

Mécanique des milieux continus solides et fluides

Test 1 du 2 décembre 2011 - Durée 3 heures

Documents autorisés : les polycopiés de calcul tensoriel et mécanique - Calculatrices autorisées

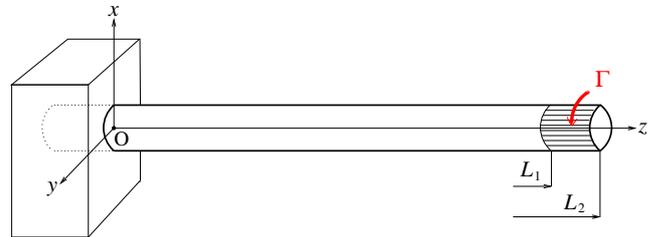
Indiquez en haut à gauche de votre copie vos nom, prénom et groupe de TD (Xx ou Yy). Rédigez avec soin et en langue française. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques sera, a priori, considérée comme nulle. Un corrigé succinct, comprenant aussi des compléments, sera publié dès ce soir sur www.mines.inpl-nancy.fr/emmanuel.plaut/mmc.

Problème : Barres cylindriques fragiles sollicitées en traction-torsion

On considère des barres cylindriques à section circulaire de rayon a , soumises à des sollicitations de traction-torsion. La modélisation sera faite en élasticité linéaire isotrope, en petits déplacements et petite transformation. On utilise un repère $Oxyz$ avec Oz l'axe de révolution de la barre. On note indifféremment (r, θ, z) et (R, Θ, Z) les coordonnées cylindriques d'un point matériel $\bar{x} \simeq \bar{X}$. La base locale des coordonnées cylindriques est notée $\{\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z\}$.

I Modèle élastique général d'une barre cylindrique en torsion

La barre est solidaire d'un matériau très rigide à l'une de ses extrémités. On considère qu'elle est encastree dans ce matériau, et on travaille dans le référentiel \mathcal{R} lié à ce matériau. Dans ce référentiel galiléen, Oxy est le « plan d'encastrement » dans lequel on peut considérer que les particules matérielles de la barre sont fixes. Dans l'intervalle $z \in [0, L_1]$, avec $L_1 \geq 5a$, la barre est à l'air libre, et au niveau de l'extrémité $z = L_2$, avec L_2 de l'ordre de $L_1 + 2a$, un **couple de torsion** $\bar{\Gamma} = \Gamma \bar{e}_z$ peut être appliqué à la barre. Cette situation est schématisée sur la figure ci-contre :



La configuration de référence est celle où $\Gamma = 0$, le poids et l'air ambiant agissant déjà sur la barre. Dans la configuration actuelle, $\Gamma > 0$.

I.1 On propose de rechercher une solution avec, dans le domaine $z \in [0, L_1]$, un champ de déplacement de la forme

$$\bar{u} = \alpha z \bar{e}_z \wedge \bar{X} = \alpha r z \bar{e}_\theta .$$

Représentez ce champ de déplacement dans les sections $z = L_1/2$ et $z = L_1$ de la barre. Quel mouvement décrit-il? Quel est a priori le signe de α ? Quelle est sa dimension? Justifiez que cette forme de champ de déplacement est pertinente.

Dans ce qui suit, jusqu'à la question I.11 comprise, on travaille dans le domaine $z \in [0, L_1]$.

I.2 Traduisez l'hypothèse de petits déplacements par une relation du type $A \ll B$, qu'il conviendra de vérifier a posteriori.

I.3 Calculez le gradient de déplacement, et donnez-en une expression intrinsèque.

I.4 Traduisez l'hypothèse de petite transformation par des relations du type $A' \ll B'$, et comparez la à l'hypothèse de petits déplacements.

I.5 À partir de l'expression du gradient de déplacement établie en I.3, calculez $\text{div} \bar{\mathbf{u}}$.

I.6 Calculez $\bar{\mathbf{R}} = \overline{\text{rot}} \bar{\mathbf{u}}$.

I.7 Calculez $\overline{\text{rot}} \bar{\mathbf{R}} = \overline{\text{rot}} \overline{\text{rot}} \bar{\mathbf{u}}$.

