

Indiquez en tête de vos copies votre *groupe de TD* (XMx ou YMy). Rédigez avec soin et en langue française. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques sera, a priori, considérée comme nulle. Un corrigé succinct sera publié dès ce soir sur la page web des annales.

Problème : Étude de contacts rectilignes avec forces de compression

On considère un *solide élastique isotrope* en régime linéaire, petits déplacements et petite transformation. Dans le repère cartésien $Oxyz$ ce solide occupe le *demi espace infini* défini par $x > 0$. On utilise aussi des coordonnées cylindriques (r, θ, z) comme représenté sur la figure 1. Ce solide est mis en contact avec un objet rigide, sur une ligne de contact dans la partie I (figure 1), sur une bande de contact dans la partie II (figure 3), cet objet exerçant sur lui des forces de contact de compression. On suppose les « *déplacements plans xy* » : sous l'effet de ces forces le champ de déplacement

$$\bar{\mathbf{u}} = u_r(r, \theta)\bar{\mathbf{e}}_r + u_\theta(r, \theta)\bar{\mathbf{e}}_\theta \quad \text{avec} \quad \{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\} \text{ la base locale des coordonnées cylindriques.} \quad (0)$$

Toutes les représentations demandées sont à faire sur votre copie.

I Contact rectiligne avec une force de compression localisée (figure 1)

Dans cette situation, sur l'intersection entre la ligne de contact Oz et l'intervalle $z \in [-L_z/2, L_z/2]$, l'objet rigide applique une force uniformément répartie $\bar{\mathbf{F}}(L_z) = F'L_z\bar{\mathbf{e}}_x$ avec $F' > 0$ la *force linéique*. Ceci est valable quelque soit L_z . En dehors de la ligne de contact la surface yOz est libre. On veut montrer que le tenseur des contraintes dans le solide peut être pris sous la forme

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \sigma_{rr}\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + \sigma_{zz}\bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z \quad \text{avec} \quad \sigma_{rr} = -A\frac{\cos\theta}{r}, \quad \sigma_{zz} = -B\frac{\cos\theta}{r}, \quad A, B \text{ des constantes } > 0 \text{ à préciser.}$$

1 Soit la surface $S_\ell = \{(r, \theta, z) \text{ tels que } r > 0, \theta = \pm\pi/2, z \in \mathbb{R}\}$. Vérifiez que cette frontière du solide est bien libre.

2 Soit $r_0 > 0$. On considère une coupe virtuelle du solide définie par ses frontières

$$S = \{(r, \theta, z) \text{ tels que } r = r_0, \theta \in [-\pi/2, \pi/2], z \in [-L_z/2, L_z/2]\}$$

$$\text{et } S_z^\pm = \{(r, \theta, z) \text{ tels que } r \in [0, r_0], \theta \in [-\pi/2, \pi/2], z = \pm L_z/2\},$$

séparant une zone « externe » contenant O (en blanc) d'une zone « interne » loin de O (en gris figure 1). Sur S , calculez le vecteur contrainte $\bar{\mathbf{T}}$ exercé par la partie externe sur la partie interne. Représentez ce champ $\bar{\mathbf{T}}$ sur $S \cap xOy$. Commentez physiquement : quel type de contrainte exerce la partie externe sur la partie interne ? Est-ce que la situation représentée dans le plan $z = 0$ dépend de z ?

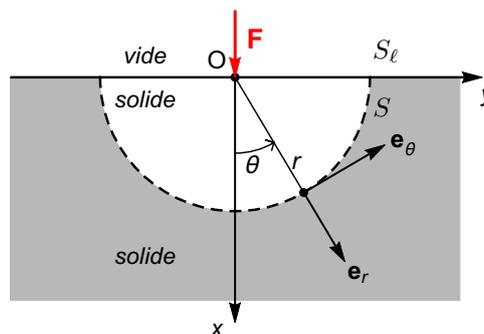


Fig. 1 – Situation étudiée dans la partie I : force de compression appliquée au niveau de l'axe Oz sur un solide infini. En gris, le domaine « interne » isolé par coupe virtuelle considéré en question 2.

