Mines Nancy - 1$^{\text{ère}}$ année - Test 1 de MMCSF du 7 janvier 2021 - Durée 3 heures

Documents autorisés : les polycopiés de calcul tensoriel et mécanique - Calculatrices autorisées

Indiquez en tête de votre copie votre *groupe de TD* (Ax ou By). Rédigez avec soin et en langue française. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques risque d'être considérée comme nulle. Un corrigé succinct, avec quelques compléments, sera publié dès cet après-midi sur http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc .

La question 1.2 est « subsidiaire » : sa résolution n'est pas indispensable pour avancer dans le problème.

Problème : *Thermoélasticité - Application à un tuyau sous pression et chargement thermique*

Première partie : Thermoélasticité générale

On s'intéresse dans tout ce problème à des matériaux ***solides élastiques isotropes***, en ***petits déplacements*** et ***petite transformation***. On néglige les effets de la pesanteur ou les suppose inclus dans la configuration de référence initiale. Cette configuration initiale est supposée ***isotherme***, i.e., le champ de ***température*** T est uniforme, $T = T_0$. Au contraire, la configuration actuelle, supposée ***à l'équilibre*** elle aussi, est en général ***anisotherme***, caractérisée par des ***écarts de température***

$$\delta T(\overline{\mathbf{x}}) \;=\; T(\overline{\mathbf{x}}) - T_0$$

non uniformément nuls, avec $\overline{\mathbf{x}}$ la position actuelle, approximativement confondue avec la position initiale $\overline{\mathbf{X}}$. On admet que la ***loi de comportement thermoélastique*** s'écrit en additionnant aux expressions élastiques des tenseurs des termes sphériques proportionnels à δT, ce qui donne, pour le ***tenseur des déformations linéarisé***

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} \;=\; \frac{1+\nu}{E}\,\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \;-\; \frac{\nu}{E}\,(\mathrm{tr}\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}})\;\overline{\overline{\mathbf{1}}} \;+\; \alpha\;\delta T\;\overline{\overline{\mathbf{1}}}\;, \tag{1}$$

et pour le ***tenseur des contraintes de Cauchy***

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \;=\; \lambda\;(\mathrm{tr}\overline{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}})\;\overline{\overline{\mathbf{1}}} \;+\; 2\mu\;\overline{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} \;-\; k\;\delta T\;\overline{\overline{\mathbf{1}}}\;, \tag{2}$$

avec les coefficients caractéristiques du matériau suivants, tous positifs, dont les 4 premiers sont déjà connus et reliés entre eux comme dans le cours : ν le ***coefficient de Poisson***, E le ***module d'Young***, λ et μ les ***coefficients de Lamé***, α le ***coefficient de dilatation thermique***, k le ***module thermoélastique***.

1 On imagine une situation où un ***solide libre*** de toute contrainte, tel que $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \;=\; \overline{\overline{\mathbf{0}}}$ dans les configurations initiale et actuelle, est ***chauffé*** de façon ***uniforme*** : on passe de $\delta T = 0$ dans la configuration initiale à $\delta T > 0$ dans la configuration actuelle.

1.1 À partir, notamment, de formules tirées du cours de cinématique, montrez que l'on a bien une dilatation thermique de segments et volumes de taille infinitésimale, respectivement dX et d^3X, que vous quantifierez précisément. Pour cela, calculez les dilatations réduites, respectivement $(dx - dX)/dX$ et $(d^3x - d^3X)/d^3X$, avec dx et d^3x les tailles finales, en fonction des données du problème. Commentez succinctement le nom donné au coefficient α.

1.2 Déterminez le ***champ de déplacement*** $\overline{\mathbf{u}}$, de façon idéalement (ou en tout cas finalement) intrinsèque, à un champ de moments prêt. Montrez que si ce dernier champ est bien choisi, le mouvement associé, i.e., la fonction $\overline{\mathbf{x}}\big(\overline{\mathbf{X}}\big)$, a une interprétation géométrique très simple. Déduisez-en que les dilatations réduites de segments et volumes de taille finie sont identiques à celles de segments et volumes de taille infinitésimale. Commentez succinctement.

1.3 En exploitant l'hypothèse de contraintes nulles, reliez le module thermoélastique k aux coefficients λ, μ et α.
Commentez succinctement cette relation, valable généralement en thermoélasticité, et ce qu'elle signifie pour les contraintes d'origine thermique en $k\;\delta T$ dans l'équation (2).

