

# *Mécanique des milieux continus* *solides et fluides*

par *Emmanuel Plaut* à Mines Nancy

Version du 3 décembre 2022

Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Modèle du milieu continu - Cinématique élémentaire</b>	<b>13</b>
1.1 Modèle du milieu continu solide ou fluide . . . . .	14
1.1.1 Quels milieux c'est-à-dire : quelle matière et quelles échelles ? . . . . .	14
1.1.2 La perception continue résulte d'une prise de moyenne . . . . .	18
1.1.3 Phénomènes de diffusion de la matière . . . . .	19
1.2 Cinématique élémentaire . . . . .	20
1.2.1 Description eulerienne du mouvement . . . . .	20
1.2.2 Description lagrangienne du mouvement . . . . .	21
1.2.3 Liens entre ces deux descriptions - Trajectoires . . . . .	22
1.2.4 Lignes de courant . . . . .	23
1.2.5 Lignes d'émission . . . . .	23
1.2.6 Cas d'un mouvement stationnaire ou permanent . . . . .	24
1.2.7 Dérivée particulaire d'un champ scalaire . . . . .	24
1.3 Problèmes . . . . .	25
Pb. 1.1 : Étude de l'écoulement potentiel autour d'un mobile cylindrique . . . . .	25
Pb. 1.2 : Étude d'un problème d'advection-diffusion . . . . .	26
1.4 Notes personnelles . . . . .	28
<b>2 Cinématique avancée : étude des déformations</b>	<b>31</b>
2.1 Étude lagrangienne des déformations . . . . .	31
2.1.1 Transport lagrangien d'un petit segment : tenseur gradient de la transformation . . . . .	31
2.1.2 Transport lagrangien d'un petit volume : jacobien de la transformation . . . . .	32
2.1.3 Transport lagrangien d'un produit scalaire : tenseur des dilatations de Cauchy . . . . .	34
2.1.4 Variation lagrangienne d'un produit scalaire : tenseur des déformations de Green-Lagrange . . . . .	36
2.1.5 Mouvements de solide indéformable : approche par étude directe . . . . .	36
2.1.6 Champ de déplacements - Hypothèse de petite transformation . . . . .	37

2.1.7	Petites déformations - Tenseur des déformations linéarisé . . . . .	39
2.1.8	Déplacements d'un solide indéformable . . . . .	40
2.1.9	Décomposition locale d'un champ de déplacements général . . . . .	41
2.2	Étude eulerienne des déformations . . . . .	42
2.2.1	Transport d'un petit segment : tenseur gradient de vitesse . . . . .	42
2.2.2	Transport d'un champ de vecteurs : dérivée particulaire . . . . .	43
2.2.3	Transport d'un petit volume : divergence de la vitesse . . . . .	43
2.2.4	Transport d'un produit scalaire : tenseur des taux de déformation . . . . .	44
2.2.5	Champs de vitesse d'un solide indéformable . . . . .	45
2.2.6	Décomposition locale d'un champ de vitesse général . . . . .	46
2.3	Liens entre les études lagrangiennes et euleriennes . . . . .	46
2.3.1	Transport de petits vecteurs . . . . .	46
2.3.2	Transport de petits volumes . . . . .	46
2.3.3	Transport de produits scalaires . . . . .	47
2.4	Exercices et problème . . . . .	47
	Ex. 2.1 : Interprétation des composantes du tenseur des dilatations de Cauchy . . . . .	47
	Ex. 2.2 : Interprétation des vecteurs propres du tenseur des dilatations de Cauchy . . . . .	48
	Pb. 2.1 : Étude d'un mouvement de cisaillement pur . . . . .	48
2.5	Notes personnelles . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Bilans de masse et de quantité de mouvement - Contraintes</b>	<b>51</b>
3.1	Transport de quantités intégrées sur un volume . . . . .	51
3.1.1	Formules globales impliquant une densité volumique . . . . .	51
3.1.2	Transport de masse : conservation de la masse . . . . .	53
3.1.3	Formule globale impliquant une densité massique . . . . .	54
3.1.4	Transport de quantité de mouvement . . . . .	55
3.2	Description des efforts intérieurs - Tenseur des contraintes . . . . .	56
3.2.1	Première version de la loi d'évolution de la quantité de mouvement - Définition du vecteur contrainte . . . . .	56
3.2.2	Imparité du vecteur contrainte vis-à-vis de $\bar{\mathbf{n}}$ . . . . .	57
3.2.3	Tétraèdre de Cauchy - Linéarité du vecteur contrainte vis-à-vis de $\bar{\mathbf{n}}$ . . . . .	58
3.2.4	Tenseur des contraintes de Cauchy . . . . .	60
3.2.5	Loi locale d'évolution de la quantité de mouvement . . . . .	60
3.2.6	Rappels de dynamique : moment cinétique et couple . . . . .	61
3.2.7	Loi d'évolution du moment cinétique - Symétrie du tenseur des contraintes . . . . .	62
3.2.8	Diagonalisation du tenseur des contraintes - Représentation de Mohr . . . . .	63
3.2.9	Applications : contrainte tangentielle maximale - critère de Tresca . . . . .	66
3.3	Exercices . . . . .	67
	Ex. 3.1 : Représentation de Mohr d'un état de contraintes planes . . . . .	67
	Ex. 3.2 : Retour sur le mouvement de cisaillement pur : étude des contraintes . . . . .	68
3.4	Notes personnelles . . . . .	68

<b>4 Solides élastiques</b>	<b>71</b>
4.1 Loi de comportement élastique linéaire isotrope . . . . .	72
4.1.1 Mise en évidence par une expérience de traction . . . . .	72
4.1.2 Approche par essais-erreurs basée sur l'étude de la traction pure . . . . .	74
4.1.3 Écriture de la loi contraintes $\rightarrow$ déformations . . . . .	77
4.1.4 Ce que nous apprend le cas du cisaillement pur . . . . .	78
4.1.5 Écriture de la loi déformations $\rightarrow$ contraintes . . . . .	78
4.1.6 Et la masse volumique dans tout cela? . . . . .	79
4.1.7 Ce que nous apprend le cas d'une compression pure . . . . .	79
4.2 Problèmes d'élasticité linéarisé : généralités . . . . .	80
4.2.1 Conditions limites régulières . . . . .	80
4.2.2 Linéarité : principe de superposition . . . . .	81
4.2.3 Conditions limites globales - Principe de Saint Venant . . . . .	81
4.2.4 Solutions analytiques (+ ou - exactes) ou numériques? . . . . .	82
4.3 Méthode des déplacements - Équation de Navier . . . . .	82
4.4 Méthode des contraintes . . . . .	83
4.5 Ouverture : tenseur des coefficients élastiques - cas de matériaux anisotropes . . . . .	85
4.6 Problèmes . . . . .	85
Pb. 4.1 : Étude d'un barreau parallélépipédique en flexion pure . . . . .	86
Pb. 4.2 : Étude de contacts rectilignes avec forces de compression . . . . .	88
Pb. 4.3 : Étude d'un système d'accouplement élastique . . . . .	91
Pb. 4.4 : Dimensionnement d'un tuyau contenant un fluide sous pression . . . . .	94
Pb. 4.5 : Étude et dimensionnement de coques sous pression pour un sous-marin . . . . .	96
Pb. 4.6 : Équilibre d'un disque en rotation rapide . . . . .	98
Pb. 4.7 : Poutres cylindriques fragiles sollicitées en traction-torsion . . . . .	102
Pb. 4.8 : Ondes propagatives dans un solide élastique . . . . .	105
4.7 Notes personnelles . . . . .	107
<b>5 Analyse dimensionnelle appliquée à la mécanique des solides</b>	<b>109</b>
5.1 Principes de l'analyse dimensionnelle . . . . .	109
5.1.1 Dimensions physiques . . . . .	109
5.1.2 Mesure des grandeurs physiques - Systèmes d'unités . . . . .	110
5.1.3 Nécessaire « homogénéité dimensionnelle » d'une équation physique . . . . .	111
5.1.4 Retour sur le choix d'un système d'unités - Privilégier l'international! . . . . .	112
5.1.5 Théorème $\pi$ de Vaschy-Buckingham . . . . .	114
5.2 Application : modélisation d'un problème d'impact élastique . . . . .	117
5.2.1 Mise en place du modèle : recensement des grandeurs physiques . . . . .	117
5.2.2 Commentaire général . . . . .	118
5.2.3 Étude et réduction des paramètres de contrôle . . . . .	118
5.2.4 Conséquence : propriétés de <i>similitude</i> . . . . .	119
5.2.5 Vérification à l'aide d'expériences numériques - Courbe maîtresse . . . . .	120
5.3 Application : étude du flambement d'une poutre cylindrique . . . . .	121
5.3.1 Mise en place du modèle : recensement des grandeurs physiques . . . . .	121

