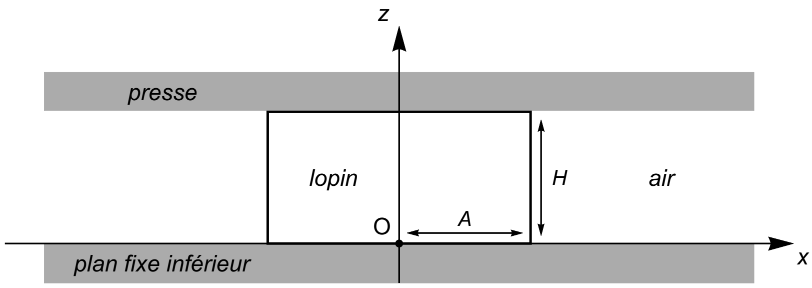
Mines Nancy - $1^{\text{ère}}$ année - Test 1 de MMCSF du 18 décembre 2018 - Durée 3 heures

Documents autorisés : les polycopiés de calcul tensoriel et mécanique - Calculatrices autorisées

Indiquez en tête de vos copies votre *groupe de TD*. Rédigez avec soin et en langue française. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques pourra être considérée nulle. Lorsque l'on demande des « *commentaires* », on attend des *commentaires physiques*.

Problème : *Étude d'essais de compression d'un lopin cylindrique élastique*

On s'intéresse à deux essais de ***compression d'un lopin cylindrique d'un matériau solide homogène isotrope élastique***. On pose les hypothèses classiques d'***élasticité linéaire*** en ***petits déplacements*** et ***petite transformation***. Le premier essai sera étudié en détail dans les questions 1 à 12 ; le second sera l'objet d'une étude rapide en question 13.
Pour décrire le premier essai, dit **« *à frontière libre* »**, on utilise un repère Oxyz avec Oz vertical l'axe de révolution du lopin. On utilise des coordonnées cylindriques (r,θ,z) dans ce repère. On note $\{\overline{\mathbf{e}}_r, \overline{\mathbf{e}}_\theta, \overline{\mathbf{e}}_z\}$ la base locale de ces coordonnées. Le rayon initial (resp. la hauteur initiale) du lopin est A (resp. H). Le lopin est entouré d'air à la pression atmosphérique. Voici une coupe dans le plan xOz de la configuration de référence, à l'instant initial $t = 0$:



La base inférieure du lopin reste en contact avec le plan fixe indéformable défini par $z = 0$. Le lopin est comprimé par une ***presse*** indéformable, en contact avec sa base supérieure, qui descend à la vitesse v uniforme ($v > 0$). Le déplacement vertical du plan inférieur de cette presse est donc défini, à l'instant actuel $t \in [0,t_1]$, par $\underline{U_z = -vt}$. On précisera la valeur t_1 maximale de t, pour rester dans les bonnes hypothèses, en questions 9 et 10.
Ces deux plans sont lubrifiés ce qui permet un ***glissement du lopin*** sur ces plans. On suppose en conséquence que la symétrie cylindrique du lopin est conservée, et que son ***champ de déplacement*** est de la forme

$$\overline{\mathbf{u}} \;=\; u_r(r,t)\;\overline{\mathbf{e}}_r \;+\; u_z(z,t)\;\overline{\mathbf{e}}_z \;, \tag{1}$$

avec $u_r(0,t) = 0$ pour tout t, signifiant que l'axe Oz est invariant.

1 Donnez la forme intrinsèque du ***gradient de déplacement***. Que peut-on dire du rotationnel du champ de déplacement ? Qualifiez succinctement, en conséquence, la nature de ce mouvement.

2.1 En faisant l'hypothèse que le mouvement se fait de façon ***quasi statique***, montrez que l'***équation de la quantité de mouvement sous forme locale***, exprimée en terme du champ de déplacement entre la configuration initiale et la configuration actuelle, implique que la divergence du champ de déplacement est uniforme dans tout le domaine du lopin.

2.2 Notant $\alpha(t)$ la valeur de la divergence du champ de déplacement, en explicitant cette divergence, montrez l'existence de fonctions f_1 et $f_2(t)$ telles que

$$u_r(r,t) \;=\; \frac{1}{2} r f_1(t) \;,\quad u_z(z,t) \;=\; z\big(\alpha(t) - f_1(t)\big) \;+\; f_2(t) \;. \tag{2}$$

Indication : à t fixé, en « séparant les variables », commencez par identifier une fonction de r égale à une fonction de z.

3 En explicitant les conditions limites en déplacement valables sur les bases inférieure, en $z = 0$, et supérieure, en $z = H$, du lopin, identifiez les fonctions f_1 et $f_2(t)$.
Montrez que le champ de déplacement vertical est complètement déterminé, tandis que le champ de déplacement horizontal ne dépend plus que de la fonction encore inconnue $\alpha(t)$.

4 Calculez la forme intrinsèque du ***tenseur des déformations linéarisé***.

5 Calculez le ***tenseur des contraintes*** dans le lopin, en fonction notamment des coefficients de Lamé du matériau.

6.1 Expliquez pourquoi on doit écrire une condition de ***frontière libre*** sur la frontière latérale du lopin, définie par $r = A$, en contact avec l'air ambiant.

6.2 En explicitant cette condition, calculez enfin la fonction $\alpha(t)$.

6.3 Que signifie, physiquement, le fait que $\alpha(t) = \mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}(t) < 0$? Commentez succinctement.

7.1 Montrez qu'au final le champ de déplacement ne dépend que du seul coefficient matériau dit de Poisson, ν, de r, z, et du quotient vt/H.