3 On considère maintenant la portion de solide virtuellement coupée complémentaire de la précédente i.e. contenant O (en gris figure 2a). Expliquez soigneusement pourquoi la condition d'équilibre global de cette portion s'écrit

$$\bar{\mathbf{F}} + \iint_S -\bar{\mathbf{T}}d^2S = \bar{\mathbf{0}}$$

où $\bar{\mathbf{T}}$ est le même qu'en question 2. Représentez cet équilibre dans le plan xOy . Montrez par un calcul¹ que cette condition permet de calculer A en fonction de F' . Interprétez physiquement cette relation.

4 On oublie la coupe virtuelle et s'intéresse dorénavant au solide infini. Explicitez les matrices représentant le gradient de déplacement, sa transposée et le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\bar{\epsilon}}$ dans la base $\{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\}$ en terme des fonctions u_r, u_θ , toujours inconnues à ce stade, et de leurs dérivées partielles.

5 Déduisez de la nullité de la composante ϵ_{zz} et de la loi de comportement du solide, dans la version où les contraintes donnent les déformations, la relation entre σ_{zz} et σ_{rr} ; confirmez que

$$\sigma_{zz} = -B \frac{\cos \theta}{r}$$

en donnant la valeur de B fonction de A et d'un coefficient élastique du matériau.

6.a Dans l'intérieur du solide, pour $r > 0, |\theta| < \pi/2$, déterminez les valeurs propres ordonnées $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ du tenseur des contraintes. Qualifiez par trois adjectifs physiques cet état de contrainte.

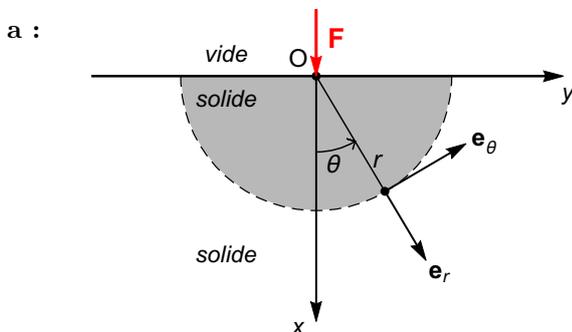
6.b On admet qu'avec un solide de taille finie dans la direction z on peut obtenir grosso modo le même état de contrainte, et observer par photoélasticité dans le plan xy les franges isochromatiques définies par l'équation vue en cours,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = n\sigma_0 \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \sigma_0 > 0.$$

Explicitez par un calcul en coordonnées cartésiennes (x,y) la géométrie de ces franges, et comparez à la figure 2b.

7 Vérifiez enfin l'équation de l'équilibre local du solide. Concluez sur la pertinence de $\bar{\bar{\sigma}}$.

8 Explicitez les équations aux dérivées partielles qu'il faudrait résoudre pour calculer le champ de déplacement $\bar{\mathbf{u}}$, sans chercher à effectuer cette résolution. Vous garderez A comme paramètre de chargement, et ferez apparaître les coefficients élastiques E et ν du solide. Ce système d'équations, considéré seul, a-t'il une solution unique?



b :

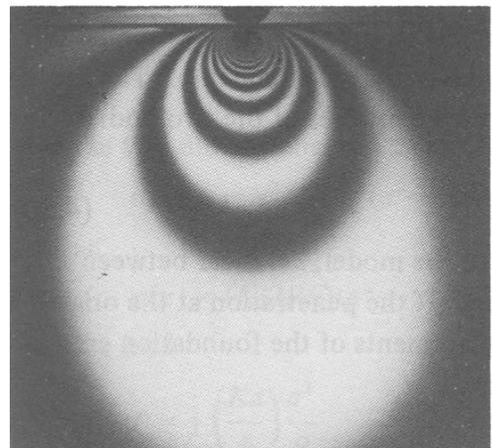


Fig. 2 – Situation étudiée dans la partie I : force de compression appliquée au niveau de l'axe Oz sur un solide infini. **a** : En gris, le nouveau domaine « interne » isolé par coupe virtuelle considéré en question 3. **b** : Photographie expérimentale d'isochromatiques observées en photoélasticité dans le plan xy , dans cette situation, par Johnson (1985) *Contact mechanics*. C. U. P.