5.3.2	Étude et réduction des paramètres de contrôle	122
5.3.3	Conséquence : propriétés de <i>similitude</i>	122
5.3.4	Obtention d'une loi de seuil de flambement	122
5.3.5	Compléments	123
5.4	Problème	124
	Pb. 5.1 : Étude de poutres en flexion plane - Modèle d'Euler - Bernoulli	124
5.5	Notes personnelles	128
<b>6</b>	<b>Bilan d'énergie cinétique - Cas des solides élastiques</b>	<b>129</b>
6.1	Bilan global d'énergie cinétique	129
6.2	Cas d'un milieu continu solide	131
6.2.1	Bilan d'énergie cinétique en petits déplacements et petite transformation	131
6.2.2	Cas d'un solide isotrope élastique en régime linéaire	132
6.2.3	Remarques de conclusion	133
6.3	Problèmes	133
	Pb. 6.1 : Étude d'un lopin cylindrique en compression dans un conteneur rigide	134
	Pb. 6.2 : Thermoélasticité - Application à un tuyau sous pression et chargement thermique	136
6.4	Notes personnelles	139
<b>7</b>	<b>Fluides newtoniens</b>	<b>141</b>
7.1	Bilans de masse et de quantité de mouvement	141
7.1.1	Retour sur la formule de transport d'une quantité extensive	141
7.1.2	Transport de masse : notions de débits - incompressibilité	143
7.1.3	Transport de quantité de mouvement	144
7.2	Loi de comportement des fluides newtoniens incompressibles	145
7.2.1	Établissement à partir de faits expérimentaux	145
7.2.2	Limitations du modèle : effets de compressibilité - effets non newtoniens	148
7.3	Équation de Navier-Stokes - Premières propriétés	150
7.3.1	Première forme de l'équation de Navier-Stokes	150
7.3.2	Conditions limites	151
7.3.3	Forme faisant apparaître la pression motrice	151
7.3.4	Application : loi de l'hydrostatique	152
7.3.5	Réécritures possibles du terme non linéaire - Vorticité	152
7.4	Modèle du fluide parfait	153
7.4.1	Le fluide parfait : modèle général pour l'hydrostatique, très simplifié pour l'hydrodynamique	153
7.4.2	Équation d'Euler	153
7.4.3	Conditions limites	153
7.4.4	Premier théorème de Bernoulli	154
7.4.5	Dynamique de la vorticité	155
7.4.6	Écoulements irrotationnels et potentiels	155
7.4.7	Second théorème de Bernoulli	156
7.5	Propriétés des écoulements de fluides newtoniens	156

7.5.1	Écoulements « linéaires » ou non, laminaires ou turbulents . . . . .	156
7.5.2	Bilan d'énergie cinétique général - Dissipation visqueuse . . . . .	158
7.5.3	Bilan d'énergie cinétique dans un écoulement ouvert : pertes et gains de charge . . . . .	160
7.6	Remarques de conclusion . . . . .	165
7.7	Exercices et problèmes . . . . .	165
Ex. 7.1	: Bilan de force général en hydro- ou aérostatique . . . . .	165
Ex. 7.2	: Calcul très simplifié de l'altitude atteinte par un ballon d'hélium lesté . . . . .	166
Ex. 7.3	: Hydrostatique : étude de deux manomètres différentiels . . . . .	166
Ex. 7.4	: Étude de l'écoulement laminaire dans un tuyau . . . . .	167
Pb. 7.1	: Étude et calcul d'écoulements en tuyau par méthode semi-globale . . . . .	168
Ex. 7.5	: Équilibre d'un liquide en rotation autour d'un axe vertical . . . . .	169
Ex. 7.6	: Étude de l'établissement d'un écoulement de Couette plan . . . . .	170
Pb. 7.2	: Étude d'un rhéomètre de Couette cylindrique . . . . .	170
Pb. 7.3	: Bilans de force et de charge pour les pompiers . . . . .	171
Pb. 7.4	: Lévitiation d'une voiture par réaction de jets d'eau . . . . .	173
Pb. 7.5	: Étude de la vidange d'un réservoir par un tuyau . . . . .	175
Pb. 7.6	: Station de Transfert d'Énergie par Pompage . . . . .	178
7.8	Notes personnelles . . . . .	181
<b>8</b>	<b>Analyse dimensionnelle appliquée à la mécanique des fluides</b>	<b>183</b>
8.1	Étude de l'écoulement autour d'un cylindre . . . . .	183
8.1.1	Mise en place du modèle : recensement des grandeurs physiques . . . . .	183
8.1.2	Commentaire général . . . . .	184
8.1.3	Étude et réduction des paramètres de contrôle . . . . .	184
8.1.4	Première conséquence : propriétés de <i>similitudes</i> de cet écoulement . . . . .	185
8.1.5	Application du théorème $\pi$ : règles de similitude pour la traînée . . . . .	185
8.2	Étude de l'écoulement dans un tuyau . . . . .	187
8.2.1	Mise en place du modèle : recensement des grandeurs physiques . . . . .	188
8.2.2	Étude et réduction des paramètres de contrôle - Régimes d'écoulement . . . . .	189
8.2.3	Application du théorème $\pi$ : règles de similitude pour les pertes de charge . . . . .	190
8.2.4	Coefficient de pertes de charge - Cas laminaire et turbulents . . . . .	190
8.3	Conclusion : nombres adimensionnels en mécanique des fluides . . . . .	192
8.4	Exercices et problèmes . . . . .	194
Ex. 8.1	: Perte de charge régulière dans un tuyau de pompier . . . . .	194
Ex. 8.2	: Étude par analyse dimensionnelle d'un déversoir triangulaire . . . . .	194
Ex. 8.3	: Similitude pour l'étude des performances d'une hélice d'avion . . . . .	195
Ex. 8.4	: Similitude de lâchers de vortex de Bénard-Von-Karman . . . . .	196
Pb. 8.1	: Éoliennes à axe horizontal : analyse dimensionnelle et modèle de Betz . . . . .	197
Pb. 8.2	: Étude d'une pale d'éolienne bloquée soumise à un vent fort . . . . .	202
8.5	Notes personnelles . . . . .	206

