

Documents autorisés : les photocopiés de calcul tensoriel et mécanique - Calculatrices autorisées

Indiquez en tête de votre copie votre *groupe de TD* (A.x ou B.y). Rédigez avec soin et en langue française. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques risque d'être considérée comme nulle. Un corrigé succinct, avec quelques compléments, sera publié dès ce soir sur <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc>.

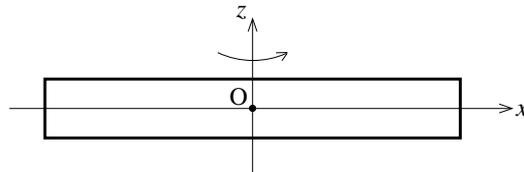
Barème indicatif :

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Total
Points	1	1	3	2	1	2	0,5	2,5	3	1	1,5	1,5	1	7	4	32

Cette note sera ramenée à 20 suivant une règle à définir. La troisième partie (questions 7 à 13) est assez « indépendante » de la quatrième (questions 14 et 15).

Problème : Équilibre d'un disque en rotation rapide, avec focus sur les déplacements

De nombreux systèmes mécaniques contiennent des *machines tournantes*, qui elles mêmes comportent des pièces dont la forme est approximativement celle d'un disque : *arbres de moteur* ou de *turbine, volants d'inertie*, etc... On s'intéresse à l'influence des forces d'inertie sur l'équilibre d'un « *disque* » (plus rigoureusement, un cylindre) *en rotation rapide*. On fait abstraction de la façon dont le disque est fixé et mis en rotation, et on ne considère pas l'influence de son poids ni celle de l'atmosphère. On travaille dans le référentiel \mathcal{R} lié à la machine tournante, dans lequel on utilise un repère $Oxyz$ avec Oz l'axe de rotation de la machine, axe de révolution du disque, et les coordonnées cylindriques (r, θ, z) associées. Le rayon extérieur du disque est a . La surface latérale définie par $r = a$ est libre. Les faces « inférieure » et « supérieure » du disque, situées en $z = \pm h$, sont aussi libres.



Dans le référentiel \mathcal{R}_0 galiléen du laboratoire, le référentiel \mathcal{R} a un mouvement de rotation caractérisé par le *vecteur vitesse de rotation instantanée*

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} = \omega \bar{e}_z \quad \text{avec} \quad \omega \text{ la } \textit{fréquence angulaire de rotation}, \text{ non nulle, constante.} \quad (1)$$

La configuration de référence, imaginaire, est celle où le disque tourne, mais où les forces d'inertie sont supposées nulles, ce qui reviendrait en fait à un disque non tournant. La configuration actuelle est celle où ces forces d'inertie sont prises en compte. À l'équilibre dans \mathcal{R} , seul agit le champ de *force volumique d'inertie d'entraînement*

$$\bar{\mathbf{f}}_e(\bar{\mathbf{X}}) = -\rho \bar{\gamma}_e = -\rho \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{\mathbf{X}}) \quad (2)$$

avec ρ la masse volumique du disque, $\bar{\gamma}_e$ l'accélération d'entraînement.

Le matériau du disque est *élastique isotrope linéaire*, et on fait l'hypothèse de *petits déplacements*, $\bar{\mathbf{x}} \simeq \bar{\mathbf{X}} = r\bar{e}_r + z\bar{e}_z$, et *petite transformation*.

Première partie : généralités et forme des champs

1 À l'aide d'une formule de calcul vectoriel, simplifiez la forme du champ $\bar{\mathbf{f}}_e$. Montrez en particulier que $\|\bar{\mathbf{f}}_e\| = \alpha r$ avec α un coefficient que vous calculerez, dont vous donnerez la fonction de dimension, et que l'on utilisera par la suite, jusqu'à la question 13, sans l'expliciter ; par contre il sera calculé numériquement en questions 14 et 15, dans des cas particuliers. Donnez le nom et l'interprétation physiques de cette force volumique.

2 On suppose que toutes les composantes de la matrice $[\sigma]$ représentant le *tenseur des contraintes* $\overline{\sigma}$ sur la base locale $\{\overline{e}_r, \overline{e}_\theta, \overline{e}_z\}$ qui s'annulent sur les faces libres $z = \pm h$ s'annulent partout. En explicitant ces conditions de frontières libres, montrez la nullité d'une composante diagonale et quatre composantes non diagonales de $[\sigma]$.

3.1 On suppose que, par symétrie, le *champ de déplacement* prend la forme

$$\overline{\mathbf{u}} = u_r(r, z) \overline{e}_r + u_z(r, z) \overline{e}_z . \quad (3)$$

En utilisant le formulaire du cours de calcul tensoriel, calculez la matrice $[G]$ représentant le *gradient du champ de déplacement* sur la base locale $\{\overline{e}_r, \overline{e}_\theta, \overline{e}_z\}$.

3.2 Calculez la matrice $[\epsilon]$ représentant le *tenseur des déformations linéarisé* sur cette même base.

3.3 Grâce à la loi de comportement du matériau, complétez le résultat de la question 2 pour montrer que, finalement, toutes les composantes non diagonales de $[\sigma]$ sont nulles. Déduisez-en la forme intrinsèque générale de $\overline{\sigma}$, sans plus faire référence aux déplacements.

Deuxième partie : étude « générale » des contraintes

On admet que, vu la forme de la force en jeu, les composantes non nulles du tenseur des contraintes sont de la forme

$$\sigma_{rr} = A + Br^2 + Cz^2 , \quad (4a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = D + Fr^2 + Gz^2 , \quad (4b)$$

avec A à G des constantes réelles à préciser.