I.8 D'après le choix fait plus haut de la configuration de référence, doit-on prendre en compte le poids dans l'équation d'évolution de la quantité de mouvement, sous forme locale, exprimée en terme de déplacements ? Rappeler le nom de cette équation, sa forme utile dans le cas présent, et montrez que cette équation est vérifiée.

I.9 Calculez le tenseur des déformations linéarisé ; on demande son expression intrinsèque.

I.10 En faisant l'hypothèse que la barre est constituée d'un matériau isotrope élastique travaillant en régime linéaire, calculez l'expression intrinsèque du tenseur des contraintes de Cauchy.

I.11 Expliquez pourquoi, sur la périphérie de la barre, en $r = a$, on doit écrire une condition de frontière libre sur le vecteur contrainte. Explicitez cette condition et montrez qu'elle est vérifiée.

I.12 Quel est le principe qui permet de ne pas se préoccuper de la façon exacte avec laquelle le couple de torsion $\bar{\Gamma}$ est appliqué au niveau $z \simeq L_2$, mais d'écrire seulement des conditions limites globales en $z = L_1$, exprimant que le reste de la barre, pour $z \in [L_1, L_2]$, transmet une force nulle et le couple $\bar{\Gamma}$?

I.13 Explicitez ces deux conditions sous une forme intégrale générale faisant intervenir le tenseur des contraintes, les intégrales étant effectuées sur une « coupe virtuelle » de la barre définie par

$$r \in [0, a] , \quad \theta \in [0, 2\pi] , \quad z = L_1 .$$

I.14 Montrez que ces conditions sont satisfaites par le tenseur des contraintes calculé en I.10, à condition que α soit proportionnel à Γ , suivant une relation que vous établirez et commenterez. Bien entendu vous validerez cette relation par analyse dimensionnelle.

I.15 On considère l'arbre d'entrée de la boîte de vitesse d'un moteur, qui travaille essentiellement en torsion. Son rayon $a = 8$ mm, sa longueur libre $L_1 = 200$ mm. Son matériau est un acier de module d'Young 210 GPa et de coefficient de Poisson 0,28. Calculez le paramètre α correspondant à un couple $\Gamma = 120$ N m. Commentez. Vérifiez les hypothèses de petits déplacements et petite transformation.

I.16 Calculez les valeurs et vecteurs propres du tenseur des déformations linéarisé. Faites une analyse fine de la décomposition en déformation et rotation infinitésimales des variations de déplacements projetées dans le plan θz : notant $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z$ le projecteur dans le plan θz ,

$$d\bar{\mathbf{x}}_{2D} = \bar{\mathbf{P}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} = r \bar{\mathbf{e}}_\theta d\theta + \bar{\mathbf{e}}_z dz ,$$

vous plaçant autour d'un point $\bar{\mathbf{x}}$ de coordonnées cylindriques $(a, 0, L_0)$, avec $L_0 \simeq L_1/2$, calculez et représentez au voisinage de $\bar{\mathbf{x}}$ les champs

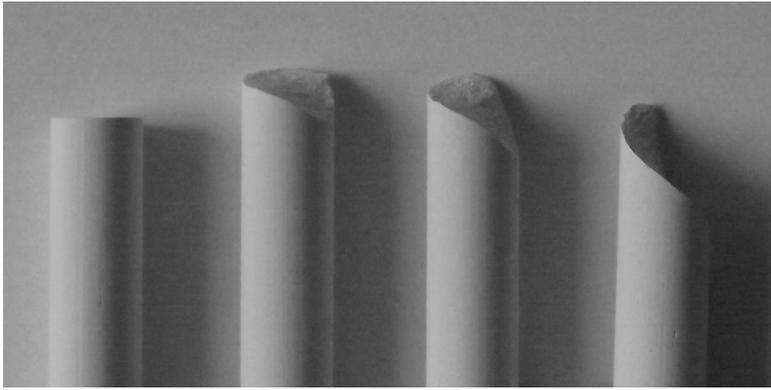
$$\bar{\mathbf{u}}_{2D} = \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{\mathbf{u}} , \quad d\bar{\mathbf{u}}_{2D} = \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}_{2D} , \quad d\bar{\mathbf{u}}_{2D\text{déf}} = \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}_{2D} , \quad d\bar{\mathbf{u}}_{2D\text{rot}} = \bar{\mathbf{P}} \cdot \bar{\bar{\Omega}} \wedge d\bar{\mathbf{x}}_{2D}$$

avec les notations de la section 2.1.9 du cours de mécanique. Commentez la structure et les liens entre ces champs. Mettez aussi en évidence des directions d'étirement et de contraction.