<b>A Fondements de la cinématique</b>	<b>209</b>
A.1 Mouvements de solide indéformable : approche par étude des déformations . . . . .	209
A.1.1 Établissement de la forme « champ de moments » du champ de vitesse . . . . .	210
A.1.2 Interprétation du vecteur vitesse de rotation instantanée . . . . .	212
A.2 Composition des mouvements par changement de référentiel . . . . .	213
A.2.1 Référentiels . . . . .	213
A.2.2 Composition des dérivées temporelles de vecteurs . . . . .	214
A.2.3 Composition des vitesses . . . . .	215
A.2.4 Universalité de la notion de solide indéformable . . . . .	215
A.2.5 Composition des accélérations . . . . .	216
A.2.6 Référentiels galiléens ou non - Forces d'inertie . . . . .	216
Ex. A.1 : Force d'inertie d'entraînement associée à un référentiel tournant . . . . .	217
Ex. A.2 : Étude d'écoulements atmosphériques - Modèle du vent géostrophique . . . . .	217
<b>B Pédagogie : de l'art de rédiger</b>	<b>221</b>
<b>C Éléments sur la photoélasticité</b>	<b>223</b>
C.1 Généralités . . . . .	223
C.2 Rappels d'optique - Biréfringence . . . . .	224
C.3 Biréfringence accidentelle . . . . .	226
<b>D Éléments de correction des exercices et problèmes - Compléments</b>	<b>229</b>
D.1 Corrigés du chapitre 1 - Cinématique élémentaire . . . . .	229
Pb. : Étude de l'écoulement potentiel autour d'un mobile cylindrique . . . . .	229
Pb. : Étude d'un problème d'advection-diffusion . . . . .	229
D.2 Corrigés du chapitre 2 - Cinématique avancée . . . . .	230
Ex. : Interprétation des composantes du tenseur des dilatations de Cauchy . . . . .	230
Ex. : Interprétation des vecteurs propres du tenseur des dilatations de Cauchy . . . . .	230
Pb. : Étude d'un mouvement de cisaillement pur . . . . .	230
D.3 Corrigés du chapitre 3 - Bilans et contraintes . . . . .	231
Ex. : Représentation de Mohr d'un état de contraintes planes . . . . .	231
Ex. : Retour sur le mouvement de cisaillement pur : calcul des contraintes . . . . .	231
D.4 Corrigés du chapitre 4 - Solides élastiques . . . . .	232
Pb. : Étude d'un barreau parallélépipédique en flexion pure . . . . .	232
Pb. : Étude de contacts rectilignes avec forces de compression . . . . .	233
Pb. : Étude d'un système d'accouplement élastique . . . . .	236
Pb. : Dimensionnement d'un tuyau contenant un fluide sous pression . . . . .	240
Pb. : Étude et dimensionnement de coques sous pression pour un sous-marin . . . . .	243
Pb. : Équilibre d'un disque en rotation rapide . . . . .	247
Pb. : Poutres cylindriques fragiles sollicitées en traction-torsion . . . . .	251
Pb. : Ondes propagatives dans un solide élastique . . . . .	256
D.5 Corrigé du chapitre 5 - Analyse dimensionnelle appliquée aux solides . . . . .	258
Pb. : Étude de poutres en flexion plane . . . . .	258
D.6 Corrigés du chapitre 6 - Énergie cinétique . . . . .	263

---

Pb. : Étude d'un lopin cylindrique en compression dans un conteneur rigide . . . . .	263
Pb. : Thermoélasticité - Application à un tuyau sous pression et chargement thermique . . . . .	263
D.7 Corrigés du chapitre 7 - Fluides newtoniens . . . . .	266
Ex. : Bilan de force général en hydro- ou aérostatique . . . . .	266
Ex. : Calcul très simplifié de l'altitude atteinte par un ballon d'hélium lesté . . . . .	267
Ex. : Hydrostatique : étude de deux manomètres différentiels . . . . .	267
Pb. : Étude et calcul d'écoulements en tuyau par méthode semi-globale . . . . .	267
Ex. : Équilibre d'un liquide en rotation autour d'un axe vertical . . . . .	271
Ex. : Étude de l'établissement d'un écoulement de Couette plan . . . . .	271
Pb. : Étude d'un rhéomètre de Couette cylindrique . . . . .	272
Pb. : Bilans de force et de charge pour les pompes . . . . .	272
Pb. : Lévitiation d'une voiture par réaction de jets d'eau . . . . .	273
Pb. : Étude de la vidange d'un réservoir par un tuyau . . . . .	276
Pb. : Station de Transfert d'Énergie par Pompes . . . . .	277
D.8 Corrigés du chapitre 8 - Analyse dimensionnelle appliquée aux fluides . . . . .	281
Ex. : Perte de charge régulière dans un tuyau de pompe . . . . .	281
Ex. : Étude par analyse dimensionnelle d'un déversoir triangulaire . . . . .	281
Ex. : Similitude pour l'étude des performances d'une hélice d'avion . . . . .	281
Ex. : Similitude de lâchers de vortex de Bénard-Von-Karman . . . . .	282
Pb. : Éoliennes à axe horizontal : analyse dimensionnelle et modèle de Betz . . . . .	283
Pb. : Étude d'une pale d'éolienne bloquée soumise à un vent fort . . . . .	285



# Introduction

Ce document est dédié à une présentation de la *mécanique des milieux continus*<sup>1</sup> et de ses applications « directes » les plus « standard », à savoir la mécanique des *solides déformables élastiques* d'une part, et celle des *fluides parfaits* ou *newtoniens* d'autre part.

Pour ce qui est de la *physique*, voir la matière comme un « milieu continu » est le point de vue naturel d'un « observateur-modélisateur » qui considère et étudie (dans son propre « référentiel », cf. l'annexe A!) le comportement macroscopique de matériaux solides ou fluides plutôt denses et « homogènes », c'est-à-dire en « quasi-équilibre thermodynamique » à une échelle microscopique. Nous revenons sur l'*hypothèse de modélisation* « milieu continu » dans la première partie du chapitre 1. La deuxième partie du chapitre 1 est consacrée à la *cinématique* des milieux continus, et le chapitre 2 à l'étude des *déformations* des milieux continus. Dans le chapitre 3, nous introduisons les équations de la *dynamique* d'un milieu continu, et la notion très importante de *tenseur des contraintes*.

Le chapitre 4 présente la théorie des *solides élastiques*. Le chapitre 5 est dédié à l'*analyse dimensionnelle*, et ses applications à la mécanique des milieux continus solides. Dans le chapitre 6, on établit le bilan d'*énergie cinétique* dans un milieu continu général et dans un solide élastique en particulier ; on montre que ces milieux sont « *conservatifs* ». Le problème 6.2 ouvre sur la *thermoélasticité*.

Des ouvertures sur la *résistance des matériaux* sont aussi présentées dans le cas simple de la traction pure dès le début du chapitre 4. Plus avant, le critère de Tresca, introduit dès la fin du chapitre 3, est appliqué dans les problèmes 4.4, 4.5, 4.6, 5.1. Une présentation beaucoup plus complète de la résistance des matériaux, s'intéressant aussi, et cela importe, aux mécanismes physiques sous-jacents, est proposée dans les modules de 2<sup>ème</sup> année du département *Matériaux*

- *Tenue en service des matériaux* par Lucile Dezerald,
- *Physique des propriétés mécaniques* par Sébastien Allain.

Je mentionne aussi le module *électif*

- *Material forming* par Sébastien Allain,

qui explore des comportements plus complexes que le comportement élastique. Dans la même veine, et en allant encore plus avant dans l'« apprentissage par problèmes », un autre prolongement direct de la mécanique des milieux continus solides, très pertinent pour les ingénieurs, à savoir la *théorie des poutres*<sup>2</sup>, est présenté dans la « suite » des problèmes 4.1, 5.1 et 8.2, pour ce qui est de sollicitations de « flexion » ; 4.7 pour ce qui est de sollicitations de « traction-torsion ». Une présentation plus complète de la théorie des poutres est proposée dans le département *Géoingénierie*, notamment dans le cadre du module de 2<sup>ème</sup> année

- *Mécanique des structures et résistance des matériaux* par Olivier Deck.

Voyez aussi les traités [Lemaitre et al. \(2007\)](#); [Dupeux \(2009\)](#)...

Le chapitre 7 de ce présent document se focalise sur la mécanique des *fluides parfaits* et *newtoniens*. On va jusqu'au bilan d'énergie cinétique, qui permet de montrer que les fluides vis-

---

1. Le terme « mécanique » vient du grec « *mêkhanê* » : machine.

2. Plus rigoureusement, la « *théorie des poutres élancées* » ou « *théorie des milieux curvilignes* ».

queux sont des milieux « *dissipatifs* », et d'introduire la notion de *pertes de charge*. Enfin, le chapitre 8 présente des applications de l'analyse dimensionnelle à la mécanique des fluides. Notamment, les deux problèmes 8.1 et 8.2, relevant pour une part de l'analyse dimensionnelle, et étant d'autre part riches d'un point de vue physique, sont proposés et constituent un « point d'orgue » de la partie « Fluides » de ce document.

Deux modules de *mécanique des fluides*, plus avancés, sont proposés dans le département *Énergie* par Hervé Combeau et moi-même ; voyez notamment Plaut (2021b). Je mentionne aussi trois modules *électifs* proposés en 2<sup>ème</sup> année :

- *Mécanique des fluides pour l'ingénieur* par Jean-Sébastien Kroll & Mathieu Jenny,
- *Mécanique des fluides numérique* par Jean-Pierre Bellot,
- *Simulation des instruments de musique* par Jean-Sébastien Kroll et al...

