Mines Nancy - $1^{\text{ère}}$ année - Test 0 de MMCSF du 6 novembre 2020

Durée 52 + 8 minutes*

En tête de copie indiquez **NOM Prénom Xx** avec **Xx** votre groupe de TD (ex. : **A1**) ; sous votre nom, apposez votre ***signature***.

Rédigez en langue française en expliquant votre démarche (ex. : « d'après l'équation (10.99) du cours de mécanique »...), vos calculs, vos interprétations, etc. En dehors de la question 1, qui ne requiert en solution qu'un schéma, si une réponse à une autre question est constituée seulement de symboles mathématiques, elle ne sera pas prise en compte.

*On vous laissera à la fin environ 8 minutes pour scanner vos copies, puis envoyer **avant 18h** le PDF « relié » correspondant à votre chargé de TD, avec votre mel UL.

Exercice : *Étude des déformations d'un mouvement plan en approche lagrangienne - Application à une expérience de matriçage*

Dans l'espace muni d'un repère cartésien $\mathrm{O}X_1X_2X_3$, la base associée $\{\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2,\overline{\mathbf{e}}_3\}$ étant orthonormée directe, on considère un milieu dont le mouvement dans le plan $\mathrm{O}X_1X_2$ est caractérisé, autour d'un point M_0, à un instant t, par un ***tenseur des dilatations de Cauchy*** $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ et un ***tenseur des déformations de Green-Lagrange*** $\overline{\overline{\mathbf{e}}}$. Comme le mouvement est plan, on ne s'intéresse à l'action de ces tenseurs que sur des vecteurs du plan $\mathrm{O}X_1X_2$, et on les représente par les matrices 2 x 2

$$[C] \;=\; \mathrm{Mat}\Big(\overline{\overline{\mathbf{C}}},\, \{\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2\}\Big) \;=\; [C_{ij}] \quad \text{et} \quad [e] \;=\; \mathrm{Mat}\Big(\overline{\overline{\mathbf{e}}},\, \{\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2\}\Big) \;=\; [e_{ij}]\ .$$

On considère deux (très) petites variations possibles de M_0, définies par des points proches A_0 et B_0, ou encore par les vecteurs

$$d\overline{\mathbf{X}} \;=\; \overline{\mathbf{M}_0\mathbf{A}_0} \;=\; dX\ \overline{\mathbf{e}}_1 \quad \text{et} \quad d\overline{\mathbf{X}}' \;=\; \overline{\mathbf{M}_0\mathbf{B}_0} \;=\; dX\ \overline{\mathbf{e}}_2$$

avec dX une (très) petite longueur. Les points M_0, A_0 et B_0 sont transportés en M, A et B, i.e., $d\overline{\mathbf{X}}$ et $d\overline{\mathbf{X}}'$ deviennent dans le mouvement $d\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{MA}}$ et $d\overline{\mathbf{x}}' = \overline{\mathbf{MB}}$. On caractérise les ***déformations*** du carré construit sur $\mathrm{M}_0\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$ par les ***rapports de longueur***

$$\lambda \;=\; \frac{\big|\big|\overline{\mathbf{MA}}\big|\big|}{\big|\big|\overline{\mathbf{M}_0\mathbf{A}_0}\big|\big|} \;=\; \frac{||d\overline{\mathbf{x}}||}{||d\overline{\mathbf{X}}||} \quad \text{et} \quad \lambda' \;=\; \frac{\big|\big|\overline{\mathbf{MB}}\big|\big|}{\big|\big|\overline{\mathbf{M}_0\mathbf{B}_0}\big|\big|} \;=\; \frac{||d\overline{\mathbf{x}}'||}{||d\overline{\mathbf{X}}'||}\ , \tag{1}$$

ainsi que par l'***angle de glissement*** θ tel que l'angle orienté

$$(\widehat{d\overline{\mathbf{x}}\ ,\ d\overline{\mathbf{x}}'}) \;=\; (\widehat{\overline{\mathbf{MA}}\ ,\ \overline{\mathbf{MB}}}) \;=\; \frac{\pi}{2} - \theta\ . \tag{2}$$

1 Dans le plan $\mathrm{O}X_1X_2$ orienté classiquement, vu d'un observateur situé en un certain $X_3 > 0$, faites un schéma représentant M_0, A_0, B_0, $d\overline{\mathbf{X}}$ et $d\overline{\mathbf{X}}'$ dans la configuration initiale, M, A, B, $d\overline{\mathbf{x}}$ et $d\overline{\mathbf{x}}'$ dans la configuration actuelle, dans un cas particulier où $||d\overline{\mathbf{x}}|| > dX$, $||d\overline{\mathbf{x}}'|| > dX$, $\theta \simeq +\pi/8$ rad.

2 Dans le cas général, en utilisant la définition de $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ comme forme quadratique, exprimez λ et λ' en fonction des composantes diagonales de la matrice $[C]$, puis de celles de la matrice $[e]$.

