

	Q	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q	P	Total
Points élève :	0		1		2		3		4		5		6		
Barème par question :	0	1,5	1	1	2	4	3	1,5	4	2,5	5	2,5	6	8,5	21,5

NOM prénom :

Gpe de TD :

Vous rendrez les 4 pages de ce sujet - copie à la fin, toujours agrafées. Prenez le temps d'utiliser un brouillon et *récrivez succinctement pour expliquer vos démarches et calculs*. On attend donc quelques explications en français dans chaque cadre entouré par des lignes épaisses.

Formulaire

$$\text{Divergence d'un tenseur d'ordre quelconque : } \mathbf{div} \mathbf{T} = \nabla \mathbf{T} : \bar{\mathbf{I}} . \quad (1)$$

$$\text{Divergence d'un produit scalaire - tenseur : } \overline{\mathbf{div}}(p \bar{\mathbf{T}}) = p \overline{\mathbf{div}} \bar{\mathbf{T}} + \bar{\mathbf{T}} \cdot \nabla p . \quad (2)$$

$$\text{Double produit vectoriel : } \bar{\mathbf{a}} \wedge (\bar{\mathbf{b}} \wedge \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{c}}) \bar{\mathbf{b}} - (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}) \bar{\mathbf{c}} . \quad (3)$$

Accélération d'entraînement d'un référentiel en rotation dans un autre, autour d'un point fixe O :

$$\bar{\gamma}_e(\mathbf{M}) = \dot{\bar{\omega}} \wedge \overline{\mathbf{OM}} + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{\mathbf{OM}}) . \quad (4)$$

Accélération de Coriolis pour un mouvement dans un référentiel en rotation dans un autre :

$$\bar{\gamma}_c(\mathbf{M}) = 2\bar{\omega} \wedge \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{M}) . \quad (5)$$

Question préliminaire : Divergence d'un tenseur des contraintes de pression

0 On considère un fluide parfait, dans lequel le tenseur des contraintes correspond à des forces seulement normales, i.e., des forces de pression,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -p \bar{\mathbf{I}} \quad (6)$$

avec p le champ de pression scalaire. À l'aide d'un calcul tensoriel intrinsèque, calculez le terme de force effective volumique dans l'équation de la quantité de mouvement sous forme locale, i.e. $\overline{\mathbf{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}$.

$$\overline{\mathbf{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \quad (7)$$

Exercice : Étude d'écoulements atmosphériques - Modèle du vent géostrophique

On s'intéresse à des écoulements d'air atmosphérique sur des échelles régionales $\simeq 100$ km. Comme représenté sur la figure 1 p. 3, on travaille au voisinage d'un point M, situé à la surface de la Terre, à une latitude ϕ . Le référentiel lié à M ou « référentiel terrestre » est en rotation diurne dans le référentiel géocentrique lié au centre O de la Terre, et d'axes fixes par rapport à des étoiles lointaines.

1 Rappelez la valeur de la fréquence angulaire de rotation diurne de la Terre, et évaluez-la numériquement en rad/s :

$$\omega = \text{---} =$$

(8)

2 Le référentiel terrestre, en rotation autour d'un axe sud-nord OZ [figure 1], que l'on peut considérer fixe, a donc un vecteur rotation dans le référentiel géocentrique

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_Z . \quad (9)$$

Dans ce référentiel terrestre, le mouvement de l'air est affecté par des forces d'inertie : dans l'équation d'évolution de la quantité de mouvement sous forme locale on doit remplacer l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ par

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{\gamma}_e(M) - \vec{\gamma}_c(M) .$$

Simplifiez par un calcul l'expression de $\vec{\gamma}_e(M)$ ici, en utilisant le repère OXYZ de la figure 1.