Du point de vue *mathématique*, les mécaniciens ont éprouvé le besoin d'étendre l'analyse vectorielle « classique » que vous avez apprise en classes préparatoires (étude des fonctions de plusieurs variables, définition des opérateurs gradient, divergence et rotationnel, théorèmes associés) en une théorie plus vaste qu'ils désignent sous le terme « *analyse tensorielle* ». Une présentation de cette théorie est donnée dans le cours de *calcul tensoriel et différentiel* (Plaut 2021a), en « préliminaire » à ce module.

Le présent document contient plusieurs annexes. L'annexe A, sur les *fondements de la cinématique*, et l'annexe B sur l'*art de la rédaction scientifique*, figurent dans la version papier du tome 1, du fait de leur importance.

Vous devez fournir du *travail personnel* avant et après chaque séance de cet enseignement, suivant ce qui est indiqué précisément sur la *page web dynamique*

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc> .

Cette page contient la dernière version PDF complète de ce document, enrichie d'annexes supplémentaires par rapport au tome 1 papier. L'annexe C introduit la photoélasticimétrie, qui sera utilisée lors d'une *expérience d'amphi et de TD*. L'annexe D propose des éléments de correction des exercices et problèmes, ainsi que quelques compléments attachés. Enfin, la page web précise nos modalités d'évaluation et propose des annales.

La version originelle de ce document a été écrite en partenariat avec Rachid Rahouadj, professeur à l'école nationale supérieure d'électricité et de mécanique<sup>3</sup>, où il fut responsable d'un module similaire. Je le remercie pour ce partenariat, et ses dessins talentueux! Je remercie aussi Didier Bernardin<sup>4</sup>, Mathieu Jenny et Antonio Pereira pour des suggestions intéressantes. Je signale que je côtoie ces trois derniers collègues au laboratoire Énergies & Mécanique Théorique et Appliquée (Lemta), situé sur le campus de Brabois de l'UL, dans lequel je mène mes activités de recherche. Je remercie Sébastien Allain, Lucile Dezerald & Jean-Sébastien Kroll, de l'Institut Jean Lamour, Yann Gunzburger, du laboratoire Géoressources<sup>5</sup>, Andreas Schmidt & Bastian Dose de ForWind (à Oldenburg), Jean-Philippe Chateau, Rainier Hreiz, Mohamed et Youssef Souhar, Guy Plaut pour leurs contributions. Finalement, je remercie Denis Fünfschilling et Mathieu Jenny qui m'ont aidé à concevoir et réaliser l'expérience originale qui est le support du problème 7.5.

Nancy, le 3 décembre 2022 - Emmanuel Plaut.

---

3. L'ENSEM, une autre école de l'Université de Lorraine (UL).

4. Malheureusement décédé le 15 mars 2022, à la fin de mon mandat de « responsable du tronc commun de mécanique », qui s'est étendu de 2008 à 2022... 14 années qui m'ont permis d'affiner ce cours. Que Didier repose en paix.

5. Tous ces laboratoires sont associés à l'UL.



# Chapitre 1

## Modèle du milieu continu - Cinématique élémentaire

L'objectif du mécanicien théoricien est de prédire « le mieux possible » les mouvements de la matière lorsque celle-ci est soumise à diverses sollicitations, par exemple des forces. Cette sentence mérite évidemment de nombreuses précisions :

1. Qu'entend t'on par « prédire le mieux possible » ?

Prédire ne peut se faire que grâce au développement d'un « *modèle* » permettant de « calculer » les mouvements. « Le mieux possible » évoque la nécessité d'un *compromis* dans le choix de ce modèle : sa résolution doit être possible moyennant des efforts et des temps de calcul raisonnables. C'est bien sûr une *démarche de physicien* qui nous guidera dans le choix des hypothèses du « *modèle du milieu continu* ».

2. Qu'entend t'on par « mouvement » ?

En tant que scientifiques nous devons être capable de donner une définition *mathématique* du « mouvement », puisque le langage permettant l'établissement puis (ce n'est pas accessoire!) la résolution d'un modèle physique est la langue mathématique. C'est justement l'objet de la *cinématique*<sup>1</sup> que de préciser ce qu'est le mouvement d'un milieu continu. Précisons immédiatement que nous nous restreignons à des mouvements relatifs de vitesse petite devant celle de la lumière, donc que nous travaillons en *cinématique* et *mécanique* « *classiques* » non relativistes.

3. Qu'entend t'on par « matière » ?

C'est en répondant à cette question cruciale que nous pourrons développer notre modèle. Il serait sans doute présomptueux de vouloir décrire avec le même modèle la matière en fusion thermonucléaire du cœur du soleil, les plasmas inter-galactiques, l'eau contenue dans notre tasse de thé et la porcelaine constituant notre tasse de thé : il va falloir effectuer quelques choix...

4. Qu'entend t'on par « diverses sollicitations » ?

Pour des raisons pratiques et pédagogiques, il convient de ne pas être trop vite trop ambitieux. Ainsi dans ce cours on considèrera le plus souvent des *situations isothermes*, en

---

1. Du grec « *kinêma* » : mouvement. À propos, avez-vous bien lu l'annexe A ?..

laissant le soin au module suivant, correspondant à Barrat (2012), de donner de véritables éléments sur la *thermomécanique des milieux continus*. On s'intéressera donc en général à des sollicitations purement mécaniques, c'est-à-dire des forces.

La question 4 ayant donc reçu une réponse, nous allons nous concentrer dans un premier temps sur les questions 1 et 3, afin de définir les hypothèses du modèle du milieu continu, puis nous attaquer à la question 2.

## 1.1 Modèle du milieu continu solide ou fluide

### 1.1.1 Quels milieux c'est-à-dire : quelle matière et quelles échelles ?

La mécanique des milieux continus s'intéresse aux mouvements de la *matière condensée* considérée à l'échelle de l'homme-ingénieur terrien<sup>2</sup> et pour les applications qui l'intéressent : génie civil, machines, turbomachines, conception automobile, aéronautique, génie des procédés, conversion de l'énergie, etc... En conséquence on a affaire à trois *phases* possibles de la matière, soient, par ordre de densité décroissante (en général),

1. la phase *solide*, caractérisée par le fait qu'un morceau de matière solide possède une forme propre indépendante du support sur lequel il est posé,
2. la phase *liquide*, phase *fluide de densité proche de la phase solide*,
3. la phase *gazeuse*, phase *fluide de densité très inférieure à celle de la phase liquide*,

les phases *fluides* étant définies par le fait qu'un morceau de matière fluide n'a pas de forme propre : le liquide épouse la forme du support sur lequel il est posé, le gaz envahit tout le récipient dans lequel il est contenu.

Une autre définition raisonnable de la différence entre phases solides et fluides consiste à énoncer qu'un solide soumis à des forces tangentielles de faible amplitude constantes dans le temps répond par de faibles déplacements de ses atomes ou molécules, alors qu'un fluide soumis à des forces tangentielles de faible amplitude constantes dans le temps répond par des déplacements qui ne cessent pas, devenant avec le temps de grande amplitude, de sorte qu'un *écoulement* s'établit dans le fluide. Ceci est illustré par l'*expérience de Couette*<sup>3</sup> présentée sur la figure 1.1, sur laquelle on reviendra lorsqu'il s'agira d'établir les lois de comportement des solides et des fluides. Voyez aussi la [version animée de cette figure sur la page web du module](#). Cette expérience de Couette peut être réalisée, comme le montre, dans le cas fluide, la photographie de la figure 7.2 page 147. On verra aussi à ce sujet le problème 7.2. Dans le cas solide, voir le problème 4.3.