1. On rappelle les formules trigonométriques $2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$ et $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$.

9 On admet que ce système portant sur u_r et u_θ , une fois résolu, en faisant quelques hypothèses supplémentaires raisonnables, conduit à un champ de déplacement sur S_ℓ (réexprimé en coordonnées cartésiennes)

$$u_x = -\frac{2}{\pi}(1-\nu^2)\frac{F'}{E}\ln\frac{|y|}{y_0}, \quad (1a)$$

$$u_y = +\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2}\frac{F'}{E} \quad \text{si } y < 0, \quad u_y = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2}\frac{F'}{E} \quad \text{si } y > 0, \quad (1b)$$

avec $y_0 > 0$ l'ordonnée d'un point de la surface libre qui resterait immobile.

Vérifiez l'homogénéité dimensionnelle de ces formules.

Représentez sur l'axe Oy , au voisinage de l'origine, les champs de vecteurs $u_x\bar{e}_x$ puis $u_y\bar{e}_y$ puis \bar{u} . Vous réglerez y_0 , ou, de manière équivalente, les bornes de variation de y de vos schémas, de sorte que $u_x > 0$ sur tout le domaine représenté.

Commentez physiquement et concluez.

II Contact sur une bande avec une force de compression répartie (figure 3)

Dans cette situation des forces de pression d'intensité p sont appliquées sur une bande de contact définie par $x = 0$, $y \in [-a, a]$. On admet que, en décomposant ce chargement en chargements élémentaires correspondant à des forces linéiques $dF' = p dy$, et en sommant les champs de déplacement obtenus, de la forme (1) en décalant l'origine des y , on obtient finalement sur la surface $x = 0$ un champ de déplacement

$$u_x = -\frac{2}{\pi}(1-\nu^2)\frac{p}{E}\left((a+y)\ln\frac{|a+y|}{a} + (a-y)\ln\frac{|a-y|}{a}\right) + C, \quad (2a)$$

$$u_y = (1-2\nu)(1+\nu)\frac{pa}{E} \quad \text{si } y \leq -a, \quad (2b)$$

$$u_y = -(1-2\nu)(1+\nu)\frac{py}{E} \quad \text{si } -a \leq y \leq a, \quad (2c)$$

$$u_y = -(1-2\nu)(1+\nu)\frac{pa}{E} \quad \text{si } y \geq a, \quad (2d)$$

avec C une constante qui détermine la valeur absolue des ordonnées des points de la surface $x = 0$ qui resteraient immobiles.

10 Vérifiez l'homogénéité dimensionnelle des formules (2).

Représentez sur l'axe Oy , sur un voisinage de l'origine contenant le segment $y \in [-2a, 2a]$, les champs de vecteurs $u_x\bar{e}_x$ puis $u_y\bar{e}_y$ puis \bar{u} . Vous réglerez C de sorte que $u_x > 0$ sur tout le domaine représenté.

Commentez physiquement et concluez.

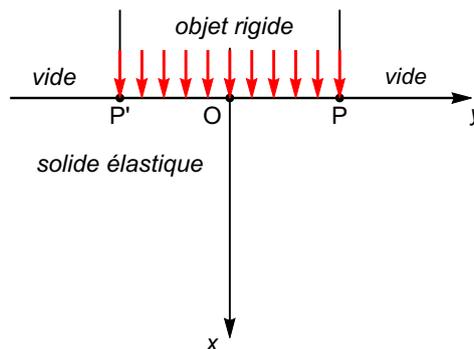


Fig. 3 – Situation étudiée dans la partie II : forces de pression appliquées sur une bande de contact définie par $x = 0$, $y \in [-a, a]$; son intersection avec le plan xOy est le segment compris entre les points P' et P .

Barème indicatif : la note sur 31 sera ramenée à 20 suivant une règle à définir :

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Points	0,5	3	5	3	2	4,5	1	2,5	4,5	5	31