3 Expliquez ce que signifient mécaniquement les propriétés suivantes :

3.a $e_{11} > 0$

3.b $e_{11} = 0$

3.c $e_{11} < 0$

4 Dans l'hypothèse de ***petite transformation***, exprimez $\overline{\overline{\mathbf{e}}}$ en fonction du ***tenseur des déformations linéarisé*** $\overline{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$, puis établissez l'expression de λ, à l'ordre le plus bas en $\big|\big|\overline{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}\big|\big|$, en fonction de certaines composantes de la matrice $[\epsilon]$ représentant $\overline{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ dans la base $\{\overline{\mathbf{e}}_i\}$.

5 Revenant à un cas général, en utilisant la définition de $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ en tant que forme bilinéaire, établissez l'expression de $\sin\theta$ en fonction des composantes de $[C]$, puis de celles de $[e]$.

6 Expliquez ce que signifient mécaniquement les propriétés suivantes :

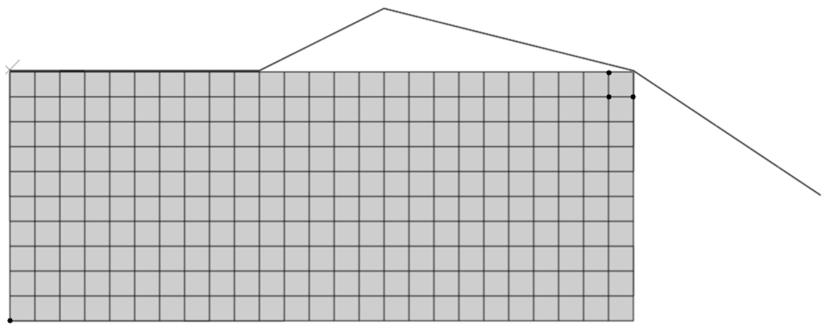
6.a $e_{12} > 0$
6.b $e_{12} = 0$
6.c $e_{12} < 0$

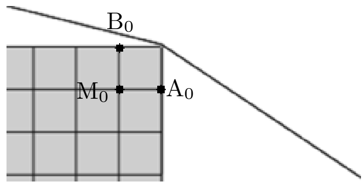
Vous ferez le lien entre une de ces inégalités et le schéma de la figure 1 ; vous représenterez aussi sur un nouveau schéma du même type un cas correspondant à l'inégalité inverse.

7 Dans l'hypothèse de ***petite transformation***, établissez l'expression de θ, à l'ordre le plus bas en $||\bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}||$, en fonction d'une ou plusieurs composantes de la matrice $[\epsilon]$ déjà introduite en question 2.

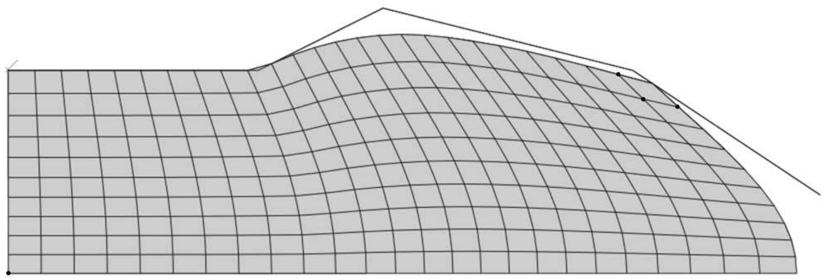
8 On s'intéresse à une ***expérience de matriçage*** comme celle présentée figure 1.5 du document de cours de mécanique, mais maintenant simulée numériquement à l'aide d'un logiciel d'éléments finis. On représente un quart du système, maillé finement, ainsi que 3 points particuliers, avant et après, ci-dessous :

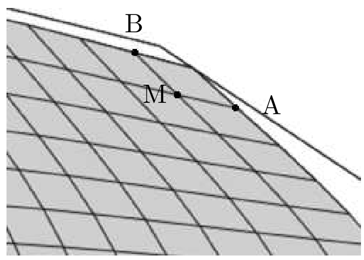
(a) Configuration initiale : zoom sur le coin supérieur droit :





(b) Configuration actuelle : zoom sur le coin supérieur droit :





On donne les vecteurs, en longueurs adimensionnées en unité de dX,

$$\overline{\mathbf{M}_0\mathbf{A}_0} \;=\; \bar{\mathbf{e}}_1 \;, \quad \overline{\mathbf{M}_0\mathbf{B}_0} \;=\; \bar{\mathbf{e}}_2 \;, \quad \overline{\mathbf{MA}} \;=\; 1{,}4\bar{\mathbf{e}}_1 - 0{,}33\bar{\mathbf{e}}_2 \;, \quad \overline{\mathbf{MB}} \;=\; -\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 \;.$$

Déduisez-en, au voisinage de M_0, une estimation des matrices $[C]$ et $[e]$ puis de l'angle de glissement orienté θ, en radians puis en degrés.

9 Commentez les valeurs trouvées pour les composantes de $[e]$ et l'angle θ, en termes de propriétés mécaniques.

§

Barème indicatif :

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Points	1	2,5	3	1	3	4	1	4,5	3	23