Bien entendu ces différences de comportements macroscopiques<sup>4</sup> s'expliquent par des comportements nanoscopiques<sup>5</sup> différents. Dans un solide les atomes ou molécules sont très proches les uns des autres<sup>6</sup> donc en interactions fortes, et l'agitation thermique est limitée : ceci a pour

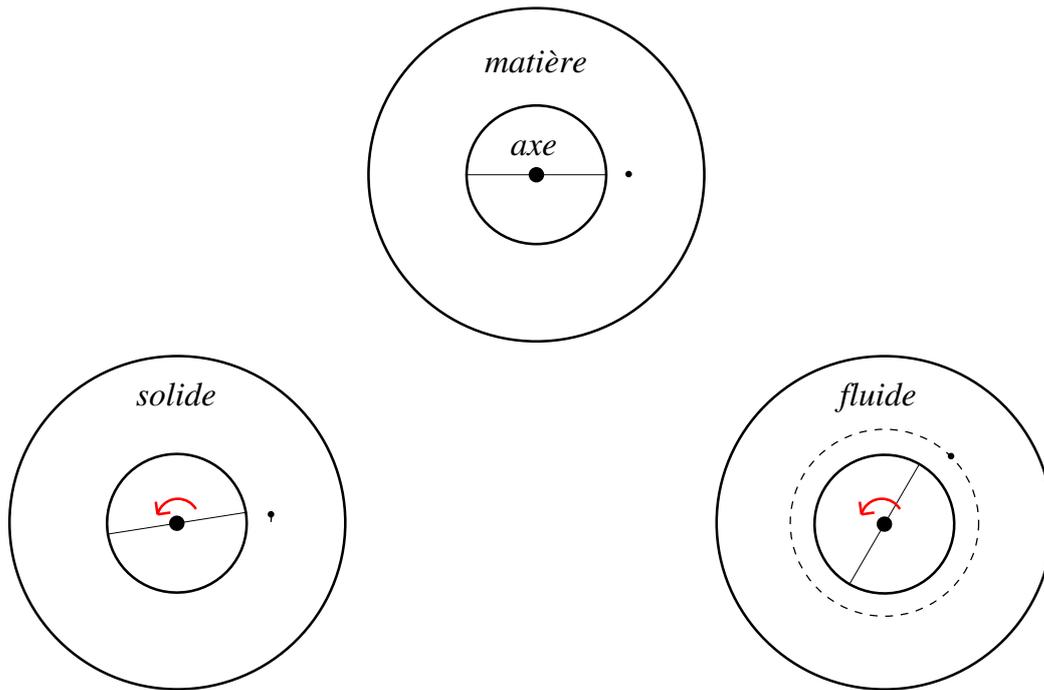
2. Exit le cœur du soleil ou les plasmas inter-galactiques...

3. Physicien français de la fin XIX<sup>ème</sup> - début XX<sup>ème</sup> siècle.

4. Du grec « *makros* » : long, grand et « *skopein* » : examiner, observer. Observer un comportement macroscopique c'est donc observer un comportement aux « grandes échelles » accessibles à l'oeil humain, de l'ordre du centimètre.

5. Du grec « *nanos* » : nain, ce qui a donné le nanomètre, unité de longueur valant un milliardième de mètre :  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$ .

6. À des distances de l'ordre de l'ångström,  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ .



**Fig. 1.1** – *Expérience de Couette* permettant de déterminer si un morceau de matière de forme cylindrique annulaire est solide ou fluide. Ce matériau est déposé dans une enceinte épousant sa forme, constituée d'un cylindre intérieur pouvant tourner autour de son axe, et d'un cylindre extérieur fixe. Pour simplifier ces cylindres sont longs, ce qui permet de négliger les effets d'extrémité et de supposer en première approximation que le problème est bidimensionnel dans un plan perpendiculaire à l'axe des cylindres (plan des figures). Le matériau est adhérent aux cylindres (qui peuvent être pour cela volontairement rugueux). Alors que le système est au repos (figure supérieure), on applique de façon quasi-instantanée un couple  $\Gamma$  au cylindre intérieur, i.e. une densité surfacique de forces tangentielles (azimutales)  $\tau$  au niveau de la surface de contact entre le matériau et le cylindre intérieur. Ce couple donc cette densité de force sont maintenus constants par la suite. Dans le cas d'un **solide** (figure inférieure gauche) un nouvel état d'*équilibre* s'établit, très proche de l'état d'équilibre initial si  $\Gamma$  et  $\tau$  sont faibles. Dans le cas d'un **fluide** (figure inférieure droite), le système ne trouve jamais un nouvel état d'équilibre : au contraire le cylindre intérieur tourne sans cesse et un *écoulement* s'établit (représenté par la trajectoire en pointillés), de sorte que les déplacements de matière sont « grands » même si  $\Gamma$  et  $\tau$  sont très faibles.

conséquence leur « cohésion » et capacité de résistance aux forces illustrée par l'expérience de la figure 1.1. Dans un liquide on a des interactions encore assez fortes, puisque les atomes ou molécules sont encore très proches<sup>7</sup>, mais l'agitation thermique est beaucoup plus grande, d'où la « capacité d'écoulement » illustrée par l'expérience de la figure 1.1. Enfin dans un gaz on a des densités beaucoup plus faibles<sup>8</sup>, d'où des atomes ou molécules en interactions faibles, et une très grande agitation thermique, d'où une « capacité d'écoulement » encore plus grande. L'objet de la physique des matériaux ou de la physique des fluides est exactement de préciser ces comportements nanoscopiques. Ces disciplines seront abordées dans le module de *physique quantique* du premier semestre (Andrieu 2008) et celui de *physique statistique* du second semestre (Gaudry 2019). On verra qu'elles sont complexes et que modéliser par exemple en mécanique quantique les propriétés

7. En général la différence de densité entre les phases solide et liquide d'un même corps est de l'ordre de quelques pourcents seulement.

8. À température et pression ambiante, la densité de l'air est de l'ordre de un millième de fois la densité de l'eau, comme le montre la loi des gaz parfaits (1.8).

de transport d'électrons dans un semi-conducteur homogène, ou en mécanique statistique la pression d'un gaz parfait tout aussi homogène, requiert déjà de sérieux efforts. Comme le mécanicien s'intéresse le plus souvent à des situations présentant des hétérogénéités à son échelle, il est obligé de faire des hypothèses simplificatives en ce qui concerne les petites échelles, et ne doit pas vouloir les décrire trop « finement ». Ainsi le mécanicien des milieux continus suppose que la matière est constituée de « *particules matérielles* » ou « *volumes élémentaires représentatifs* » de diamètre caractéristique  $d$  dans un état local homogène de quasi-équilibre thermodynamique, suffisamment gros pour contenir suffisamment d'atomes ou de molécules pour que cette notion de quasi-équilibre ait un sens du point de vue de la physique statistique,

$$d \gg \ell \text{ échelle des hétérogénéités atomiques ou moléculaires,} \quad (1.1)$$

suffisamment petits pour qu'ils méritent à ses yeux le titre de « particules »,

$$d \ll L \text{ échelle des hétérogénéités qu'il observe } \simeq 1 \text{ cm.} \quad (1.2)$$

Cette dernière inégalité suggère un ordre de grandeur pour l'échelle<sup>9</sup>  $d$ ,

$$d \simeq 10 \mu\text{m}, \quad (1.3)$$

mais il est clair que ces estimations peuvent varier en fonction des applications considérées : l'ingénieur en génie civil modélisant les fondations d'une route constituées d'un gravier grossier estimera sûrement que le volume élémentaire représentatif de ce matériau est plus grand que celui de l'eau fluide caloporteur étudiée par un ingénieur énergétique...

Dans le cas de *solides* ou *liquides* « *simples* », par exemple des corps purs, des alliages, des mélanges « localement homogènes », on peut estimer que  $\ell$  est de l'ordre de la dizaine d'ångströms, donc la première inégalité (1.1) est satisfaite si  $d$  est correctement estimée selon (1.3). Dans le cas de *matériaux composites* ou *fibreuse*, de *matériaux granulaires*, ou de *suspensions*, les choses se compliquent, mais à condition d'augmenter  $d$  on peut parfois (pas toujours!) obtenir des modèles de « milieux continus équivalents » relativement pertinents.

