Mines Nancy - $1^{\text{ère}}$ année - Test 0 de MMCSF du 9 novembre 2018 - Durée 50 minutes

Aucun document autorisé - Calculatrices autorisées

Question :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	**Total**
Barème indicatif :	1	2	1,5	3,5	1,5	3	2	3,5	1	2,5	2,5	**24**
Points élève :												

NOM prénom : **Gpe de TD :**

Vous rendrez les 5 pages de ce sujet - copie à la fin, toujours agrafées. Prenez le temps d'utiliser un brouillon et ***rédigez succinctement pour expliquer vos démarches et calculs***. Les commentaires succincts attendus doivent être ***géométriques*** ou ***physiques***, non purement mathématiques.

Formulaire

Taux d'évolution d'un volume infinitésimal en description eulerienne : $$\frac{d(d^3x)}{dt} = (\text{div}\overline{\mathbf{v}})\ d^3x \qquad (1)$$

Divergence en coordonnées cylindriques : $$\text{div}\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (2)$$

Gradient en coordonnées cartésiennes : $$\overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\overline{\mathbf{u}} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}\overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j \qquad (3)$$

Exercice : *Étude cinématique de la compression d'un lopin cylindrique*

On s'intéresse à la ***mise en forme d'un lopin d'un matériau solide de forme cylindrique par compression***. Comme représenté sur le schéma de principe de la page 2, on utilise un repère Oxyz avec Oz vertical, muni de coordonnées cylindriques notées (R,Θ,Z) pour un point matériel dans la configuration initiale, (r,θ,z) pour un point matériel dans la configuration actuelle. Comme le mouvement se fait, sans rotation globale, dans des plans méridiens, $\theta = \Theta$, les bases locales des coordonnées cylindriques sont les mêmes dans les deux configurations, $\{\overline{\mathbf{e}}_R,\overline{\mathbf{e}}_\Theta,\overline{\mathbf{e}}_Z\} = \{\overline{\mathbf{e}}_r,\overline{\mathbf{e}}_\theta,\overline{\mathbf{e}}_z\}$. Le lopin occupe à l'instant $t = 0$ le domaine

$$D_0 = \{ \ \overline{\mathbf{X}} = R\overline{\mathbf{e}}_r + Z\overline{\mathbf{e}}_z \quad \text{avec} \quad R \in [0,A[\ ,\ \Theta \in [0,2\pi[\ ,\ Z \in]0,H[\ \} \ .$$

Sa base inférieure reste en contact avec un plan fixe indéformable défini par $z = 0$. Le lopin est comprimé par une ***presse*** indéformable en contact avec sa base supérieure qui descend à la vitesse v uniforme. Le plan inférieur de cette presse est donc défini par $\underline{z = h(t) = H - vt}$.
Ces deux plans sont lubrifiés ce qui permet au lopin de glisser sur eux. En conséquence le lopin reste de forme cylindrique, et occupe à l'instant $t \in [0,t_1]$, avec $t_1 < H/v$, le domaine

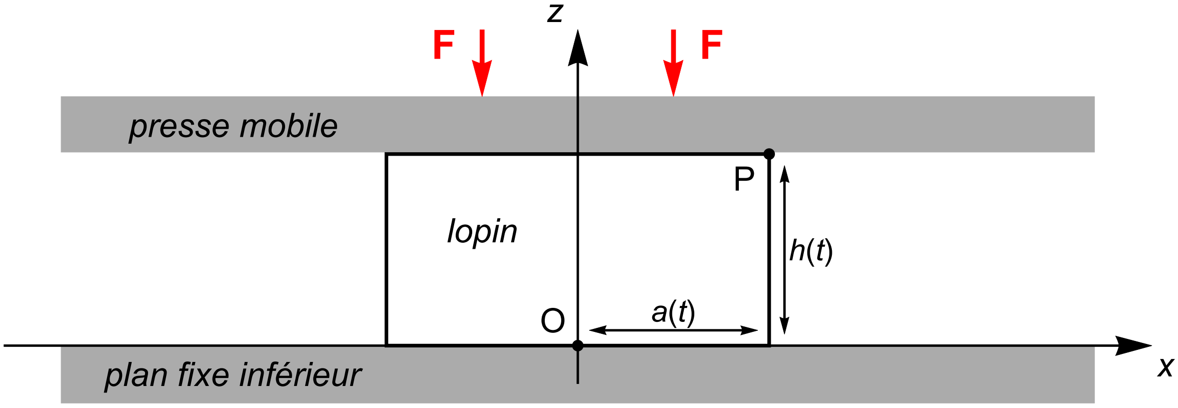
$$D_t = \{ \ \overline{\mathbf{x}} = r\overline{\mathbf{e}}_r + z\overline{\mathbf{e}}_z \quad \text{avec} \quad r \in [0,a(t)[\ ,\ \theta \in [0,2\pi[\ ,\ z \in]0,h(t)[\ \} \ .$$

On admet que le lopin se déforme de façon plastique donc ***isovolume*** ou ***incompressible***.

1 En écrivant la conservation du volume global, déterminez le rayon du lopin à l'instant t, $a(t)$. Commentez succinctement.

