Mines Nancy - $1^{\text{ère}}$ année - Test 0 de MMCSF du 5 novembre 2021 - Durée 55 minutes

Aucun document autorisé - Calculatrices autorisées

Cadres **correcteur** : G ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ ☐

Vous rendrez impérativement à la fin les 4 pages, toujours agrafées, de ce sujet - copie.

NOM Prénom : ☐ **Gpe de TD :** ☐

Formulaire : Double produit vectoriel : $\overline{\mathbf{a}} \wedge (\overline{\mathbf{b}} \wedge \overline{\mathbf{c}}) \;=\; (\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{c}})\overline{\mathbf{b}} \;-\; (\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}})\overline{\mathbf{c}}\ .$ (1)

Lien entre tenseur d'ordre 2 application bilinéaire et application linéaire : règle du sandwich :

$$\overline{\overline{\mathbf{L}}} \;:\; (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}') \longmapsto \overline{\overline{\mathbf{L}}}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}') \;=\; \overline{\mathbf{x}} \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{L}}} \cdot \overline{\mathbf{x}}'\right)\ . \tag{2}$$

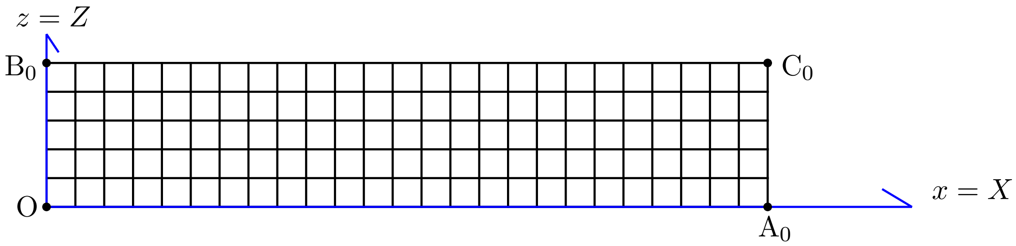
Tenseur de déformation de Green-Lagrange :

$$\overline{\overline{\mathbf{e}}} \;:\; (d\overline{\mathbf{X}},d\overline{\mathbf{X}}') \longmapsto \overline{\overline{\mathbf{e}}}(d\overline{\mathbf{X}},d\overline{\mathbf{X}}') \;=\; \frac{1}{2}\left(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}' - d\overline{\mathbf{X}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}'\right)\ . \tag{3}$$

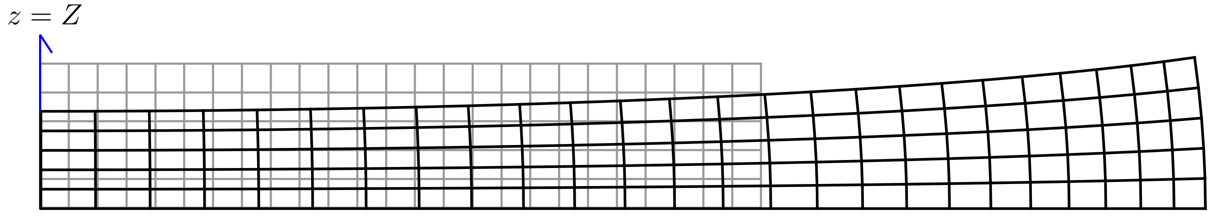
Exercice : ***Étude d'un cylindre mis progressivement en rotation rapide***

Un ***cylindre circulaire droit d'un matériau solide homogène***, faisant partie d'une ***turbomachine***, est mis ***progressivement*** en ***rotation rapide*** autour de son axe de révolution Oz. La pesanteur ne joue aucun rôle. On ne prend pas non plus en compte les effets de la pression atmosphérique, inclus dans la configuration de référence, i.e., ce cylindre est dans le « vide ». Le cylindre est lié près de son centre à un arbre « moteur », mais on oublie ici cet axe, comme s'il n'avait d'autre influence que celle de la mise en rotation. Le repère cartésien OXYZ est fixe, lié au laboratoire ; le repère cartésien Oxyz est tournant, lié au cylindre ; entre les deux référentiels associés le vecteur vitesse de rotation instantanée est $\overline{\boldsymbol{\omega}} = \omega(t)\overline{\mathbf{e}}_z$. On représente sur les figures ci-dessous, à l'échelle 1, en coupe, le quart d'une section du cylindre dans le plan xOz, avec une ***grille*** initialement cartésienne attachée à la matière du cylindre[1]. Sur la figure **a**, on représente la ***configuration initiale et de référence***, à vitesse de rotation nulle. Sur la figure **b**, on représente cette configuration en gris, et en noir la ***configuration actuelle*** au temps $t = t_a$, à vitesse de rotation élevée, devenue quasiment constante. La configuration actuelle choisie est telle que la section d'intérêt se retrouve dans son plan initial, i.e. à l'instant t_a considéré OXYZ et Oxyz coïncident.