Dans le cas de *gaz*, les hétérogénéités atomiques ou moléculaires disparaissent sous l'effet des collisions entre atomes ou molécules : il faut donc prendre pour  $\ell$  le *libre parcours moyen* des atomes ou molécules. L'inégalité impliquée par (1.1) et (1.2),

$$\ell \ll L,$$

n'est alors pas automatiquement vérifiée, surtout si le gaz est de très faible densité. Pour distinguer les différents régimes de comportement possibles, on introduit en conséquence le *nombre de Knudsen*<sup>10</sup>

$$K = \frac{\ell}{L}. \quad (1.4)$$

Un modèle de milieu continu ne peut être développé que si le nombre de Knudsen est très petit. En utilisant par ailleurs le modèle du gaz parfait (voir Gaudry 2019), on peut estimer le libre parcours moyen comme étant

$$\ell = \frac{1}{\sigma_c n} \quad (1.5)$$

9. Dite parfois échelle « *mésoscopique* », du grec « *mesos* » : moyen.

10. Physicien danois de la fin XIX<sup>ème</sup> - début XX<sup>ème</sup>.

où  $\sigma_c$  est la section efficace de collision des atomes ou molécules<sup>11</sup>, et  $n$  est la densité atomique ou moléculaire du gaz. En remplaçant cette densité par sa valeur donnée par la loi des **gaz parfaits** (cf. le rappel ci-dessous et l'équation 1.7),  $n = p/(kT)$  avec  $p$  la pression,  $k$  la constante de Boltzmann,  $T$  la température absolue, on obtient une estimation du nombre de Knudsen

$$K = \frac{1}{\sigma_c L n} = \frac{kT}{\sigma_c L p} . \quad (1.6)$$

Le modèle du milieu continu ne sera pas valable dès que  $K \gtrsim 0,01$ , c'est-à-dire pour des gaz très peu denses, i.e. chauds ou à faible pression. Ceci écarte par exemple les **gaz de la haute atmosphère**, ou encore la plupart des **plasmas**, qui jouent un rôle important dans les procédés de traitement de surface des matériaux, et qui pourraient un jour jouer un rôle important en énergétique<sup>12 13</sup>.

### Rappel : loi des gaz parfaits

La constante de Boltzmann<sup>14</sup>  $k = 1,381 \cdot 10^{-23}$  J/K permet de calculer la densité particulaire d'un gaz parfait selon

$$n = \frac{p}{kT} . \quad (1.7)$$

Comme la masse volumique  $\rho = mn$  où  $m$  est la masse d'un atome ou molécule du gaz,  $m = M/N_A$  avec  $M$  la masse molaire du gaz<sup>15</sup>,  $T$  la température absolue,  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ /mol le nombre d'Avogadro, une autre forme de cette loi est

$$\rho = \frac{Mp}{RT} \quad (1.8)$$

avec la constante des gaz parfaits  $R = N_A k = 8,314$  J/K/mol.

### Bémol sur la distinction solide - fluide

Comme toute notion physique, la distinction entre solide et fluide a ses limites. Des modèles plus généraux et sophistiqués existent, permettant par exemple de décrire les « écoulements » de solides (!) sur des temps longs, ou au contraire la « réponse élastique » de certains fluides complexes (!) sur des temps courts, i.e. de « marier » les modèles du solide élastique et du fluide visqueux que nous allons introduire ici ; on parle alors souvent de lois de comportement de type « **viscoélastique** »... Ces modèles dépassent très largement le cadre de ce module.

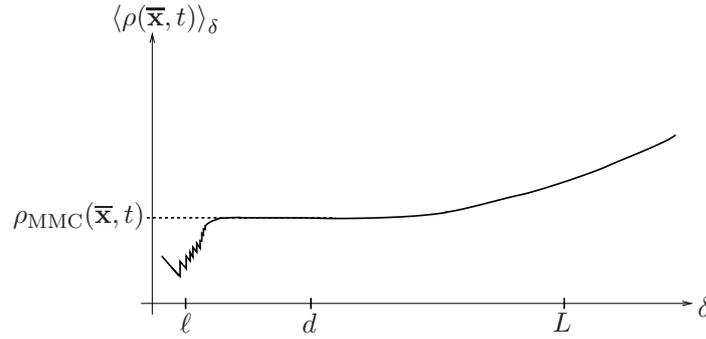
11. Si  $r_c$  est le « rayon efficace » des atomes ou molécules, on a  $\sigma_c = 4\pi r_c^2$  ; tout le problème est d'estimer  $r_c$  ... En physique statistique, on montre par ailleurs qu'il est plus correct d'introduire un facteur  $\sqrt{2}$  devant  $\sigma_c$ , i.e., qu'il faut remplacer  $\sigma_c$  par  $\sqrt{2} \sigma_c$  dans les équations (1.5) et (1.6). Cependant, en terme d'ordre de grandeur, on peut considérer ce facteur  $\sqrt{2}$  comme un « détail », ou encore, l'inclure dans le rayon  $r_c$ , qui serait ainsi modifié d'un facteur  $2^{1/4} = 1,19$  seulement.

12. Avec des projets comme ITER.

13. Signalons que l'utilisation que l'on vient de faire du modèle du gaz parfait peut être très discutable pour certains **plasmas**, constitués d'électrons chauds et d'ions beaucoup plus froids. Ces systèmes sont très fortement hors de l'équilibre, au point qu'on peut définir localement deux températures, une température des électrons et une température des ions, très différentes. Dans ce cas l'hypothèse de l'existence d'un « état local homogène de quasi-équilibre » est totalement déraisonnable. Outre les plasmas de laboratoire, ce type de remarque peut aussi s'appliquer aux gaz chauds produits « sous » un véhicule spatial en rentrée dans l'atmosphère. Certains modèles dédiés à ces problèmes de rentrée considèrent plusieurs températures différentes au même endroit, associées aux différentes espèces chimiques présentes à cet endroit.

14. Physicien autrichien actif à la fin XIX<sup>ème</sup> siècle.

15. Par exemple, pour l'air,  $M_{\text{air}} = 29,0$  g mol<sup>-1</sup>.



**Fig. 1.2** – Dans un gaz, allure en échelle log-log de la courbe de la masse volumique autour de  $\bar{\mathbf{x}}$  moyennée sur une échelle  $\delta$  définie par (1.9). Aux petites échelles  $\delta \simeq \ell$  la masse volumique apparaît comme une fonction discontinue, puisqu’au fur et à mesure que le rayon  $\delta$  de la boule centrée en  $\bar{\mathbf{x}}$  augmente le numérateur de (1.9) augmente de  $m_a$  à chaque fois que la frontière de cette boule atteint un nouvel atome. À des échelles de l’ordre de  $d$ , la masse volumique se stabilise sur une valeur moyenne  $\rho_{\text{MMC}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ . À des échelles de l’ordre de  $L$ , cette masse volumique varie continûment, sous l’effet d’un gradient thermique par exemple : on peut imaginer que le point  $\bar{\mathbf{x}}$  se trouve au cœur d’une région chaude, où le fluide est moins dense ; quand on s’éloigne le gaz est plus froid donc plus dense. Ce sont ces dernières variations que le (thermo)mécanicien des *milieux continus* veut pouvoir décrire, tout en « oubliant » celles à petite échelle.

### 1.1.2 La perception continue résulte d’une prise de moyenne

Après avoir cerné la nature des solides et des fluides qui vont faire l’objet de toutes nos attentions, revenons en travaillant un exemple sur l’idée de milieu « *continu* ». Cette idée ou plutôt cette perception de la matière résulte bien d’une *prise de moyenne*<sup>16</sup> : en moyennant comme on va l’expliquer toute quantité à l’échelle  $d$ , on « lisse » les fluctuations de petite échelle et on « oublie » la nature discrète et discontinue (i.e. atomique ou moléculaire) de la matière. Considérons un matériau gazeux dans des conditions terrestres, constitué d’atomes du même corps pur de masse  $m_a$ . On sait que l’on peut alors adopter une description classique<sup>17</sup> de ce gaz, en considérant chaque atome comme une petite boule dure. À l’instant  $t$ , notons  $\bar{\mathbf{x}}_n(t)$  les positions instantanées de ces atomes-boules<sup>18</sup>. Soit  $\bar{\mathbf{x}}$  un point dans ce matériau. La masse volumique autour de  $\bar{\mathbf{x}}$  moyennée sur une échelle  $\delta$  grande devant le diamètre des atomes est

$$\langle \rho(\bar{\mathbf{x}}, t) \rangle_\delta = \frac{m_a \text{Card}(\{\bar{\mathbf{x}}_n(t) \text{ tels que } \|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_n(t)\| \leq \delta\})}{(4/3)\pi\delta^3}, \quad (1.9)$$

où Card désigne la fonction cardinal<sup>19</sup>. À un instant  $t$  fixé la courbe de  $\langle \rho(\bar{\mathbf{x}}, t) \rangle_\delta$  a l’allure représentée sur la figure 1.2, qui permet d’identifier clairement les longueurs  $\ell$ ,  $d$  et  $L$  introduites dans la section précédente, ainsi que la masse volumique dans le volume élémentaire représentatif

$$\rho_{\text{MMC}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \langle \rho(\bar{\mathbf{x}}, t) \rangle_d \quad (1.10)$$

16. On parle aussi parfois d’un « *processus d’homogénéisation* ».

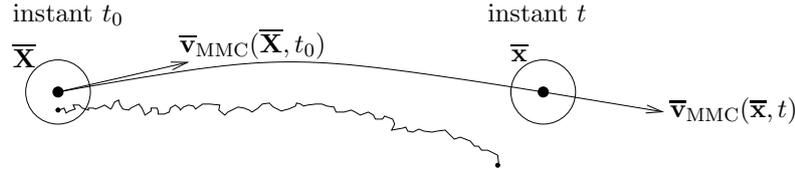
17. Non quantique !