§

Dorénavant les barres que l'on considère sont constituées d'un matériau « *fragile* » (fonte, métal froid, craie, béton...) au sens où le régime élastique linéaire est suivi quasi-immédiatement, à « contraintes plus élevées », d'une rupture. Dans les essais de traction-torsion considérés, cette rupture se fait lorsque la *contrainte normale positive maximale* dépasse une valeur limite, i.e., ces matériaux sont surtout sensibles à la traction.

(a)



(b)



Fig. 1 – **a** : craies soumises jusqu'à la rupture à des essais de traction pure (à gauche), traction-torsion en augmentant la torsion (en allant vers la droite), torsion pure (à droite). **b** : éprouvette en fonte soumise jusqu'à la rupture à un essai de torsion pure (Centre des Matériaux de l'école des Mines de Paris, source Forest 2009).

II Modèle de la rupture en torsion d'une barre fragile

II.1 Montrez que le tenseur des contraintes calculé en I.10 admet des valeurs propres 0 et $\pm\tau_0$, en calculant τ_0 , qui est une quantité positive. Calculez aussi les directions propres correspondantes.

II.2 Tracez la représentation de Mohr de cet état de contrainte. Quelle est la valeur maximale σ_t de la contrainte normale positive? Pour quelle valeur de la normale $\bar{\mathbf{n}}$ d'une coupe virtuelle, soit $\bar{\mathbf{n}}_t$, est-elle atteinte? Faites le lien avec l'étude de la question I.16.

II.3 Montrez que la région où les contraintes σ_t sont maximales est la périphérie de la barre, définie par $r = a$.

II.4 On admet que la rupture s'initie sur une courbe inscrite sur la périphérie de la barre, partout tangente aux coupes virtuelles subissant la traction maximale. En conséquence, un vecteur petit déplacement sur cette courbe

$$d\bar{\mathbf{x}} = a \bar{\mathbf{e}}_\theta d\theta + \bar{\mathbf{e}}_z dz$$

doit être orthogonal à $\bar{\mathbf{n}}_t$. En explicitant cette condition, et en l'intégrant, établissez l'équation de la courbe de rupture. Quelle est sa géométrie? Vous comparerez le résultat de ce modèle aux expériences de la figure 1.

III Modèle de la rupture en traction-torsion d'une barre fragile

III.1 On considère un essai de traction pure dans la direction z d'une barre fragile. Rappelez quel est le tenseur des contraintes associé, dans la zone centrale. Montrez que ses valeurs propres sont 0 comptée deux fois et σ_0 dont vous donnerez l'expression en fonction de la force de traction F et de l'aire A d'une section droite. Tracez la représentation de Mohr correspondante. En utilisant le même modèle de rupture fragile qu'en II, prédisez la forme de la courbe de rupture. Commentez.

III.2 On considère enfin un essai de traction-torsion, dans lequel la barre est soumise, près de son extrémité, à une force $\bar{\mathbf{F}} = F\bar{\mathbf{e}}_z$ et un couple $\bar{\mathbf{\Gamma}} = \Gamma\bar{\mathbf{e}}_z$. Expliquez pourquoi le tenseur des contraintes de cet essai peut s'écrire comme la somme de celui calculé en I et celui rappelé en III.1. Calculez les valeurs propres de ce tenseur somme, et, en utilisant le même modèle de rupture fragile qu'en II, prédisez la forme de la courbe de rupture. Discutez de son évolution lorsque les efforts de torsion augmentent par rapport aux efforts de traction. Vous aurez intérêt à introduire un pas (ou demi-pas) caractéristique de la courbe. Commentez.