Mines de Nancy - 1ère année **Année universitaire 2012 - 2013**

Mécanique des milieux continus solides et fluides

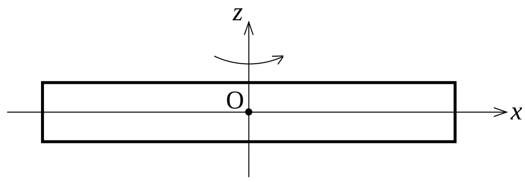
Test 1 du 23 novembre 2012 - Durée 3 heures

Documents autorisés : les polycopiés de calcul tensoriel et mécanique - Calculatrices autorisées

Indiquez en tête de votre copie votre *groupe de TD* (Xx ou Yy) sur la ligne *N° carte étudiant.* Rédigez avec soin et en langue française. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques sera, a priori, considérée comme nulle. Un corrigé succinct comprenant aussi quelques compléments sera publié dès cet après-midi sur www.mines-nancy.univ-lorraine.fr/emmanuel.plaut/mmc .

Problème : *Équilibre d'un disque en rotation rapide*

De nombreux systèmes mécaniques contiennent des machines tournantes, qui elles mêmes comportent des pièces dont la forme est approximativement celle d'un disque : arbres de moteur ou de turbines, aubes de turbines, volants d'inertie, etc... On s'intéresse à l'influence des forces d'inertie sur l'équilibre d'un disque en rotation rapide. Pour simplifier on fait abstraction de la façon dont le disque est fixé et mis en rotation, et on ne considère pas l'influence de son poids ni celle de l'atmosphère. On travaille dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à la machine tournante, dans lequel on utilise un repère Oxyz avec Oz l'axe de rotation de la machine, axe de révolution du disque. Les faces « inférieure » et « supérieure » du disque, situées en $z = \pm h$, sont libres. Le rayon extérieur du disque est a. La surface latérale définie en coordonnées cylindriques (r,θ,z) par $r = a$ est aussi une frontière libre.



Dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ galiléen du laboratoire, le référentiel $\mathcal{R}$ a un mouvement de rotation caractérisé par le vecteur vitesse de rotation instantanée

$$\overline{\boldsymbol{\omega}} \;=\; \overline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \;=\; \omega \overline{\mathbf{e}}_z \quad \text{avec} \quad \omega \text{ la fréquence angulaire de rotation, non nulle, constante.}$$

La configuration de référence, imaginaire, est celle où le disque tourne, mais où les forces d'inertie sont supposées nulles, ce qui reviendrait en fait à un disque non tournant. La configuration actuelle est celle où ces forces d'inertie sont prises en compte. À l'équilibre dans $\mathcal{R}$, seul agit le champ de force volumique d'inertie d'entrainement

$$\overline{\mathbf{f}}_e(\overline{\mathbf{X}}) \;=\; -\rho\, \overline{\mathbf{g}}_e \;=\; -\rho\, \overline{\boldsymbol{\omega}} \wedge \left(\overline{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overline{\mathbf{X}}\right)$$

avec ρ la masse volumique du disque, $\overline{\mathbf{g}}_e$ l'accélération d'entrainement.

Le matériau du disque est élastique isotrope linéaire, et on fait l'hypothèse de petits déplacements, $\overline{\mathbf{x}} \;\simeq\; \overline{\mathbf{X}} \;=\; r\overline{\mathbf{e}}_r + z\overline{\mathbf{e}}_z$, et petite transformation. On travaille bien sûr en coordonnées cylindriques (r,θ,z).

Première partie : généralités et forme des champs

1 À l'aide d'une formule de calcul vectoriel par exemple, simplifiez la forme du champ $\overline{\mathbf{f}}_e$. Montrez en particulier que $\left|\left|\overline{\mathbf{f}}_e\right|\right| = \alpha r$ avec α un coefficient que vous calculerez et que l'on utilisera par la suite sans l'expliciter (sauf dans la dernière question 19). Donnez le nom et l'interprétation physiques de cette force volumique.