$$\vec{\gamma}_e(M) =$$

Déduisez-en un adjectif décrivant l'effet physique de la force associée :

$$-d^3m \vec{\gamma}_e(M) = \text{force d'inertie} .$$

Vérifiez que l'on peut négliger $\vec{\gamma}_e(M)$ devant $\vec{g}$ en calculant précisément la valeur maximale du rapport des normes. En quels points du globe cette valeur maximale est-elle atteinte ?

$$\frac{||\vec{\gamma}_e(M)||}{||\vec{g}||} =$$

En conséquence, on retient pour la suite que

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{\gamma}_c(M) . \quad (10)$$

3 Aux échelles qui nous intéressent, l'air atmosphérique peut en première approximation être considéré comme un fluide parfait en écoulement faiblement accéléré. Dans le repère et référentiel $Mxyz$ décrit figure 1, l'équation d'évolution de la quantité de mouvement sous forme locale s'écrit donc

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} \simeq \bar{\mathbf{0}} = \rho \bar{\mathbf{g}}' + \bar{\mathbf{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (11)$$

avec ρ la masse volumique, $\bar{\mathbf{v}}$ la vitesse, un tenseur des contraintes correspondant à des forces seulement normales, i.e., des forces de pression, $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -p\bar{\mathbf{1}}$. Simplifiez l'équation (11) pour montrer l'existence d'un « équilibre dynamique » couplant ρ , p et $\bar{\mathbf{v}}$, faisant aussi intervenir $\bar{\mathbf{g}}$ et $\bar{\boldsymbol{\omega}}$:

$$\bar{\mathbf{0}} = \quad (12)$$

4 On admet que l'écoulement de l'air est essentiellement horizontal, i.e.

$$\bar{\mathbf{v}} \simeq \bar{\mathbf{v}}_h = v_x \bar{\mathbf{e}}_x + v_y \bar{\mathbf{e}}_y \quad \text{dans le repère } Mxyz \text{ décrit figure 1.} \quad (13)$$

En prenant le produit vectoriel de l'équation d'équilibre (12) avec le vecteur vertical $\bar{\mathbf{e}}_z$, montrez que le champ $\bar{\mathbf{v}}_h$ est contrôlé par la pression p , suivant l'expression dite du « *vent géostrophique* »

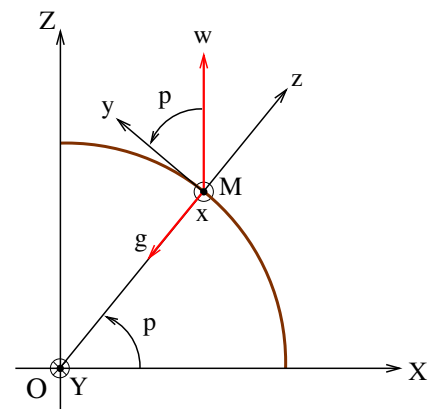
$$\bar{\mathbf{v}}_h = \frac{1}{\rho f} \bar{\mathbf{e}}_z \wedge \bar{\nabla} p, \quad (14)$$

où f est le paramètre de Coriolis, que vous calculerez analytiquement, puis, numériquement, à nos latitudes.

$$\bar{\mathbf{e}}_z \wedge (12) \iff$$

$$f =$$

Fig. 1 - Schéma du système terrestre étudié. Le point O est le centre de la Terre. Le repère cartésien $OXYZ$ est lié au référentiel terrestre, l'axe OZ pointe du sud vers le nord. On s'intéresse à des écoulements au voisinage d'un point M situé à la surface de la Terre, approximativement, une sphère de rayon $R = 6400$ km. Ce point est repéré par sa latitude ϕ . Le repère cartésien $Mxyz$ est aussi lié au référentiel terrestre. L'axe Mz est vertical, i.e., l'accélération de la pesanteur, au voisinage de M, $\bar{\mathbf{g}} = -g\bar{\mathbf{e}}_z$, l'axe My pointe vers le nord, l'axe Mx vers l'est. Le vecteur rotation $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique est représenté.