NOM prénom :   **Gpe de TD :**

Schéma de principe d'une configuration du système étudié - coupe dans le plan $x\mathrm{O}z$



2 En ***description eulerienne***, on admet que le ***champ de vitesse*** du lopin est de la forme

$$\overline{\mathbf{v}} \;=\; \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}},t) \;=\; \alpha r\,\overline{\mathbf{e}}_r \;+\; \beta z\,\overline{\mathbf{e}}_z$$

avec $\alpha = \alpha(t)$ et $\beta = \beta(t)$ fonctions du temps seulement. En identifiant la vitesse du point extrême P situé à $t = 0$ en $\overline{\mathbf{X}} = A\overline{\mathbf{e}}_x + H\overline{\mathbf{e}}_z$ et à $t \in [0,t_1]$ en $\overline{\mathbf{x}} = a(t)\overline{\mathbf{e}}_x + h(t)\overline{\mathbf{e}}_z$, calculez $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.

3 Vérifiez le ***caractère isovolume du mouvement localement*** autour de tout point matériel.

NOM prénom : **Gpe de TD :**

4 Par symétrie de révolution, comme le champ de vitesse n'a pas de composante azimutale, on se restreint dorénavant à une étude dans le plan $x\mathrm{O}z$ en coordonnées cartésiennes. Le champ de vitesse est donc

$$\overline{\mathbf{v}} \;=\; \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}},t) \;=\; \alpha(t)x\;\overline{\mathbf{e}}_x \;+\; \beta(t)z\;\overline{\mathbf{e}}_z$$

avec $\{\overline{\mathbf{e}}_x,\overline{\mathbf{e}}_z\}$ les deux vecteurs de la base canonique du plan. Afin de passer en ***description lagrangienne***, calculez les ***trajectoires*** $\overline{\mathbf{x}}(t) = x(t)\overline{\mathbf{e}}_x + z(t)\overline{\mathbf{e}}_z$ solutions de l'équation différentielle

$$d\overline{\mathbf{x}}(t) \;=\; \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}(t),t)\;dt \tag{4}$$

munie de la condition initiale

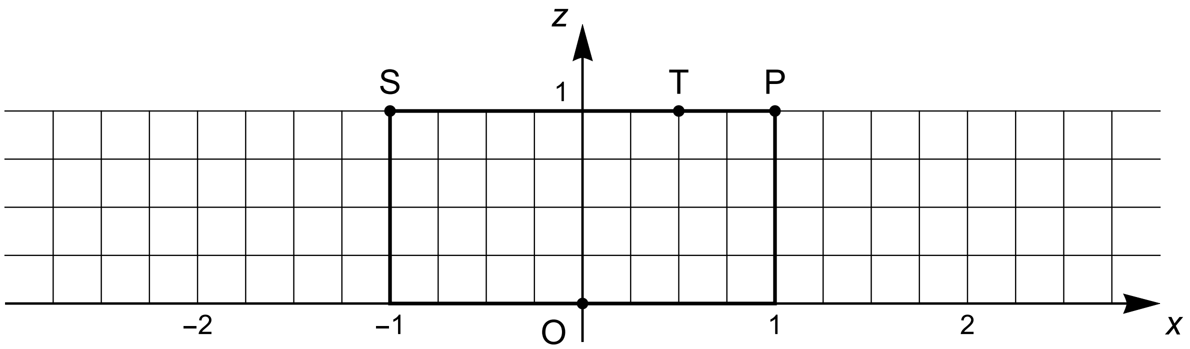
$$\overline{\mathbf{x}}(0) \;=\; \overline{\mathbf{X}} \;=\; X\overline{\mathbf{e}}_x + Z\overline{\mathbf{e}}_z\;. \tag{5}$$

Vérifiez la cohérence du résultat en considérant le cas d'un point particulier.

5 Montrez que, en dehors de la trajectoire centrale correspondant à un segment de l'axe $\mathrm{O}z$, toutes les autres trajectoires dans le plan $x\mathrm{O}z$ sont décrites par une relation de la forme $z = C\;f(x)$.

NOM prénom : Gpe de TD :

6 Dorénavant on suppose que le rayon et la hauteur initiale du lopin sont égaux, $\underline{A = H}$. Complétez la ***figure en coupe*** dans le plan $x\mathrm{O}z$, ci-dessous, qui représente par sa frontière la configuration initiale avec une échelle telle que H correspond à une longueur 1, en y rajoutant la configuration à un instant t_1 tel que $h(t_1) = H/4$. Vous représenterez cette configuration finale par la coupe de sa frontière dans le plan $x\mathrm{O}z$, et par les positions finales des points P, T, S. Vous représenterez aussi les trajectoires de ces points, enfin, leurs vecteurs déplacements.



7 Calculez le ***champ de déplacement*** $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}}(\overline{\mathbf{X}},t)$ pour t quelconque dans $[0,t_1]$.

8 On considère que l'on est en ***petits déplacements*** tant que $\max |u_z| \leq H/100$ et $\max |u_x| \leq H/100$. En étudiant ces deux critères, dans cet ordre, déterminez analytiquement la borne supérieure de l'***intervalle de temps*** $[0,t_p]$ pendant lequel cette hypothèse est vérifiée. Commentez succinctement.

NOM prénom :   **Gpe de TD :**

9 Dorénavant on se place dans cet intervalle de temps : $t \in [0,t_p]$.
Établissez l'expression de $\overline{\mathbf{u}}$ à l'ordre 1 en vt/H.

10 Établissez l'expression intrinsèque de $\overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\overline{\mathbf{u}}$. Est-on alors en ***petite*** ou ***grande transformation*** ?

11 Établissez les expressions intrinsèques des ***parties symétrique*** $\overline{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}$ et ***antisymétrique*** $\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}}$ de $\overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\overline{\mathbf{u}}$.
Commentez succinctement.