2.1 Justifiez succinctement qu'il est raisonnable de considérer que les champs de tenseur des contraintes $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ et de déplacement $\overline{\mathbf{u}}$ ne dépendent que de r et z.

2.2 Justifiez succinctement qu'il est raisonnable de considérer que la composante azimutale du déplacement $u_\theta = 0$.

3 On suppose que toutes les composantes de la matrice $[\sigma]$ représentant le tenseur des contraintes sur la base locale $\{\bar{\mathbf{e}}_r,\bar{\mathbf{e}}_\theta,\bar{\mathbf{e}}_z\}$ qui s'annulent sur les faces libres $z = \pm h$ s'annulent partout. En explicitant ces conditions de frontières libres, montrez la nullité d'une composante diagonale et quatre composantes non diagonales de $[\sigma]$.

4.1 En partant de la forme générale du champ de déplacement

$$\bar{\mathbf{u}} \;=\; u_r(r,z)\;\bar{\mathbf{e}}_r \;+\; u_z(r,z)\;\bar{\mathbf{e}}_z \;,$$

et en utilisant une formule du cours de calcul tensoriel, calculez la matrice $[G]$ représentant le gradient du champ de déplacement sur la base locale $\{\bar{\mathbf{e}}_r,\bar{\mathbf{e}}_\theta,\bar{\mathbf{e}}_z\}$.

4.2 Calculez la matrice $[\epsilon]$ représentant le tenseur des déformations linéarisé sur cette même base.

4.3 Grâce à la loi de comportement du matériau, complétez le résultat de la question 3 pour montrer que toutes les composantes non diagonales de $[\sigma]$ sont nulles. Déduisez-en la forme intrinsèque générale de $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$, sans plus faire référence aux déplacements.

Deuxième partie : réduction de la forme des contraintes

5 Écrivez l'équation d'équilibre local du disque dans $\mathcal{R}$, de façon intrinsèque puis en composantes. Montrez qu'une seule composante de cette équation est non triviale, et prend la forme d'une équation faisant intervenir les deux composantes non nulles de $[\sigma]$.
Quelle est la nature mathématique précise de cette équation ?

6 On admet que les équations de compatibilité géométrique des déformations ainsi que la loi de comportement du matériau conduisent, compte tenu aussi de la forme des champs étudiée ici, à l'équation

$$r\Big(\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial r} \;-\; \nu\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}\Big) \;=\; (1+\nu)(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}) \qquad (*)$$

avec ν le coefficient de Poisson du matériau. À l'aide de cette équation et de celle établie en question 5, montrez que σ_{rr} satisfait une équation de la forme

$$r\frac{\partial^2\sigma_{rr}}{\partial r^2} \;+\; n\;\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} \;+\; \beta r \;=\; 0 \;, \qquad (**)$$

avec $n > 0$ un entier, $\beta > 0$ un réel, que vous calculerez.

7 À z fixé, on considère la fonction $f(r) \;=\; \sigma_{rr}(r,z)$. Résolvez l'équation différentielle ordinaire vérifiée par $f(r)$. Déduisez-en que σ_{rr} est de la forme

$$\sigma_{rr} \;=\; \gamma\; r^2 \;+\; A(z)\; r^{-m} \;+\; B(z) \;,$$

avec $\gamma < 0$ un réel, $m > 0$ un entier, que vous calculerez.

8 Grâce à un argument très simple, montrez que $A(z) \;=\; 0$.

9 Montrez que $\sigma_{\theta\theta}$ est de la forme

$$\sigma_{\theta\theta} \;=\; \delta\; r^2 \;+\; B(z) \;,$$

avec $\delta < 0$ un réel que vous calculerez.

Troisième partie : réduction de la forme des déplacements

10 Déduisez de ce qui précède l'expression du tenseur des déformations linéarisé. Montrez que seules les composantes diagonales de sa matrice représentative $[\epsilon]$ sont non nulles, et exprimez les en fonction de α, r, $B(z)$, ν et E le module d'Young du matériau.

11 En reconsidérant l'expression des composantes diagonales de $[\epsilon]$ en fonction du déplacement établies question 4.2, montrez que l'on a accès à u_r sans plus de calcul.