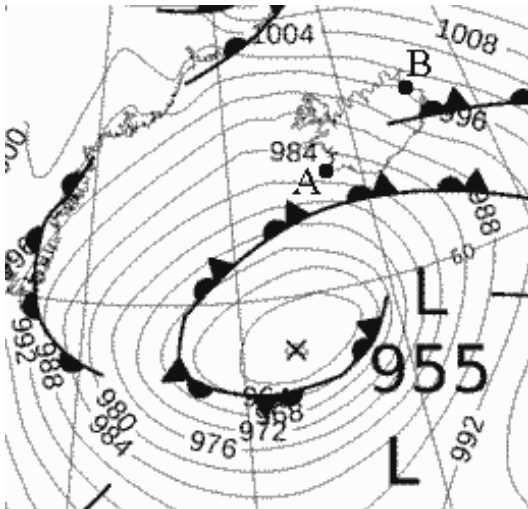


NOM prénom :

Gpe de TD :

5 On s'intéresse à une carte météorologique [figure 2] représentant un champ de pression via ses isobares, les lignes d'isovaleurs de la pression. Justifiez qu'elles sont aussi les lignes de courant du vent géostrophique.

6 On effectue ci-dessous un zoom sur la dépression au sud de l'Islande. Esquissez par quelques flèches de couleurs différentes les champs ∇p et $\bar{\mathbf{v}}_h$ associés. Plus précisément, sachant que le « diamètre » de l'Islande, segment AB, est $\simeq 450$ km, estimez par des mesures sur carte et un calcul détaillé le gradient de pression puis la vitesse du vent au niveau de A. On prendra $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$. Commentez brièvement.



$$\Rightarrow \|\bar{\mathbf{v}}_h\| \simeq$$

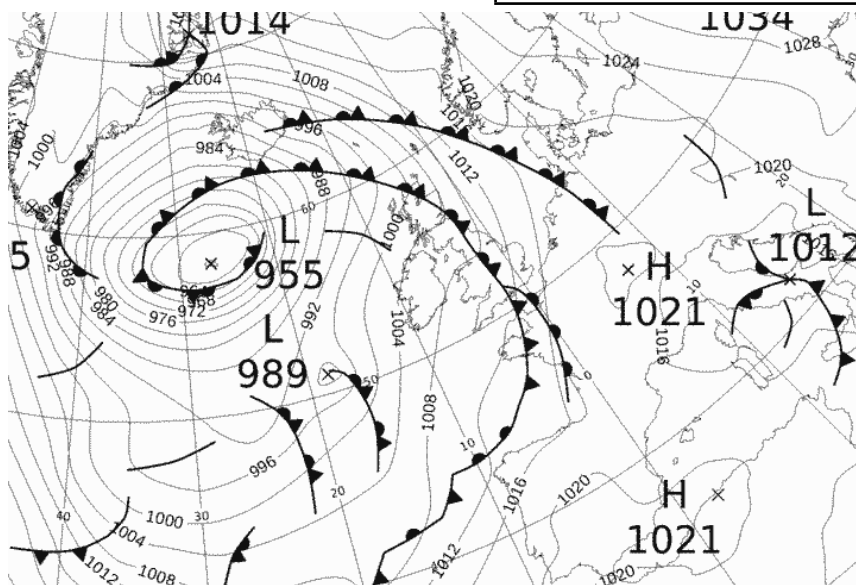


Fig. 2 - Champ de pression « au niveau de la mer » résultant d'une « analyse » (synthèse entre modèles et mesures) effectuée par le service de météorologie britannique le 29 octobre 2015. Les cercles fins sont les méridiens i.e. les iso- ϕ séparés de 10° . Les courbes fines sont les isobares séparées de 4 hPa. L = 'Low', H = 'High pressure'. Les courbes épaisses représentent des « fronts » air chaud - air froid, et seront ignorées ici.