18. On a bien sûr, comme cela est spécifié dans l’annexe A (au fait, l’avez vous lue comme on vous l’avait demandé?...), choisi une origine O dans l’espace, de sorte que repérer un atome en  $M_n$  revient à définir

$$\bar{\mathbf{x}}_n = \overline{\mathbf{O}M_n}.$$

La notation des vecteurs avec une barre supérieure est aussi définie dans cette annexe.

19. Card( $E$ ) est le nombre d’éléments de l’ensemble  $E$ .



**Fig. 1.3** – Représentation schématique du mouvement dans un gaz chaud. Les grosses boules de gauche et droite représentent les positions initiale (à l’instant  $t_0$ ) et finale (à l’instant  $t$ ) d’un volume élémentaire représentatif que l’on suit dans son mouvement ; la courbe trajectoire épaisse est donc définie comme la solution de  $d\bar{x}/dt = \bar{v}_{MMC}(\bar{x}, t)$  munie de la condition initiale  $\bar{x}(t_0) = \bar{X}$ . À cause des phénomènes de *diffusion*, un atome particulier (petite boule noire) a une trajectoire proche de cette trajectoire moyenne seulement au début ; il en diverge peu à peu.

qui qualifie l’équilibre thermodynamique de ce volume. Il faut réaliser que si on représentait  $\langle \rho(\bar{x}, t) \rangle_\delta$  à un autre instant proche<sup>20</sup>, à cause de l’agitation thermique des atomes, on aurait une courbe *différente* aux petites échelles  $\delta \simeq \ell$ , mais, à cause de l’hypothèse du quasi-équilibre local, *identique* aux grandes échelles  $\delta \gtrsim d$ . En d’autres termes la prise de moyenne est à la fois spatiale et temporelle, au sens de la physique statistique. Bien entendu sur des temps longs<sup>21</sup>, toute la courbe peut se mettre à dépendre du temps, i.e.  $\rho_{MMC}(\bar{x}, t)$  va dépendre du temps. Au bilan, dans le gaz étudié, le mécanicien des milieux continus va pouvoir considérer l’ensemble de toutes ces particules matérielles de taille  $d$  comme un *continuum* sur lequel des quantités comme la masse volumique locale  $\rho_{MMC}(\bar{x}, t)$  varient de façon douce. Avec la même méthode de prise de moyenne, on suppose que l’on est capable de définir par exemple la vitesse  $\bar{v}_{MMC}(\bar{x}, t)$  de la « particule matérielle - volume élémentaire représentatif » située en  $\bar{x}$  à l’instant  $t$ , ou encore la température  $T_{MMC}(\bar{x}, t)$  de cette « particule »<sup>22</sup>.

### 1.1.3 Phénomènes de diffusion de la matière

Il faut prendre garde au fait que<sup>23</sup> les « particules matérielles » (volumes élémentaires représentatifs) ne sont pas si « matérielles » que cela (aux temps « longs »), à cause de l’agitation thermique des atomes ou molécules constituant le matériau. Dans un gaz atomique par exemple tous les atomes ne possèdent pas la vitesse moyenne  $\bar{v}_{MMC}(\bar{x}, t)$ , ce qui fait que certains rentrent et d’autres sortent de la particule matérielle. La trajectoire de la particule matérielle n’est donc qu’une trajectoire *moyenne* ; les trajectoires des atomes individuels en divergent peu à peu à cause de la *diffusion* de ces atomes. Ce phénomène de diffusion est représenté schématiquement sur la figure 1.3. Il existe dans tous les matériaux, et peut être modélisé en introduisant un *coefficient de diffusion*  $D$ , voir par exemple le chapitre 1 de [Guyon, Hulin & Petit \(2012\)](#). En lien avec la figure 1.3, la divergence entre deux trajectoires d’atomes (ou de molécules) initialement proches se caractérise, sur un temps  $t$ , par des distances atteintes de l’ordre de

$$l_{\text{diffusion}} = \sqrt{Dt} . \quad (1.11)$$

20.  $t' = t + \Delta t$  avec  $\Delta t$  un temps « nanoscopique », de l’ordre de grandeur de la durée du libre parcours moyen d’un atome.

21. Des temps « macroscopiques »...

22. Cette température est définie à partir de l’énergie cinétique (moyenne!)  $E_a$  par atome des mouvements d’agitation thermique de ceux-ci, grâce à une relation de proportionnalité du type  $E_a = ckT$  où  $c$  est un coefficient demi entier dépendant du nombre de degrés de liberté des atomes ou molécules.

23. Cette remarque vaut surtout pour les fluides, et ce d’autant plus qu’ils sont chauds.

Dans les conditions standard de température et de pression (le coefficient  $D$  augmente fortement avec la température) :

- dans un gaz  $D$  est de l'ordre de  $10^{-4}$  m<sup>2</sup>/s;
- dans un liquide comme de l'eau,  $D$  est de l'ordre de  $10^{-9}$  m<sup>2</sup>/s (cf. [Guyon, Hulin & Petit 2012](#));
- dans un solide  $D$  est de l'ordre de  $10^{-50}$  m<sup>2</sup>/s (cf. [Ashby & Jones 1998](#)).

Il est instructif de faire une application numérique à partir de ces ordres de grandeur. Cette application montre que l'on peut qualifier la « cohésion » des « particules matérielles » d'un solide comme très bonne, celle d'un gaz comme faible, et celle d'un liquide comme intermédiaire. En d'autres termes une « particule matérielle » d'un solide est vraiment « matérielle » et va « durer longtemps », alors que dans un gaz elle va être « renouvelée » « assez rapidement ». À cause de ces phénomènes de diffusion, on peut considérer que le terme de « volume élémentaire représentatif » est préférable à celui de « particule matérielle », que l'on continuera cependant à employer du fait de sa signification *moyenne* qui reste indiscutable<sup>24</sup>. On reviendra sur ces phénomènes de diffusion dans le problème 1.2.

## 1.2 Cinématique élémentaire

Désormais on considérera la matière au moins à l'échelle  $d$  des « particules matérielles - volumes élémentaires représentatifs »; elle est devenue pour nous, grâce à la démarche que l'on vient d'expliquer, un milieu continu. On notera donc simplement  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  la vitesse moyenne  $\bar{\mathbf{v}}_{\text{MMC}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  de la particule matérielle située en  $\bar{\mathbf{x}}$  à l'instant  $t$ , qu'on pourrait même appeler, maintenant, « point matériel ». On travaille dans un certain *référentiel*  $\mathcal{R}$  dans lequel un repère orthonormé direct d'origine  $O$  a été choisi, cf. l'annexe A. En conséquence, le vecteur position du point matériel  $M$  est défini par  $\bar{\mathbf{x}} = \overline{OM}$ .