7.2 Vérifiez que, dans le cas singulier d'un ***matériau incompressible***, on retrouve, malgré cette singularité, le champ de petits déplacements que l'on peut déduire de la solution du test 0,

$$\overline{\mathbf{u}} \ = \ \frac{r}{2} \frac{vt}{H} \,\overline{\mathbf{e}}_r \ - \ z \,\frac{vt}{H} \,\overline{\mathbf{e}}_z \ . \tag{3}$$

8 Dorénavant, on revient au cas régulier et général d'un ***matériau compressible***. Validez l'approximation ***quasi statique*** posée au niveau de la question 2.1.

9 Dorénavant, on suppose que le rayon initial A du lopin est égal à sa hauteur initiale H, $\underline{A = H}$.
On considère que l'on est en ***petits déplacements*** tant que

$$\max |u_r| \ \leq \ H/100 \quad \text{ et } \quad \max |u_z| \ \leq \ H/100 \ . \tag{4}$$

En déterminant ces deux maxima, calculez la valeur maximale t_d de t autorisée par cette hypothèse. Commentez succinctement.

10.1 Explicitez la forme finale, simplifiée au maximum, du ***gradient de déplacement*** faisant intervenir ν. En remarquant que c'est aussi le ***tenseur des déformations linéarisé***, commentez succinctement.

10.2 On considère que l'on est en ***petite transformation*** tant que

$$\max \left|\left| \overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\overline{\mathbf{u}} \right|\right|_\infty \ \leq \ 1/100 \ . \tag{5}$$

En déterminant ce maximum, calculez la valeur maximale t_t de t autorisée par cette hypothèse. Calculez finalement la valeur maximale t_1 de t qui assure que les deux critères (4) et (5) sont vérifiés.

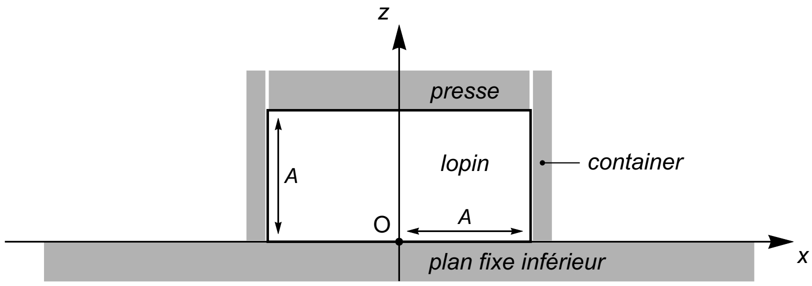
11.1 Explicitez la forme finale, simplifiée au maximum, du ***tenseur des contraintes***. Vous ferez apparaître le module d'Young du matériau. En faisant le parallèle avec un autre essai, commentez succinctement la structure du tenseur des contraintes.

11.2 Calculez la ***force*** $\overline{\mathbf{F}}$ exercée par la presse sur le lopin, pendant cet essai. Commentez succinctement.

12.1 Dans le cas d'un lopin d'aluminium de module d'Young $E = 70$ GPa, coefficient de Poisson $\nu = 0{,}33$, pour $A = H = 5$ cm, $v = 1$ mm/s, calculez numériquement t_1 puis $F = ||\overline{\mathbf{F}}||$ à l'instant t_1. Commentez succinctement.

12.2 Représentez à l'instant t_1 le champ $25\,\overline{\mathbf{u}}$, dans la moitié droite de la coupe de la figure de la page 1. Commentez succinctement.

On s'intéresse maintenant à un ***essai de compression confinée du même lopin cylindrique du même matériau élastique***. Cette fois-ci le lopin, de rayon et hauteur initials $A = H$, est disposé dans un ***container cylindrique indéformable de rayon*** A, comme représenté sur la figure en coupe ci-dessous :



Pour décrire cet essai, on utilise le même repère Oxyz avec Oz vertical l'axe de révolution du lopin, et dans ce repère, des coordonnées cylindriques (r,θ,z). La base inférieure du lopin reste en contact avec le plan fixe indéformable défini par $z = 0$. Le lopin est comprimé par une ***presse*** indéformable de forme cylindrique, de rayon légèrement inférieur à A. Cette presse, en contact avec sa base supérieure, descend à la vitesse v uniforme ($v > 0$). Le déplacement vertical du plan inférieur de cette presse est défini, à l'instant actuel $t \in [0,t_1]$, par $\underline{U_z = -vt}$. On pose les mêmes hypothèses que pour le premier essai, notamment, celle que le mouvement se fait de façon ***quasi statique***.

13.1 Expliquez succinctement pourquoi la forme générale (2) du champ de déplacement est toujours valable, avec, à nouveau, $\alpha(t) = \mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}(t)$.

13.2 En explicitant les conditions limites en déplacement, dont la condition supplémentaire liée au ***confinement***, déterminez $\alpha(t)$ et $\overline{\mathbf{u}}(t)$.

13.3 En reprenant les calculs des questions 4 et 5 sur le premier essai, donnez la valeur du ***tenseur des contraintes*** dans cet essai.

13.4 Déduisez-en l'expression analytique de la ***force*** $\overline{\mathbf{F}}$ exercée par la presse sur le lopin pendant cet essai.

13.5 Proposez à partir de ces deux essais une ***méthode de mesure du module d'Young et du coefficient de Poisson du matériau***.

§

Voici notre barème indicatif ; la note N_b obtenue sur 27 *sera ramenée à* 20 *selon une règle qui reste à définir, du type $N_f = cN_b$ avec c un coefficient de l'ordre de* 0,8 :

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Total
Points	1,5	2	0,5	1	1,5	2,5	1,5	0,5	1,5	2,5	4	3,5	4,5	27