a :



b :



1 Quel type de description du mouvement est adoptée implicitement, lorsque l'on suit cette grille ?

Description ☐ .

1. Un deuxième quart se déduit de ce premier par la symétrie $z \mapsto -z$, ensuite à partir de la moitié de section obtenue par réunion de ces deux quarts, à laquelle on applique la symétrie $x \mapsto -x$, on obtient toute la section.

2 Comme la vitesse de rotation instantanée, $\omega(t)$, croît lentement de 0 avant de se fixer à sa valeur actuelle et finale, $\omega_a = \omega(t_a)$, on peut approximer l'***accélération d'entrainement*** du repère Oxyz par

$$\overline{\boldsymbol{\gamma}}_e(\overline{\mathbf{x}}) \;=\; \overline{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\overline{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overline{\mathbf{x}}) \quad \text{avec} \quad \overline{\mathbf{x}} \;=\; x\overline{\mathbf{e}}_x + y\overline{\mathbf{e}}_y + z\overline{\mathbf{e}}_z \;\; \text{la position actuelle d'un point matériel.}$$

En notant ρ la masse volumique du solide, établissez par un ***calcul*** une expression simple, dans le repère cartésien tournant Oxyz, de la ***force volumique d'inertie d'entrainement*** correspondante

$$\bar{\mathbf{f}}_e(\overline{\mathbf{x}}) \;=$$

Déduisez-en un ***adjectif*** décrivant l'effet physique de cette force : $\bar{\mathbf{f}}_e \;=$ force .

En quoi cette force permet-elle d'interpréter la forme du cylindre représentée figure **b** ?

3 Soit A la position actuelle du point A_0 de la figure **a**. Positionnez A sur la figure **b**. Dans le repère fixe OXYZ, décrivez succinctement la ***trajectoire*** suivie par A_0 entre sa position initiale A_0 et sa position actuelle A : faites un schéma représentant cette trajectoire dans le plan XOY, justifiez le physiquement, enfin, nommez la nature de cette courbe.

4 Sur la figure **b**, représentez les positions actuelles B et C des points B_0 et C_0 , puis, en couleur, les ***vecteurs déplacements*** $\overline{\mathbf{u}}$, entre la configuration de référence et actuelle, des points A_0 , B_0 et C_0 . Comparez l'ordre de grandeur de $||\overline{\mathbf{u}}(A_0)||$ à la demi-épaisseur $||\overline{\mathbf{A}_0\mathbf{C}_0}||$ du disque, et qualifiez en conséquence les déplacements.

NOM prénom : | | Gpe de TD : | |

5.a Soit $d\overline{\mathbf{X}}$ un petit segment de matière dans la configuration initiale, orienté dans la direction X, et $d\overline{\mathbf{x}}$ ce segment transporté dans la configuration actuelle. En notant dX et dx les longueurs de ces segments, et en repartant de la définition intrinsèque du ***tenseur de déformation de Green-Lagrange***, établissez une formule analytique permettant d'évaluer sa composante e_{xx} à partir de dX et dx.

5.b Par analogie, si dZ et dz désignent les longueurs d'un petit segment de matière orienté dans la direction z, dans les configurations initiale et actuelle, exprimez e_{zz} à partir de dZ et dz.