12 En intégrant une autre composante diagonale de $[\epsilon]$, établissez l'expression de u_z en fonction de α, r, ν, E, $B_1(z)$ une primitive de $B(z)$, et d'une nouvelle fonction $C(r)$.

13.1 Montrez que la condition $\epsilon_{rz} = 0$ est une relation (†) entre α, r, ν, E, $B'(z)$ et $C'(r)$. En dérivant cette équation par rapport à z, montrez que $B(z)$ est un polynôme de degré 2 dont le coefficient de degré 2 est connu, les coefficients b_1 de degré 1 et b_0 de degré 0 restent à déterminer. Calculez alors $B_1(z)$, en introduisant une constante d'intégration b_{-1}.

13.2 En revenant à la relation (†), calculez $C(r)$ à une constante c_0 près.

14 Établissez en conséquence l'expression générale de u_z. Dorénavant on fait l'hypothèse de symétrie dans le plan médian « horizontal »

$$u_z(r,\, z=0) \;=\; 0$$

quelque soit $r \in [0,a]$. Montrez qu'alors $b_1 = 0$, tandis que $B(z)$ ne dépend plus que d'un seul paramètre inconnu, à savoir b_0.

Quatrième partie : détermination complète des contraintes

15 Montrez que σ_{rr} aussi est connue au coefficient b_0 près,

$$\sigma_{rr} \;=\; -\,\frac{3+\nu}{8}\alpha\, r^2 \;+\; \frac{\nu(1+\nu)}{2(\nu-1)}\,\alpha\, z^2 \;+\; b_0\ .$$

16 Au vu de cette équation, il est clair que l'on ne pourra satisfaire la condition de frontière latérale libre en $r = a$ quelque soit z. Supposant $h \ll a$, on va satisfaire cette condition en moyenne par rapport à z seulement.

16.1 Comment pourrait-on justifier cette approche ?

16.2 En écrivant qu'en moyenne par rapport à z, la frontière $r = a$ est libre, calculez b_0, et déterminez complètement σ_{rr}.

17 Déterminez enfin complètement $\sigma_{\theta\theta}$.

Dernière partie : analyse du cas d'un disque plat

18 Montrez que dans le cas d'un disque plat $h \ll a$, on a en bonne approximation à l'« intérieur » du disque, i.e. ni trop près de l'axe ni trop près du bord latéral,

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \;=\; \frac{3+\nu}{8}\alpha\ (a^2-r^2)\ \overline{\mathbf{e}}_r\otimes\overline{\mathbf{e}}_r \;+\; \frac{\alpha}{8}[(3+\nu)a^2-(1+3\nu)r^2]\ \overline{\mathbf{e}}_\theta\otimes\overline{\mathbf{e}}_\theta\ .$$

19 On propose pour terminer une étude de limite élastique, supposant pour simplifier que l'on peut considérer l'équation précédente valable dans tout le disque, et un matériau de coefficient de Poisson $\nu = 1/4$.

19.1 Simplifiez en conséquence l'expression de $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}/\alpha$, et étudiez les fonctions σ_{rr}/α et $\sigma_{\theta\theta}/\alpha$ dans le domaine solide. Représentez l'allure des graphes de ces fonctions.

19.2 On utilise le critère de Tresca pour modéliser la limite d'élasticité du matériau. Calculez la contrainte tangentielle maximale $\tau_{\max}$ en fonction de r et déterminez le lieu des points, dans ce modèle, où elle est maximale. Notant $\tau_{\lim}$ la limite d'élasticité, montrez que ce critère conduit à limiter la fréquence de rotation du disque ω, et calculez la valeur $\omega_{\lim}$ correspondante. Commentez physiquement la dépendance de $\omega_{\lim}$ par rapport à tous les paramètres.

19.3 Calculez $\omega_{\lim}$ pour un disque de diamètre 20 cm d'un superalliage de masse volumique $\rho = 8000$ kg/m^3 et de limite élastique $\tau_{\lim} = 500$ MPa. Vous calculerez $\omega_{\lim}$ en radians par seconde puis en tours par minute.