2 On revient maintenant à un cas plus général comme décrit avant la question 1. Notamment, les champs T et δT sont dans la configuration actuelle non uniformes. En utilisant des résultats du cours, sans refaire les calculs pour ce qui est des termes liés au déplacement, donnez la nouvelle forme de l'***équation de Navier***, ici, l'équation d'équilibre local du solide, faisant intervenir $\overline{\mathbf{rot}}\,\overline{\mathbf{u}}$ et δT ou T.
Proposez une interprétation physique du nouveau terme d'origine thermique, dépendant linéairement de T, de cette équation.

§

Deuxième partie : Tuyau sous pression et chargement thermique

On revisite au moins dans ses principes l'étude de dimensionnement d'un ***tuyau du circuit primaire d'une centrale nucléaire*** déjà faite en TD. Ce tuyau long, de rayon intérieur a, extérieur b, est constitué d'un acier travaillant dans toutes les conditions posées dans la première partie du sujet. On utilise un repère cartésien Oxyz avec Oz l'axe de révolution du tuyau ; dans ce repère les coordonnées cylindriques sont notées (r,θ,z), la base locale associée $\{\overline{\mathbf{e}}_r,\overline{\mathbf{e}}_\theta,\overline{\mathbf{e}}_z\}$. Dans le TD, réalisé ***sans aucun effet thermique***, le tuyau était soumis à la seule ***surpression*** δp due à l'eau. On rappelle ses principaux résultats : dans le tuyau, le ***champ de déplacement*** était

$$\overline{\mathbf{u}} \;=\; u(r)\;\overline{\mathbf{e}}_r \tag{3}$$

avec

$$u(r) \;=\; \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2-a^2}\frac{\delta p}{\lambda+\mu}\;r \;+\; \frac{1}{2}\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{\delta p}{\mu}\;\frac{1}{r}\;; \tag{4}$$

la ***contrainte tangentielle maximale*** au rayon r était

$$\tau_{\max}(r) \;=\; \frac{a^2b^2}{(b^2-a^2)r^2}\;\delta p\;; \tag{5}$$

le ***critère de dimensionnement***

$$\forall r\;,\quad \tau_{\max}(r)\;<\;\tau_0 \tag{6}$$

conduisait à la ***valeur minimale du rayon extérieur***

$$b \;=\; \frac{a}{\sqrt{1-\delta p/\tau_0}}\;; \tag{7}$$

une application numérique avec a = 35 cm, E = 210 GPa, ν = 0,28, τ_0 = 63,75 MPa avait enfin donné b = 40,2 cm.
On veut maintenant prendre en compte les ***effets thermiques*** : entre la configuration initiale du réacteur à l'arrêt où l'eau intérieure au tuyau et l'air ambiant étaient à pression $p_0 = 1$ bar, température $T_0 = 30\,°$C, et la configuration actuelle en fonctionnement, l'eau est non seulement passée à $p = 155$ bars mais a aussi été ***chauffée***[1] à $T = 290\,°$C, tandis que l'air extérieur dans le bâtiment réacteur est resté à p_0, T_0 .

3.1 Afin de préparer l'étude du nouvel état d'équilibre thermoélastique du tuyau, représentez schématiquement dans le plan xOy ses configurations initiale et actuelle, en coupe, ainsi que les conditions limites concernant les pressions, vecteurs contraintes et températures. On vous demande d'écrire les valeurs des couples (pression, température) dans les milieux environnant le tuyau, et une représentation schématique du champ de vecteurs contraintes sur les frontières du tuyau.
Comme on travaille en différence entre ces deux configurations, représentez aussi, sur des schémas similaires, les configurations initiale non chargée et actuelle chargée suivant cette approche, ainsi que les conditions limites concernant les pressions, vecteurs contraintes et écarts de températures.
Précisez les valeurs numériques de la ***surpression*** δp et de l'***écart de température intérieur final*** δT_i .

3.2 Compte tenu de l'interprétation donnée plus haut du nouveau terme thermique dans l'équation de Navier, conjecturez les conséquences physiques de la prise en compte du chargement thermique en plus du chargement mécanique.

1. Par les réactions nucléaires !

4 On suppose que le ***champ d'écart de température*** qui résulte de l'équilibre thermique du système complet est, dans le tuyau, de la forme $\delta T(r) = \beta - \gamma r$. Calculez β et γ en fonction de a, b et δT_i . Représentez schématiquement la fonction $\delta T(r)$.

