Mécanique des milieux continus solides et fluides

Test 1 du 19 novembre 2010 - Durée 2 heures

Documents autorisés : les tomes 1 et 2 du polycopié - Calculatrices autorisées

Vous indiquerez en haut à gauche de votre copie vos nom, prénom et groupe de TD (Xx ou Yy). On vous demande de rédiger avec soin et en langue française. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques sera, a priori, considérée comme nulle. Un corrigé succinct [1] sera publié dés ce soir sur www.mines.inpl-nancy.fr/emmanuel.plaut/mmc .

Problème : *dimensionnement d'un tuyau contenant un fluide sous pression*

Un tuyau du circuit primaire d'une centrale nucléaire contient, lorsqu'il est en fonctionnement, de l'eau sous haute pression [2]. On veut étudier la réponse élastique linéaire de l'acier, considéré comme un matériau isotrope homogène, d'un tel tuyau, à ces hautes pressions. On travaille en différence entre la configuration de référence où le tuyau est plein d'air à pression atmosphérique et la configuration actuelle où le tuyau est plein d'eau sous haute pression. On considère l'air et l'eau comme des fluides parfaits. Le chargement en contraintes à prendre en compte au niveau de la surface extérieure du tuyau, qui reste toujours en contact avec l'air, peut être considéré comme nul. Par contre, au niveau de la surface intérieure du tuyau, le chargement en contraintes est défini par le vecteur contrainte

$$\overline{\mathbf{T}} \;=\; -\delta p\;\overline{\mathbf{n}}$$

où δp est la différence entre la pression de l'eau dans la configuration actuelle et celle de l'air atmosphérique, $\overline{\mathbf{n}}$ est la normale unitaire sortant du domaine solide. On néglige tout effet de température et on travaille en petits déplacements et petite transformation. Le tuyau est cylindrique ; sa section est une couronne de rayons intérieur a, extérieur b. On utilise un repère cartésien $\mathrm{O}xyz$ d'axe $\mathrm{O}z$ de révolution du tuyau, et les coordonnées cylindriques associées (r,θ,z). On néglige tout effet de courbure ou de limite du tuyau dans la direction z, supposant qu'il est maintenu en position par des supports éloignés de la zone d'étude.

Première partie : *étude élastostatique générale*

1 Expliquez pourquoi on ne doit pas prendre en compte le poids dans l'équation de la quantité de mouvement qui exprime l'équilibre du tuyau. Donnez trois formes différentes de cette équation, l'une faisant intervenir le tenseur des contraintes, deux faisant intervenir le champ de déplacement, ainsi que les coefficients de Lamé λ et μ de l'acier.

2 Explicitez les conditions limites en contrainte au niveau des surfaces intérieure et extérieure du tuyau, en terme du tenseur des contraintes, de δp et des vecteurs de la base locale cylindrique.

3 Expliquez pourquoi il est raisonnable de rechercher le champ de déplacement du tuyau, entre les configurations de référence et actuelle, sous la forme

$$\overline{\mathbf{u}} \;=\; u(r)\;\overline{\mathbf{e}}_r\;.$$

4.1 Calculez grâce au cours la matrice représentative du gradient du champ de déplacement dans la base locale cylindrique. Donnez aussi une expression intrinsèque du gradient du champ de déplacement.

4.2 Par un raisonnement simple n'impliquant pas de calcul, donnez la valeur du rotationnel du champ de déplacement.

1. Comprenant aussi un complément.
2. Cette eau joue principalement le rôle d'un fluide caloporteur ; elle a aussi un rôle physique de ralentissement des neutrons dans le réacteur.

5 Déduisez de ce qui précède quelle est la forme de l'équation de l'équilibre écrite question 1 qui est la plus pratique à utiliser. Montrez à partir de cette équation le fait que la divergence du déplacement est constante. Vous noterez $2A$ cette constante, puis montrerez que la fonction $u(r)$ est d'une forme simple ne dépendant que de deux coefficients, A et une autre constante d'intégration B.

6.1 Calculez le tenseur des contraintes ; vous en donnerez une expression intrinsèque.

6.2 À partir des conditions limites en contraintes établies question 2, montrez que les coefficients

$$A \;=\; F(a,b)\,\frac{\delta p}{\lambda+\mu}\;, \quad B \;=\; G(a,b)\,\frac{\delta p}{\mu}\;,$$

et calculez-les complètement. Vous vérifierez l'homogénéité de ces formules.

Deuxième partie : *étude de dimensionnement*

On dimensionne le tuyau en utilisant un critère de limite élastique. Le critère choisi est celui de Tresca, introduit à la fin du chapitre 3 du cours. On suppose que l'acier utilisé a le même module d'Young, 210 GPa, et la même contrainte limite d'élasticité en traction, 170 MPa, que celui considéré dans la section 4.1.1 du cours. Son coefficient de Poisson est lui supposé donné par la valeur typique $\nu = 0{,}28$.

7 Dans cette question préliminaire, on vous demande de rappeler la forme du tenseur des contraintes lors d'un essai de traction pure. Déduisez-en, dans le cas de l'acier considéré, la valeur de la contrainte tangentielle maximale à la limite d'élasticité, que vous noterez τ_{lim}.

8.1 Revenant au tuyau en surpression, étudiez les déformations propres. Montrez qu'on peut les ordonner avec une valeur propre centrale nulle,

$$\epsilon_1 \;>\; \epsilon_2 = 0 \;>\; \epsilon_3 \;.$$

Interprétez physiquement le signe de chaque valeur, en lien avec la direction propre correspondante.

8.2 À partir de la loi de Hooke, établissez la relation entre les déformations propres et les contraintes propres, ordonnées suivant

$$\sigma_1 \;>\; \sigma_2 \;>\; \sigma_3 \;.$$

Calculez les, ainsi que la valeur de la contrainte tangentielle maximale τ_{max} quand on se place au rayon r.

8.3 Dans quelle région du tuyau τ_{max} est-elle la plus élevée ? Vous noterez $\max\tau$ la valeur correspondante, et la calculerez. Vous vérifierez que $\max\tau$ est toujours supérieure à la surpression δp, et proposerez une interprétation physique de la formule obtenue.

9.1 Pour des questions de débit volumique, on choisit un rayon intérieur $a = 35$ cm. On s'intéresse d'autre part à une centrale pour laquelle la pression de l'eau est de 155 bars soit 15,5 MPa. En considérant que la pression atmosphérique est de 1 bar, que vaut la surpression δp ?

9.2 Représentez la courbe $\max\tau(b)$ et déduisez du critère de Tresca, appliqué avec une marge de sécurité de 25%,

$$\max\tau(b) \;\leq\; \tau_0 \;=\; 0{,}75\;\tau_{\text{lim}}\;,$$

la valeur du rayon extérieur b qu'il faut utiliser pour rester dans cette limite. Vous donnerez une formule littérale pour b fonction de δp, τ_0 et a, que vous commenterez. Vous donnerez aussi sa valeur numérique, ainsi que celle de l'épaisseur du tuyau, $d = b - a$.

Troisième partie : *analyse physique fine et validation*

10 Dans le cas étudié en deuxième partie, calculez les constantes A et B qui déterminent le champ de déplacement. Représentez l'allure de ce champ sur un secteur angulaire du tuyau. Quel est le déplacement maximal ? L'hypothèse des petits déplacements est-elle justifiée ?

11 Étudiez la validité de l'hypothèse de petite transformation.