4 Explicitez l'équation d'équilibre local du disque dans \mathcal{R} , de façon intrinsèque puis en composantes. Montrez qu'une seule composante de cette équation est non triviale.

En y insérant les formules (4), éliminez les constantes D , F et G .

5 On admet que les équations de compatibilité géométrique des déformations ainsi que la loi de comportement du matériau conduisent, compte tenu aussi de la forme des champs, à l'équation de Beltrami

$$r \left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \nu \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \right) = (1 + \nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \quad (5)$$

avec ν le coefficient de Poisson du matériau. En explicitant cette équation, déduisez-en la valeur de B fonction de α et ν seulement, $B = -(\nu + n)\alpha/m$ avec n , m des entiers naturels compris entre 1 et 9.

6.1 Dorénavant, on suppose $h \ll a$. On exige alors que la condition de frontière latérale libre en $r = a$ soit satisfaite seulement en moyenne par rapport à z .

Comment pourrait-on justifier qu'avec cette approximation on aura quand même, pas trop près de cette frontière, des champs calculés proches des champs réels? Cette approche vous semble t'elle pertinente?

6.2 En écrivant cette condition globale, exprimez C en fonction de A , B , a et h .

Troisième partie : calcul des champs dans un cas particulier

Dorénavant, on suppose $a = 10h$ et $\nu = 1/3$.

7 Expliquez pourquoi on peut introduire un coefficient c adimensionnel tel que

$$A = \alpha c h^2 . \quad (6)$$

8.1 À l'aide des résultats déjà obtenus, exprimez B en fonction d' α seul, puis C en fonction d' α et c .

8.2 Déduisez-en les contraintes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ comme fonctions d' α , c , r , z et h .

9 Grâce à la loi de comportement du matériau, montrez que seules les composantes diagonales de la matrice représentative $[\epsilon]$ du tenseur des déformations linéarisé, déjà introduite en question 3.2, sont non nulles. Calculez $3E\epsilon_{rr}$, $3E\epsilon_{\theta\theta}$ et $3E\epsilon_{zz}$, où E est le module d'Young du matériau, en fonction d' α , c , r , z et h .

10 Montrez qu'une composante diagonale de $[\epsilon]$ détermine directement la composante radiale u_r du champ de déplacement, et donnez son expression en fonction de E , α , c , r , z et h .

11 En intégrant une autre composante diagonale de $[\epsilon]$, déterminez la composante axiale u_z du champ de déplacement, et donnez son expression en fonction de E , α , c , r , z et h .

Vous poserez l'hypothèse de symétrie

$$\forall r \in [0, a[, \quad u_z(r, 0) = 0 . \quad (7)$$

12 Démontrez que la nullité d'une composante non diagonale de $[\epsilon]$ conduit à l'équation

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 . \quad (8)$$

Déduisez-en la valeur numérique exacte de la constante c , comme un nombre rationnel positif.

13 Vérifiez que

$$27E u_r = \alpha r (752h^2 - 3r^2 - 6z^2) , \quad (9a)$$

$$27E u_z = \alpha z (6r^2 + 2z^2 - 752h^2) . \quad (9b)$$

Quatrième partie : étude des champs dans un cas très particulier

On suppose dorénavant que le matériau qui constitue le disque, *volant d'inertie*, est un *acier* de masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ et module d'Young $E = 180 \text{ GPa}$. La demi-hauteur $h = 3 \text{ cm}$, ce qui implique un rayon $a = 30 \text{ cm}$. L'application visée consiste à *stocker une quantité significative d'énergie cinétique*, on considère donc des vitesses de rotation élevées.

14 Dans toute cette question on suppose que la vitesse de rotation correspond à 10000 tours par minute.

14.1 Calculez numériquement ω , puis α , enfin, $\alpha/(27E)$.

14.2 Expliquez, en analysant la dimension et signification physique de $\alpha a/\rho$, et en comparant ce rapport à une valeur de référence physique, pourquoi on peut qualifier la rotation de « *très rapide* ».

14.3 Sur la ligne médiane définie par $z = 0$, donnez la valeur de u_r en cm en fonction de r en cm, et représentez le graphe de u_r en cm en fonction de r en cm variant entre 0 et a . Commentez physiquement ce graphe.

14.4 Sur la ligne de la face supérieure définie par $z = h$, donnez les valeurs de u_r et u_z en cm en fonction de r en cm. Représentez les graphes de u_r et u_z en cm en fonction de r en cm variant entre 0 et a . Commentez physiquement ces graphes.

15.1 Revenant à un cas plus général où ω est « libre », montrez que la valeur maximale de u_r en $r = a$ est toujours atteinte sur la ligne médiane $z = 0$, et donnez son expression « analytique ». Expliquez physiquement la dépendance de $\max u_r$ par rapport à ρ , ω , E et aux dimensions du disque.

15.2 Le volant d'inertie est contenu dans un *carter* de rayon intérieur $b = 30,5 \text{ cm}$. Estimez la vitesse limite de rotation à laquelle le volant d'inertie entrerait en contact avec le carter. Vous donnerez sa valeur numérique en rad/s et tours/min. Commentez succinctement.

15.3 Quels autres phénomènes physiques pourraient limiter la vitesse de rotation d'utilisation de ce volant d'inertie ? Esquissez en quelques lignes une démarche de « dimensionnement » qui permettrait de calculer une autre vitesse limite de rotation, associée à ces phénomènes.