Mines Nancy - 1ère année **Année universitaire 2008 - 2009**

Mécanique des milieux continus solides et fluides

Test 1 du 7 novembre 2008 - Durée 2 heures

Documents autorisés : les fascicules 1 à 4 du cours - Calculatrices autorisées

Vous voudrez bien indiquer en haut à gauche de votre copie vos nom, prénom et groupe de TD (Xx ou Yy). On vous demande de rédiger avec soin et en langue française. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques sera, a priori, considérée comme nulle.

Problème : ***ondes propagatives dans un solide élastique***

1 On considère un milieu continu solide isotrope occupant un domaine volumique D réputé « grand » voire « infini ». On veut étudier la propagation d'***ondes de déplacements de petite amplitude*** dans ce milieu. Quelle(s) hypothèse(s) raisonnable(s) peut-on faire concernant l'étude de ce problème, et la loi de comportement du matériau solide isotrope ? Comment peut-on alors qualifier ce problème ?

2 Écrivez l'équation qui régit l'évolution spatio-temporelle du champ de déplacement d'une onde de petite amplitude. Vous noterez simplement ρ la densité du milieu, supposée, en première approximation, constante et homogène. Vous expliquerez comment on peut se ramener à une équation qui ne contient que des termes dépendant linéairement du champ de déplacement, c'est-à-dire comment on peut éliminer le terme de force de pesanteur.

3 On considère une ***onde plane*** se propageant dans la direction x avec un nombre d'onde k (réel strictement positif) et une fréquence angulaire ω (réelle). Son champ de déplacement est supposé de la forme

$$\overline{\mathbf{u}}(\overline{\mathbf{x}},t) \;=\; (u\overline{\mathbf{e}}_x + v\overline{\mathbf{e}}_y + w\overline{\mathbf{e}}_z)\;\cos(kx-\omega t)\;,$$

avec u, v et w des constantes réelles. Explicitez les trois composantes de l'équation aux dérivées partielles écrite en 2, et déduisez-en un système algébrique de la forme

$$\rho\omega^2[U] \;=\; [L]\cdot[U] \qquad (*)$$

où $[U]$ est le vecteur colonne

$$[U] \;=\; \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

et $[L]$ est une matrice que vous donnerez.

4 Quels sont les plans de phase de l'onde étudiée ? Redémontrez la formule générale donnant la vitesse de phase c d'une onde, c'est-à-dire la vitesse de propagation de ses plans de phase, en fonction de son nombre d'onde k et de sa fréquence angulaire ω.

5 Reformulez le système $(*)$ en remplaçant ω par son expression en terme de c et k. Quelle est la nature mathématique du système ainsi obtenu, i.e., comment apparaissent c^2 et $[U]$?
Montrez par la résolution de ce système et par une analyse physique des solutions obtenues, reposant notamment sur deux dessins (représentations spatiales du champ $\overline{\mathbf{u}}$ à t fixé), l'existence de deux types d'ondes :

- des ***ondes longitudinales de compression-dilatation***, se propageant à la vitesse c_1 ;
- des ***ondes transversales de cisaillement***, se propageant à la vitesse c_2.

Vous calculerez les vitesses c_1 et c_2, et vérifierez l'homogénéité des formules obtenues.

6 Calculez, pour chacun des deux types d'ondes que vous venez de mettre en évidence, la loi donnant l'expression de la densité locale $\rho(\overline{\mathbf{x}},t)$, lorsque l'on écrit celle-ci à l'ordre U^1 et non plus U^0, U désignant l'ordre de grandeur du vecteur $[U]$ introduit à la question 3. Pour éviter toute collision au niveau des notations, vous noterez, dans cette question seulement, ρ_0 la densité à l'ordre U^0.
Commentez les résultats obtenu et montrez qu'ils permettent de confirmer la terminologie utilisée pour désigner les deux types d'ondes.

7 Dans cette question on s'intéresse exclusivement aux ondes longitudinales de compression-dilatation.

7.1 Pour une solution onde de ce type, calculez le gradient du champ de déplacement puis le tenseur des déformations puis le tenseur des contraintes. On demande des expressions intrinsèques de ces objets.

7.2 Dans un solide, on peut définir la pression comme étant l'opposé du tiers de la trace du tenseur des contraintes. Calculez le champ de pression associé à une onde longitudinale, représentez-le sur un dessin (représentation spatiale à t fixée, en indiquant les régions de surpression et dépression par des $+$ et $-$) et interprétez physiquement le résultat obtenu.

8 Toutes ces ondes sont-elles dispersives ou non ? De quelles ondes se propageant dans les fluides sont-elles analogues ?

9 ***Application au cas d'un acier* :**

Quelles sont les valeurs typiques des vitesses de phase c_1 et c_2 dans le cas d'un acier ?

10 ***Application aux ondes sismiques* :**

10.1 Dans le manteau terrestre considéré sur des temps courts, la densité est de l'ordre de

$$\rho \ = \ 4000 \ \mathrm{kg/m^3} \ ,$$

tandis que les modules d'Young et le coefficient de Poisson sont de l'ordre de

$$E \ = \ 380 \ \mathrm{GPa} \ , \qquad \nu \ = \ 0{,}3 \ .$$

Calculez alors les vitesses c_1 et c_2.

10.2 Au bout de combien de temps environ un sismographe placé à Nancy recevra un signal associé à un tremblement de terre ayant lieu en Californie ? Expliquez au passage pourquoi les sismologues distinguent en général des ondes « P », « Primaires », et des ondes « S », « Secondaires ». Qui est qui ?

Données :

Les coordonnées géographiques de Nancy sont

$$\Phi \ = \ \text{latitude} \ = \ 48^{\mathrm{o}} \ \text{Nord} \ , \qquad \Lambda \ = \ \text{longitude} \ = \ 6^{\mathrm{o}} \ \text{Est} \ ;$$

celles de Los-Angeles sont

$$\Phi \ = \ 34^{\mathrm{o}} \ \text{Nord} \ , \qquad \Lambda \ = \ 118^{\mathrm{o}} \ \text{Ouest} \ ;$$

on rappelle que le rayon de la Terre est de 6400 km.

§

À l'issue de ce test, après une pause, un corrigé et quelques compléments-commentaires seront donnés en amphi Schwartz, sur une durée d'1 heure.