5.1 On suppose que le ***champ de déplacement*** $\overline{\mathbf{u}}$ dans le tuyau est toujours de la forme (3), mais avec une fonction $u(r)$ à recalculer. Rappelez l'expression intrinsèque de $\overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\overline{\mathbf{u}}$ et expliquez, sans faire plus de calcul, pourquoi $\overline{\mathbf{rot}\overline{\mathbf{u}}} = \overline{\mathbf{0}}$.

5.2 Explicitez l'***équation de Navier*** qui exprime la condition locale d'***équilibre thermoélastique du tuyau***. Montrez que la fonction $u(r)$ est de la forme

$$u(r) \;=\; Ar + B/r - Cr^n \tag{8}$$

où A et B sont des constantes pour l'instant inconnues, tandis que la constante C d'origine thermique est connue, n est un exposant entier dont vous préciserez la valeur.
Donnez l'expression analytique la plus explicite possible de C, faisant intervenir α et δT_i . Vérifiez l'homogénéité dimensionnelle de C, en notant T la fonction de dimension d'une température.

6.1 Donnez l'expression intrinsèque de $\overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\overline{\mathbf{u}}$ puis du ***tenseur des déformations linéarisé*** $\overline{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ en fonction des constantes A, B, C et de r. Donnez aussi la matrice $[\epsilon] \;=\; \mathrm{Mat}\big(\overline{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}},\{\overline{\mathbf{e}}_r,\overline{\mathbf{e}}_\theta,\overline{\mathbf{e}}_z\}\big)$.

6.2 Calculez $\mathrm{tr}\overline{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$. La valeur trouvée, pas encore totalement déterminée puisqu'elle implique l'inconnue A, est elle surprenante, au vu des calculs effectué au niveau de la question 5.2 ?

7 Donnez la forme de la matrice $[\sigma] \;=\; \mathrm{Mat}\big(\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}},\{\overline{\mathbf{e}}_r,\overline{\mathbf{e}}_\theta,\overline{\mathbf{e}}_z\}\big)$ du ***tenseur des contraintes de Cauchy*** $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ dans le tuyau : montrez que plusieurs de ses composantes sont nulles a priori. Calculez précisément sa composante σ_{rr} en fonction des constantes A, B, C, des variables thermiques β, γ, des coefficients de Lamé λ et μ, du module thermoélastique k et de r.

8 Rappelez ce qu'il faudrait faire pour déterminer A et B.
Faites le calcul dans le ***cas isotherme*** où $\delta T_i = 0$ donc C, β et γ sont nuls. Commentez les formules analytiques trouvées dans ce cas pour A et B, notées A_{iso} et B_{iso} ; par exemple, commentez la façon dont A_{iso} et B_{iso} dépendent de δp ou b.

9.1 Pour estimer l'importance des ***effets thermiques***, on sépare, dans l'expression générale de σ_{rr} établie en question 7, une somme $\sigma_{\text{élast}}$ d'origine élastique, contenant des termes proportionnels à A et B, d'une autre somme σ_{therm} ne contenant que des termes d'origine thermique. Identifiez $\sigma_{\text{élast}}$ et σ_{therm} . Montrez que σ_{therm} est d'un signe uniforme connu et commentez succinctement ce fait.

9.2 Dans le cas correspondant aux valeurs données après l'équation (7), sachant aussi que l'acier utilisé a un coefficient de dilatation thermique $\alpha \;=\; 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$, estimez l'ordre de grandeur maximal de $\sigma_{\text{élast}}$ et σ_{therm} lorsque r varie dans $[a,b]$. Pour ce qui est de $\sigma_{\text{élast}}$, on admet que l'on peut remplacer A et B par A_{iso} et B_{iso} . Discriminez finalement entre ces deux possibilités :

- la $1^{\text{ère}}$: les effets thermiques sont négligeables et n'ont pas à être considérés pour le dimensionnement ;
- la $2^{\text{ème}}$: les effets thermiques sont importants et doivent être considérés pour le dimensionnement.

§

Barème indicatif :

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Points	7	2,5	4	1	4,5	1,5	1,5	2	6	30

;

cette note brute N_b sur 30 (ou 27 sans considérer la question 1.2)
serait ramenée à 20 suivant une règle à définir,
du genre $N_f = xN_b$ avec x un coefficient de l'ordre de 0,8...