Mines de Nancy - 1ère année **Année universitaire 2009 - 2010**

Mécanique des milieux continus solides et fluides

Test 1 du 27 novembre 2009 - Durée 2 heures

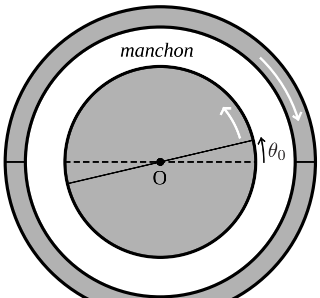
Documents autorisés : les tomes 1 et 2 du polycopié - Calculatrices autorisées

Vous voudrez bien indiquer en haut à gauche de votre copie vos nom, prénom et groupe de TD (Xx ou Yy). On vous demande de rédiger avec soin et en langue française. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques sera, a priori, considérée comme nulle. Un corrigé succinct[1] sera publié dés cet après-midi sur

www.mines.inpl-nancy.fr/emmanuel.plaut/mmc .

Problème : *étude d'un système d'accouplement élastique*

Un système d'accouplement élastique permet la transmission de couple entre, par exemple, l'arbre de transmission et le volant d'un moteur diesel, et ce avec une certaine flexibilité qui autorise en principe un léger désalignement des deux axes de rotation, ou encore une légère translation des deux systèmes. Un tel système est présenté sur la figure de gauche ci-dessous[2]. Dans le référentiel de travail, tournant avec la bague extérieure, on considérera ici que l'on a une géométrie égale à celle de l'expérience de Couette cylindrique : le manchon élastique formant la liaison est situé entre un cylindre intérieur (l'arbre) rigide de rayon a et un cylindre extérieur (la bague) rigide de rayon intérieur $b > a$, comme cela est représenté sur la figure de droite ci-dessous. Le manchon est solidaire des deux cylindres car collé à ceux-ci.



Cette figure montre aussi l'origine O du repère utilisé, qui est un point de l'axe de révolution Oz commun aux deux cylindres et au manchon. On utilisera dans ce qui suit les coordonnées cylindriques (r,θ,z), le manchon étant toujours situé entre les plans $z = 0$ et $z = h$. Les segments noirs sur la figure ci-dessus représentent la rotation des cylindres sous l'effet des couples appliqués, par rapport à la configuration de référence sans couples (segment en trait pointillé). Les couples et forces tangentielles appliqués au manchon au niveau de ses frontières intérieure ($r = a$) et extérieure ($r = b$) sont symbolisés par les flèches blanches intérieure et extérieure. L'angle de la rotation du cylindre intérieur par rapport au cylindre extérieur, dans la configuration d'équilibre sous l'effet des couples, est $\theta_0 > 0$. Dans la configuration de référence le poids et l'action de l'air ambiant s'appliquent déjà au manchon, on pourra donc les oublier dans cette étude. Enfin on néglige les forces d'inertie, considérant que le référentiel lié au cylindre extérieur est galiléen.

§

Les parties I et II du problème sont assez largement indépendantes.

§

[1] Comprenant aussi un complément.

[2] Système RATO-DG de l'entreprise VULKAN, photo tirée du site www.hellopro.fr.

I Étude générale de la transmission de couples

I.1 Identifiez dans la loi d'évolution du moment cinétique (le « bilan de moment cinétique ») écrite globalement pour tout le manchon les couples vectoriels $\overline{\mathbf{\Gamma}}$ appliqué par l'arbre (le cylindre intérieur) sur le manchon au niveau de leur interface, et $\overline{\mathbf{\Gamma}}'$ appliqué par la bague (le cylindre extérieur) sur le manchon au niveau de leur interface. Donnez leurs expressions intégrales dépendant du vecteur position $\overline{\mathbf{OM}}$, du tenseur des contraintes $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ dans le manchon, du vecteur $\overline{\mathbf{e}}_r$, et utilisant un produit vectoriel. Montrez ensuite que ces deux couples ne sont pas indépendants, et donnez la relation entre $\overline{\mathbf{\Gamma}}$ et $\overline{\mathbf{\Gamma}}'$.

I.2 On suppose que l'arbre est soumis non seulement à l'action du manchon mais aussi à un couple extérieur $\overline{\mathbf{\Gamma}}_a$. Montrez à partir de la loi d'évolution du moment cinétique écrite globalement pour l'arbre qu'il existe une relation entre $\overline{\mathbf{\Gamma}}$ et $\overline{\mathbf{\Gamma}}_a$.

