Mécanique des milieux continus solides et fluides

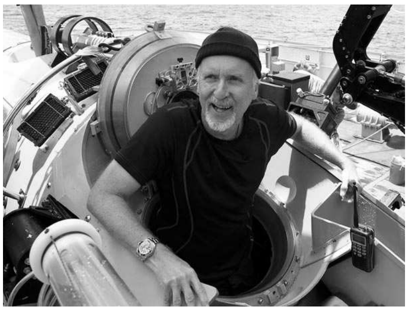
Test 1 du 11 janvier 2016 - Durée 3 heures

Documents autorisés : les polycopiés de calcul tensoriel et mécanique - Calculatrices autorisées

Indiquez en tête de vos copies votre *groupe de TD* (Xx ou Yy). Rédigez avec soin et en langue française. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques sera, a priori, considérée comme nulle. Un corrigé succinct sera publié dès cet après-midi sur la page web des annales.

Problème : *Dimensionnement d'une coque de sous-marin sphérique*

Le sous-marin *Deepsea Challenger* a été construit pour établir un record de plongée en solitaire. Le fond de la fosse des Mariannes, situé à une distance verticale $H = 10{,}9$ km de la surface de la mer, a été atteint en mars 2012. Conçu léger et de petite taille, ce sous-marin est pour une large part constitué d'une mousse composite résistante non pressurisée, le pilote étant, lui, enfermé dans une coque sphérique en acier de rayon intérieur $a = 55$ cm. On suppose que cet acier travaille en petits déplacements, petite transformation, suivant un comportement élastique linéaire isotrope.



© Thiessen *National Geographic*

On étudie la résistance à la pression de cette coque sphérique et son dimensionnement, i.e., le choix de son épaisseur $e = b - a$, avec b le rayon extérieur de la coque. Pour simplifier, on considère que la coque est homogène à symétrie de révolution, i.e., on « oublie » le couvercle qui permet au pilote d'y entrer ou d'en sortir (cf. la photo ci-dessus, juste après l'exploit). On utilise les coordonnées sphériques (r,θ,φ) d'un repère Oxyz dont l'origine se trouve au centre de la coque. La configuration de référence de l'étude est celle où la coque est à la surface de l'eau, à pression intérieure et extérieure atmosphérique p_{atm}. La configuration actuelle est celle où, en plongée à la profondeur H, elle est soumise à une surpression extérieure δp due à l'eau, l'atmosphère de l'habitacle étant, pour le pilote, maintenue à p_{atm}.

I Étude de dimensionnement

1.a Donnez, à partir d'une loi vue en cours que vous rappellerez, les expressions des champs de densité de force surfacique $\overline{\mathbf{T}} = d^2\overline{\mathbf{f}}/d^2S$ qui s'exercent physiquement sur les frontières intérieure et extérieure de la coque, à la fois dans la configuration de référence et la configuration actuelle en plongée, en fonction de p_{atm}, δp et l'un des vecteurs de la base sphérique locale $\{\overline{\mathbf{e}}_r,\overline{\mathbf{e}}_\theta,\overline{\mathbf{e}}_\varphi\}$. Représentez schématiquement ces deux configurations et les champs de vecteurs $\overline{\mathbf{T}}$ correspondants.

1.b Par linéarité, on travaille dorénavant en différence entre la configuration de référence, considérée ainsi comme libre de toute contrainte, et la configuration actuelle. Expliquez comment il faut modifier les champs de densité de force surfacique $\overline{\mathbf{T}} = d^2\overline{\mathbf{f}}/d^2S$ correspondants, puis donnez l'expression de ces champs sur les frontières dans les deux configurations de référence et actuelle, en fonction de δp et l'un des vecteurs de la base sphérique locale $\{\overline{\mathbf{e}}_r,\overline{\mathbf{e}}_\theta,\overline{\mathbf{e}}_\varphi\}$. Représentez schématiquement ces deux configurations et les champs de vecteurs $\overline{\mathbf{T}}$ correspondants.

