 sur la **fonction flèche** $v(x)$, avec un terme source polynomial de degré 1 en x .

Résolvez cette équation analytiquement compte tenu des **conditions d'encastrement** $v(0) = v'(0) = 0$.

6 Montrez que $|v(x)|$ est maximale au sommet du mât, et donnez là sa valeur analytique v_{\max} . Commentez son expression en fonction des paramètres F , H et K .

7 Calculez analytiquement puis numériquement le **moment quadratique** I ; pour cela passez en coordonnées polaires dans le plan yOz , en prenant garde à bien exprimer l'élément de surface correspondant.

8 Calculez numériquement le **coefficient de rigidité en flexion** K .

9.1 Dans le cas étudié dans la question 2, où F est maximal, calculez la valeur numérique de v_{\max} . Commentez succinctement.

9.2 Dans le plan xOy , représentez à l'échelle 1/1000ème la fibre moyenne non déformée puis déformée, et quelques vecteurs déplacements.

10 Dans le cas étudié dans la question 3, où F est moindre, mais qui devrait correspondre à peu près au début du film, calculez la valeur numérique de v_{\max} . Commentez.

11 Par un calcul partant d'une équation de l'annexe B, établissez la forme générale du **tenseur des déformations linéarisé en flexion**. Vérifiez que les déformations dans la direction verticale x dominent. Commentez l'expression analytique de ϵ_{xx} en fonction de F , H , K , x et y .

12 Donnez l'expression analytique de $\epsilon_0 = \max |\epsilon_{xx}|$ lorsque l'on fait varier le point considéré sur toute la surface extérieure du mât, d'où variations des coordonnées x et y dans des intervalles que vous définirez.

13 Donnez la valeur numérique de ϵ_0 dans le cas de flexion la plus forte de la question 9. Commentez.

14 Quel serait l'intérêt d'équiper un prototype de jauges de déformation verticales placées en bas du mât, sur son pourtour extérieur, permettant de mesurer ϵ_{xx} en des points régulièrement espacés angulairement ?

Troisième partie : ouverture

15 Pourquoi le film préliminaire, réalisé suite à une mise en drapeau rapide des pales, montre alors des oscillations, amorties, du mât ?

Annexe A : principaux résultats du modèle de Betz

Ce modèle est présenté dans le pb. 8.1 du cours de mécanique.

La *vitesse au niveau du rotor* u est la moyenne des *vitesse du vent incident* U en amont, et en *aval* u_s , lorsque la pression sur l'axe du rotor a rejoint la pression atmosphérique :

$$u = \frac{1}{2} (U + u_s) . \quad (\text{A.1})$$

On introduit le *facteur de ralentissement du vent*

$$r = u_s/U \iff u_s = rU , \quad (\text{A.2})$$

de qui dépend le *coefficient de puissance* ou *rendement*

$$c_p = \frac{2P}{\rho A U^3} = \frac{1}{2} (1+r)^2 (1-r) \quad (\text{A.3})$$

avec A l'aire balayée par le rotor, de diamètre D , P la *puissance électrique produite*. Enfin, la *norme de la force aérodynamique exercée par le vent sur le rotor*

$$F = \|\bar{\mathbf{F}}\| = P/u . \quad (\text{A.4})$$

Annexe B : principales hypothèses et principaux résultats du modèle d'Euler-Bernoulli

Ce modèle est présenté dans le pb. 5.1 du cours de mécanique.

On considère un *solide élastique élané*, tel le mât de l'éolienne, en *petits déplacements*, *petite transformation* de *flexion* dans le plan xOy .

Sa *fibre moyenne* est l'ensemble des points de l'axe Ox du mât dans la configuration de référence, qui sont chacun le barycentre de la section droite Σ du mât à la hauteur x considérée. On peut donc suivre ces points dans la configuration actuelle : le point M de la fibre moyenne qui était en $O + x\bar{\mathbf{e}}_x$ en configuration de référence se trouve en $O + x\bar{\mathbf{e}}_x + v(x)\bar{\mathbf{e}}_y$ en configuration actuelle, avec $v(x)$ la *flèche*.

On imagine une *coupe virtuelle* en M , de normale unitaire sortante $\bar{\mathbf{e}}_x$; le *couple de flexion*

$$\bar{\Gamma}(M) = \Gamma(M) \bar{\mathbf{e}}_z = \Gamma(x) \bar{\mathbf{e}}_z \quad (\text{B.1})$$

exercé par la partie avale du mât, centrée sur le segment MA dans la configuration de référence, sur la partie amont, centrée sur le segment OM dans la configuration de référence, contrôle la flèche locale suivant l'*équation d'Euler - Bernoulli* :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\Gamma(x)}{K} . \quad (\text{B.2})$$

Dans cette équation le *coefficient de rigidité en flexion*

$$K = E I \quad (\text{B.3})$$

avec E le *module d'Young* du matériau constituant le mât, I son *moment quadratique* par rapport à l'axe z ,

$$I = \iint_{\Sigma_0} y^2 dy dz , \quad (\text{B.4})$$

Σ_0 étant la section droite générique du mât, en $x = 0$ en configuration de référence, de qui se déduisent par translations d'axe Ox toutes les sections droites Σ du mât.

Enfin, on admet que le *tenseur des contraintes* dans toute la section Σ située à l'abscisse x de M est

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_{xx} \bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_x = -\frac{\Gamma(x) y}{I} \bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_x . \quad (\text{B.5})$$