I.3 On suppose que la bague est soumise non seulement à l'action du manchon mais aussi à un couple extérieur $\overline{\mathbf{\Gamma}}_b$. Montrez à partir de la loi d'évolution du moment cinétique écrite globalement pour la bague qu'il existe une relation entre $\overline{\mathbf{\Gamma}}'$ et $\overline{\mathbf{\Gamma}}_b$.

I.4 Concluez.

§

II Résolution du problème en petits déplacements et petite transformation

On se place dorénavant dans les hypothèses de petits déplacements et petite transformation entre la configuration de référence sans couple et la configuration actuelle.

II.1 Expliquez pourquoi on peut raisonnablement supposer que le champ de déplacement dans le manchon

$$\overline{\mathbf{u}} \;=\; u(r)\,\overline{\mathbf{e}}_\theta\ .$$

II.2 Calculez le tenseur gradient du champ de déplacement. Vous en donnerez une expression intrinsèque.

II.3 Que peut-on dire de la divergence de $\overline{\mathbf{u}}$? Pourquoi cela ? Donnez une conséquence mécanique importante de cette observation.

II.4 À partir de l'équation de Navier, montrez que la fonction $u(r)$ vérifie une équation différentielle que vous nommerez très précisément (nature, etc...).

II.5 Résolvez cette équation en cherchant par exemple des solutions particulières de la forme r^α. On vous demande de donner une solution ne dépendant plus que de θ_0 et d'autres paramètres géométriques, et on vous conseille pour cela d'expliciter les conditions limites en déplacement devant être vérifiées sur les frontières $r = a$ et b du manchon.

II.6 Simplifiez l'expression du gradient de déplacement compte tenu de la forme trouvée pour $\overline{\mathbf{u}}$, puis calculez le tenseur des déformations linéarisé. On vous demande des expressions intrinsèques.

II.7 Calculez le tenseur des contraintes de Cauchy dans le manchon, en faisant l'hypothèse qu'il est élastique linéaire isotrope. On vous demande une expression intrinsèque.

II.8 Calculez le couple $\overline{\mathbf{\Gamma}} = \Gamma\overline{\mathbf{e}}_z$ appliqué par l'arbre (le cylindre intérieur) sur le manchon au niveau de leur interface, en faisant usage de la formule établie en I.1. Montrez que θ_0 est proportionnel à Γ et vérifiez l'homogénéité du coefficient de proportionnalité correspondant. Cette relation de proportionnalité est-elle surprenante ?

II.9 Vérifiez par un calcul direct du couple $\overline{\mathbf{\Gamma}}'$ appliqué par la bague (le cylindre extérieur) sur le manchon au niveau de leur interface la relation entre $\overline{\mathbf{\Gamma}}$ et $\overline{\mathbf{\Gamma}}'$ établie en I.1. Commentez ce calcul.

II.10 Dans le cas où un matériau caoutchoutique de type standard constitue le manchon, que vaut l'angle de rotation θ_0 lorsque le couple $\Gamma = 1000$ N m, sachant que $a = 2{,}5$ cm, $b = 3$ cm, $h = 1$ cm ? Commentez le résultat obtenu, en revenant en particulier sur les hypothèses que l'on a utilisées pour l'obtenir.

II.11 Représentez le champ de déplacement $\overline{\mathbf{u}}$ dans un cas similaire à celui de l'application numérique précédente. Commentez.

§

III Étude de l'état de contrainte

III.1 Calculez en tout point du manchon les valeurs propres σ_1, σ_2 et σ_3 du tenseur des contraintes, ordonnées par valeurs décroissantes comme dans le cours. Donnez aussi les directions principales correspondantes.

III.2 Tracez la représentation de Mohr de l'état de contraintes en un point quelconque du manchon.

III.3 On s'intéresse aux contraintes tangentielles ou de cisaillement $\tau(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{n}})$ au point $\overline{\mathbf{x}}$ pour une direction de normale de surface $\overline{\mathbf{n}}$. Calculez

$$\tau_{\max} \;=\; \max_{\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{n}}} \tau(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{n}}) \ ,$$

en spécifiant dans quelle région du manchon le cisaillement est maximal.

III.4 Pour un point $\overline{\mathbf{x}}$ situé dans cette région, déduisez de la représentation de Mohr les directions de normale de surface $\overline{\mathbf{n}}_{\pm}$ pour lesquelles le cisaillement est maximal.

III.5 Calculez la valeur de $\tau_{\max}$ pour les données de la question II.10. Commentez.