Mines Nancy - 1ère année - Test 0 de MMCSF du 7 novembre 2014 - Durée 30 minutes

Aucun document autorisé - Calculatrices autorisées

Cadres correcteur : G ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 6 ☐ ☐

Vous rendrez impérativement les 3 pages de ce sujet - copie à la fin. Veuillez ne pas dégrafer ces 3 pages.

NOM prénom : ☐ **Gpe de TD :** ☐

Formulaire :

Double produit vectoriel :

$$\overline{\mathbf{a}} \wedge (\overline{\mathbf{b}} \wedge \overline{\mathbf{c}}) \;=\; (\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{c}})\overline{\mathbf{b}} \;-\; (\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}})\overline{\mathbf{c}} \;. \tag{1}$$

Lien entre tenseur d'ordre 2 application bilinéaire et application linéaire :

$$\overline{\overline{\mathbf{L}}} \;:\; (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}') \;\longmapsto\; \overline{\overline{\mathbf{L}}}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}') \;=\; \overline{\mathbf{x}} \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{L}}} \cdot \overline{\mathbf{x}}'\right) \;. \tag{2}$$

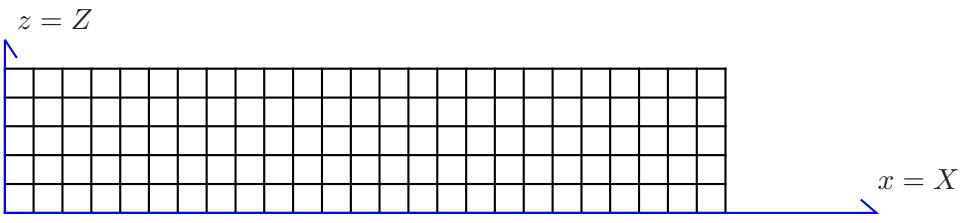
Tenseur de déformation :

$$\overline{\overline{\mathbf{e}}} \;:\; (d\overline{\mathbf{X}},d\overline{\mathbf{X}}') \;\longmapsto\; \overline{\overline{\mathbf{e}}}(d\overline{\mathbf{X}},d\overline{\mathbf{X}}') \;=\; \frac{1}{2}\left(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}' - d\overline{\mathbf{X}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}'\right) \;. \tag{3}$$

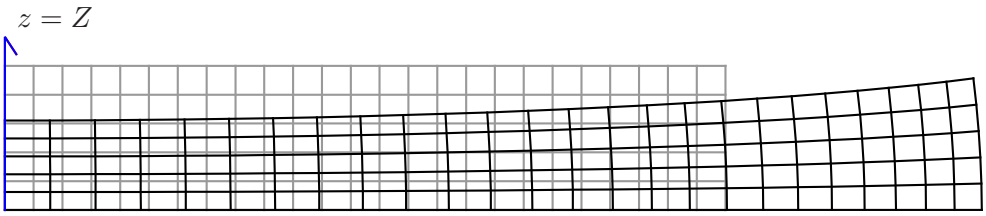
Exercice : *Étude cinématique d'un disque mis en rotation rapide*

Un disque d'un matériau solide homogène est mis progressivement en rotation rapide autour d'un axe Oz vertical. La pesanteur ne joue aucun rôle. Le disque est lié près de son centre à un arbre « moteur », mais on oublie ici la liaison à cet axe, comme s'il n'avait d'autre influence que celle de la mise en rotation. Le repère OXYZ est fixe, lié au laboratoire ; le repère Oxyz est tournant, lié à l'axe ; entre les deux référentiels associés le vecteur vitesse de rotation instantanée $\overline{\boldsymbol{\omega}} = \omega\overline{\mathbf{e}}_z$. On représente sur les figures ci-dessous le quart d'une section du disque dans un plan xOz, avec un quadrillage régulier attaché à la matière du disque. Sur la figure a, on représente la configuration de référence de l'étude, à vitesse de rotation nulle. Sur la figure b, on représente cette configuration en gris, et en noir la configuration actuelle d'intérêt, à vitesse de rotation élevée. La configuration actuelle choisie est telle que la section d'intérêt se retrouve dans son plan initial, i.e. à l'instant t_a considéré OXYZ et Oxyz coïncident.

(a)



(b)



1 Quel type de description du mouvement est adoptée implicitement, lorsque l'on suit ce quadrillage ?

Description

.

NOM prénom : | **Gpe de TD :**

---

2 En supposant que sa vitesse de rotation instantanée, $\omega(t)$, croît lentement de 0 à sa valeur actuelle, $\omega_a = \omega(t_a)$, on peut approximer l'accélération d'entrainement du repère Oxyz par

$$\overline{\boldsymbol{\gamma}}_e(\overline{\mathbf{x}}) \;=\; \overline{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\overline{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overline{\mathbf{x}}) \;.$$

En notant ρ la masse volumique du solide, établissez par un calcul une expression simple, dans le repère cartésien tournant Oxyz, de la force volumique d'inertie d'entrainement correspondante

$\bar{\mathbf{f}}_e(\overline{\mathbf{x}}) \;=$

Déduisez-en un adjectif décrivant l'effet physique de cette force : $\bar{\mathbf{f}}_e \;=$ force d'inertie .
Faites le lien avec la figure b :

3 Décrivez en une phrase (ci-dessous) la trajectoire dans le repère fixe OXYZ du point A le plus éloigné de l'axe Oz dans la configuration actuelle, dans tout le mouvement qui l'amène de sa position initiale A_0 à sa position actuelle A. Représentez ces deux points sur les figures a et b. Représentez ci-dessous, sur un dessin, l'allure de cette trajectoire dans le plan XOY, en positionnant ses points de départ A_0 et d'arrivée A.

4 Directement sur la figure b, représentez[1] 6 vecteurs déplacements entre la configuration de référence et actuelle, pour des points de la surface libre supérieure du disque les plus espacés possibles dans la configuration de référence.

1. Au crayon de papier au moins au début, vous n'avez droit qu'à un sujet et un seul...

NOM prénom : | **Gpe de TD :**

5 Soit $d\overline{\mathbf{X}}$ un petit segment de matière dans la configuration initiale, orienté dans la direction x, $d\overline{\mathbf{x}}$ ce segment transporté dans la configuration actuelle. En notant dX et dx les longueurs de ces segments, et en repartant de la définition intrinsèque du tenseur de déformation de Green-Lagrange, établissez une formule analytique permettant d'évaluer sa composante e_{xx} à partir de dX et dx.

6 Dans ce qui suit, on raisonne comme si le problème était 2D dans le plan $x\mathrm{O}z$ (en fait $x = r$).

6.a D'après les figures, dans quelle région du disque e_{xx} est-elle maximale ?

6.b À partir de mesures faites à la règle sur les figures, déterminez une valeur numérique approximative de $\max e_{xx}$.

6.c Au vu du résultat précédent, est-on en petite transformation ?