1.c Justifiez, sans démonstration détaillée toutefois, pourquoi on peut supposer qu'entre ces configurations le champ de déplacement

$$\overline{\mathbf{u}} \;=\; u(r)\,\overline{\mathbf{e}}_r\ .$$

Expliquez par un raisonnement physique ce que l'on peut conjecturer a priori sur le signe de $u(r)$.

2 Estimez à partir d'une loi de la mécanique des fluides la surpression δp. Vous donnerez une formule analytique puis une valeur numérique de δp avec deux chiffres significatifs, qui sera toujours utilisée par la suite. Commentez physiquement.
NB : cette approximation revenant à surestimer δp est justifiée pour le dimensionnement.

3.a Donnez l'expression matricielle puis intrinsèque du tenseur gradient de déplacement.

3.b Au vu de cette expression, que peut-on dire a priori de la décomposition de ce tenseur en parties symétrique et antisymétrique, ainsi que du rotationnel du champ de déplacement ?

4.a Explicitez l'équation de l'équilibre de la coque, dans sa configuration actuelle, sous forme locale. Vous montrerez que la divergence du champ de déplacement est uniforme, et noterez $3A$ sa valeur.

4.b Par intégration, établissez que $u(r)$ est de la forme $Ar^{\alpha} + Br^{\beta}$ où α et β sont des exposants entiers, B est une deuxième constante d'intégration.

5 Calculez le tenseur des déformations linéarisé, de façon intrinsèque.

6 Calculez le tenseur des contraintes, de façon intrinsèque.

7 En explicitant les conditions en contrainte sur les frontières intérieure et extérieure de la coque, déjà écrites à la question 1.b, calculez A et B en fonction de a, b, δp et des coefficients élastiques de l'acier. Vous vérifierez l'homogénéité dimensionnelle des formules obtenues, et interpréterez physiquement le signe de A et B.

8.a Pour dimensionner la coque, on admet la validité d'un critère de Tresca. Ordonnez les valeurs propres du tenseur des contraintes et calculez la contrainte tangentielle maximale en tout point de la coque. Précisez en quel(s) point(s) de la coque cette contrainte tangentielle maximale atteint sa valeur maximale, que vous noterez $\max \tau$ et calculerez.

8.b On considère donc un acier pour lequel la valeur limite de $\max \tau$, permettant de rester de façon sûre dans le domaine élastique, est τ_0. Explicitez ce critère en introduisant le paramètre $R = \tau_0/\delta p$.
Montrez que si R est inférieur à une valeur critique R_c, aucune solution n'existe. Commentez cela physiquement.
Au contraire, lorsque $R > R_c$, exprimer la valeur optimale de b qui permet de juste satisfaire le critère de dimensionnement.

8.c Représentez l'allure de la fonction qui à R fait correspondre le rapport b/a, dans un intervalle bien choisi, et commentez physiquement ce graphe.

8.d Pour un acier tel que $\tau_0 = 300$ MPa, calculez numériquement le rapport R, puis le rayon optimal b et l'épaisseur e correspondante.

II Analyse physique fine et validation

On suppose que l'acier utilisé est caractérisé par des coefficients de Lamé $\lambda = 110$ GPa , $\mu = 85$ GPa.

9.a Calculez numériquement les constantes A et B permettant de déterminer le champ de déplacement.

9.b Étudiez les variations de la fonction $v(r) = |u(r)|$ sur l'intervalle $[a,b]$. Déterminez en particulier les valeurs maximales atteintes par $|v'(r)|$ et $v(r)$ dans l'intervalle $[a,b]$. Représentez le graphe de $v(r)$ sur l'intervalle $[a,b]$, avec r et v en cm. Commentez physiquement.

9.c Représentez l'allure du champ $\overline{\mathbf{u}}(r)$ dans un secteur angulaire d'une coupe de la coque. Commentez physiquement.

9.d Discutez de la pertinence de l'hypothèse de petits déplacements faite au début.

10 Discutez de la pertinence de l'hypothèse de petite transformation faite au début.