$e_{zz} \ =$

6.a Soit $d\overline{\mathbf{X}}$ le segment de la configuration initiale joignant B_0 à son plus proche voisin de grille dans la direction X. Représentez $d\overline{\mathbf{X}}$ sur la figure **a** et ce segment transporté $d\overline{\mathbf{x}}$ sur la figure **b**. En mesurant à la règle les normes de ces vecteurs, estimez e_{xx} en B_0 . Commentez le signe et l'ordre de grandeur d'e_{xx} .

$dX \ \simeq$, $dx \ \simeq$ $\Longrightarrow$ $e_{xx} \ \simeq$

-
-

6.b Soit $d\overline{\mathbf{Z}}$ le segment de la configuration initiale joignant B_0 à son plus proche voisin de grille dans la direction z. Représentez $d\overline{\mathbf{Z}}$ sur la figure **a** et ce segment transporté $d\overline{\mathbf{z}}$ sur la figure **b**. En mesurant à la règle les normes de ces vecteurs, estimez e_{zz} en B_0 . Commentez le signe d'e_{zz} .

$dZ \ \simeq$, $dz \ \simeq$ $\Longrightarrow$ $e_{zz} \ \simeq$

-

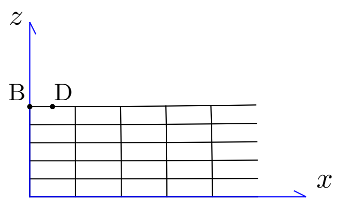
7.a On se place dorénavant en un point D situé légèrement à droite de B, comme représenté figure **c** ci-dessous. Supposant le ***tenseur de déformation*** $\overline{\overline{\mathbf{e}}}$ au point D connu, et le ***solide élastique***, pourrait-on déterminer le ***tenseur des contraintes de Cauchy*** $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ en D à partir d'une loi de comportement de solides vue en cours ?

7.b On suppose que, par axisymétrie du problème, le tenseur de Cauchy en D a pour expression

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \;=\; \sigma_{xx}(\overline{\mathbf{e}}_x \otimes \overline{\mathbf{e}}_x + \overline{\mathbf{e}}_y \otimes \overline{\mathbf{e}}_y) \;+\; \sigma_{zz}\overline{\mathbf{e}}_z \otimes \overline{\mathbf{e}}_z \;.$$

Quelle doit être la normale unitaire sortante $\overline{\mathbf{n}}$ d'une ***coupe virtuelle*** (ou réelle) du solide au voisinage de D pour que le ***vecteur contrainte*** qui s'exerce à travers la surface de cette coupe soit proportionnel à σ_{xx} ? Représentez sur la figure **c** ci-dessous la coupe correspondante, avec des hachures du côté intérieur, sa normale $\overline{\mathbf{n}}$ et le vecteur $\overline{\mathbf{T}} \;=\; d^2\overline{\mathbf{f}}/d^2S \;=\; \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\cdot\overline{\mathbf{n}}$ associé. Expliquez pourquoi le signe de σ_{xx} est connu et ce qu'il signifie physiquement.

c :



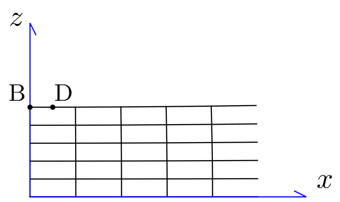
$\overline{\mathbf{n}} \;=\; \qquad\qquad \Longrightarrow \quad \overline{\mathbf{T}} \;=$

7.c De même, représentez sur la figure **d** ci-dessous une ***coupe virtuelle*** (ou réelle) du solide au voisinage de D (avec des hachures à l'intérieur au niveau de la coupe), sa normale unitaire sortante $\overline{\mathbf{n}}$, et (s'il est non nul) le ***vecteur contrainte*** associé

$$\overline{\mathbf{T}} \;=\; d^2\overline{\mathbf{f}}/d^2S \;=\; \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\cdot\overline{\mathbf{n}} \;,$$

pour $\overline{\mathbf{n}}$ choisi de sorte que $\overline{\mathbf{T}}$ soit proportionnel à σ_{zz} . Expliquez pourquoi la valeur de σ_{zz} est connue et ce qu'elle signifie physiquement.

d :



$\overline{\mathbf{n}} \;=\; \qquad\qquad \Longrightarrow \quad \overline{\mathbf{T}} \;=$