### 1.2.1 Description eulerienne du mouvement

Cette description, qui est la plus naturelle pour les fluides, caractérise justement le mouvement d'un milieu occupant à l'instant  $t$  le domaine  $D_t$  par le *champ dit « eulerien » des vecteurs vitesses* des particules matérielles

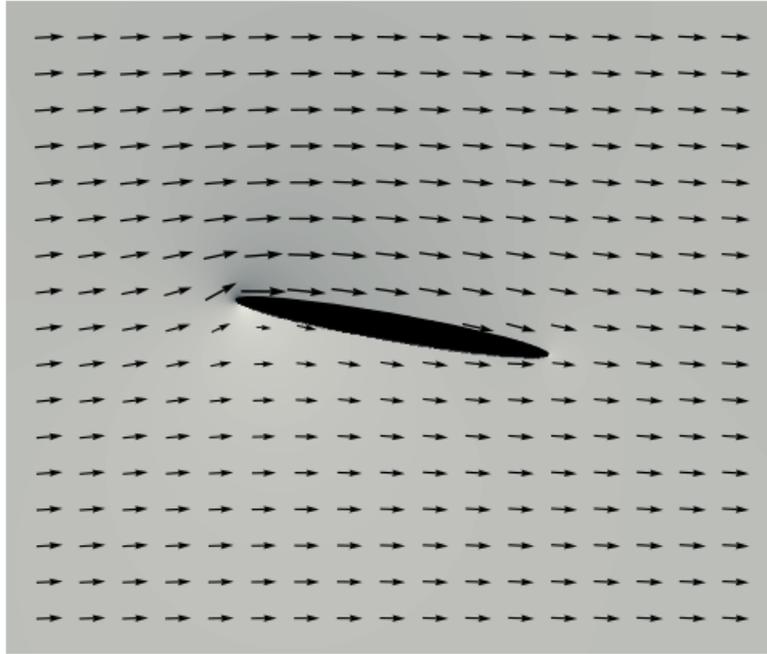
$$\boxed{\begin{array}{lcl} \bar{\mathbf{v}}(\cdot, t) & : & D_t \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & & \bar{\mathbf{x}} \longmapsto \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \end{array}} \quad (1.12)$$

supposé régulier<sup>25</sup> par rapport à  $\bar{\mathbf{x}}$  et  $t$ . Dans le cas de fluides, illustré sur la figure 1.4, on peut accéder à ce champ expérimentalement en observant le mouvement de petites particules (poussières, microbilles) ayant la même masse volumique que le fluide, que l'on peut considérer en première approximation comme « solidaires des particules matérielles »<sup>26</sup>. On les qualifie alors de « *traçeurs parfaits* ». Si  $\bar{\mathbf{x}}_p(t)$  désigne la position d'un traceur (parfait) au cours du temps, suivie

24. Pour des matériaux dans lesquels l'approche du milieu continu est pertinente.

25. Disons de classe  $C^1$  au moins.

26. En première approximation seulement, ne serait-ce qu'à cause des phénomènes de diffusion que l'on a déjà évoqués! C'est l'objet d'une certaine branche de la *science des écoulements diphasiques* de dire les limites de cette première approximation, et d'en proposer de meilleures. Ce problème est loin d'être simple, et fait encore l'objet de recherches actives à l'heure actuelle.



**Fig. 1.4** – *Champs euleriens de vitesse*  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}})$  (flèches) et de *pression*  $p(\bar{\mathbf{x}})$  (niveaux de gris) d'un modèle d'*écoulement* de fluide parfait *autour d'une aile d'avion* à section elliptique, dans le référentiel lié à cette aile; on peut imaginer que c'est le référentiel d'une soufflerie. Du fait que l'écoulement est plus rapide au-dessus de l'aile, une dépression s'y crée; par ailleurs un point d'arrêt existe en avant au-dessous de l'aile, d'où une forte surpression par « effet Bernoulli » (cf. la section 7.4). Ceci explique l'existence d'une portance. Ce modèle est établi dans le problème 3.10 de [Plaut \(2018\)](#).

par exemple par des moyens optiques (une caméra, éventuellement « rapide » si le mouvement est « rapide »), on estime que

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}_p(t), t) = \frac{d\bar{\mathbf{x}}_p(t)}{dt} \simeq \frac{\bar{\mathbf{x}}_p(t + \delta t) - \bar{\mathbf{x}}_p(t)}{\delta t} \quad (1.13)$$

pour  $\delta t$  « petit ». Dans le cas d'un solide, on peut avoir une démarche similaire consistant à « marquer » certaines particules matérielles et à les suivre<sup>27</sup>. Cette description est due à Euler<sup>28</sup>.

### 1.2.2 Description lagrangienne du mouvement

Dans le cas de milieux solides, on a vu que les « particules matérielles » le sont vraiment, il semble donc plus naturel de les suivre longtemps, pas seulement le temps d'un  $\delta t$  « petit » comme expliqué au niveau de l'équation (1.13). Suivant la démarche de Lagrange<sup>29</sup>, on définit alors le mouvement par la donnée des applications vectorielles « *placements* »  $\bar{\Phi}(\cdot, t)$  qui permettent de passer de la position initiale ou de référence d'une particule matérielle à une position « actuelle ». Plus précisément si  $D_0$  est le domaine occupé par le milieu à l'instant initial ou de référence  $t_0$ ,

27. La méthode utilisée pour le « marquage » peut être plus ou moins sophistiquée, allant du marquage par insertion d'éléments radioactifs à la simple écriture de « points » sur la surface externe du solide grâce à un feutre (un exemple concret de cette dernière technique est présenté sur la figure 1.5).

28. Mathématicien et physicien d'origine suisse du XVIII<sup>ème</sup>, qui a contribué de façon importante à la mécanique des fluides, au point que l'on retrouvera son nom associé à une équation fondamentale.

29. Mathématicien et physicien d'origine italienne de la fin XVIII<sup>ème</sup> - début XIX<sup>ème</sup>, qui a contribué de façon importante à la mécanique des solides.

$D_t$  le domaine occupé par le milieu à l'instant  $t$ , si  $M_0$  est une particule matérielle repérée par sa position

$$\bar{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{OM}}_0 \text{ dans } D_0 \text{ à l'instant } t_0, \quad (1.14)$$

alors à l'instant  $t$  cette même particule matérielle se trouve en

$$\bar{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{OM}} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t). \quad (1.15)$$

Une illustration se trouve sur la figure 1.5. Ainsi  $\bar{\Phi}(\cdot, t)$  est l'application

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \bar{\Phi}(\cdot, t) & : & D_0 \longrightarrow D_t \\ & & \bar{\mathbf{X}} \longmapsto \bar{\mathbf{x}} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t) \end{array}}. \quad (1.16)$$

Ceci revient à suivre les *trajectoires des particules matérielles* : la trajectoire de la particule qui était en  $\bar{\mathbf{X}}$  à l'instant  $t_0$  est la courbe paramétrée<sup>30</sup>

$$\boxed{C_T = \{\bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t) \text{ pour } t \in [t_{\text{initial}}, t_{\text{final}}]\}}. \quad (1.17)$$

Naturellement  $\bar{\Phi}(\cdot, t)$  doit être une bijection régulière<sup>31</sup> de  $D_0$  sur  $D_t$ . Son inverse est la bijection  $\bar{\Psi}(\cdot, t)$  de  $D_t$  sur  $D_0$  telle que

$$\forall \bar{\mathbf{X}} \in D_0, \forall \bar{\mathbf{x}} \in D_t, \quad \bar{\mathbf{x}} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t) \iff \bar{\mathbf{X}} = \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{x}}, t), \quad (1.18)$$

ce quel que soit  $t$  dans l'intervalle de durée du mouvement  $[t_{\text{initial}}, t_{\text{final}}]$ .

On définit naturellement le *champ lagrangien des vitesses* comme celui des vitesses des particules lagrangiennes situées en  $\bar{\mathbf{X}}$  quelconque dans  $D_0$  à l'instant  $t_0$ ,

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{V}}(\cdot, t) & : & D_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & & \bar{\mathbf{X}} \longmapsto \bar{\mathbf{V}}(\bar{\mathbf{X}}, t) = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t)}{\partial t} \end{array}}, \quad (1.19)$$

la première notation («  $\partial \bar{\mathbf{x}} / \partial t$  ») étant légèrement abusive.

### 1.2.3 Liens entre ces deux descriptions - Trajectoires

Le lien avec le champ de vitesse eulerien (1.12) s'exprime par la formule valable quels que soient  $t$  et  $\bar{\mathbf{x}}$  dans  $D_t$ ,

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{V}}(\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{x}}, t), t). \quad (1.20)$$

Réciproquement un mouvement décrit à la façon d'Euler peut se décrire à la façon de Lagrange en calculant les *trajectoires* solutions de

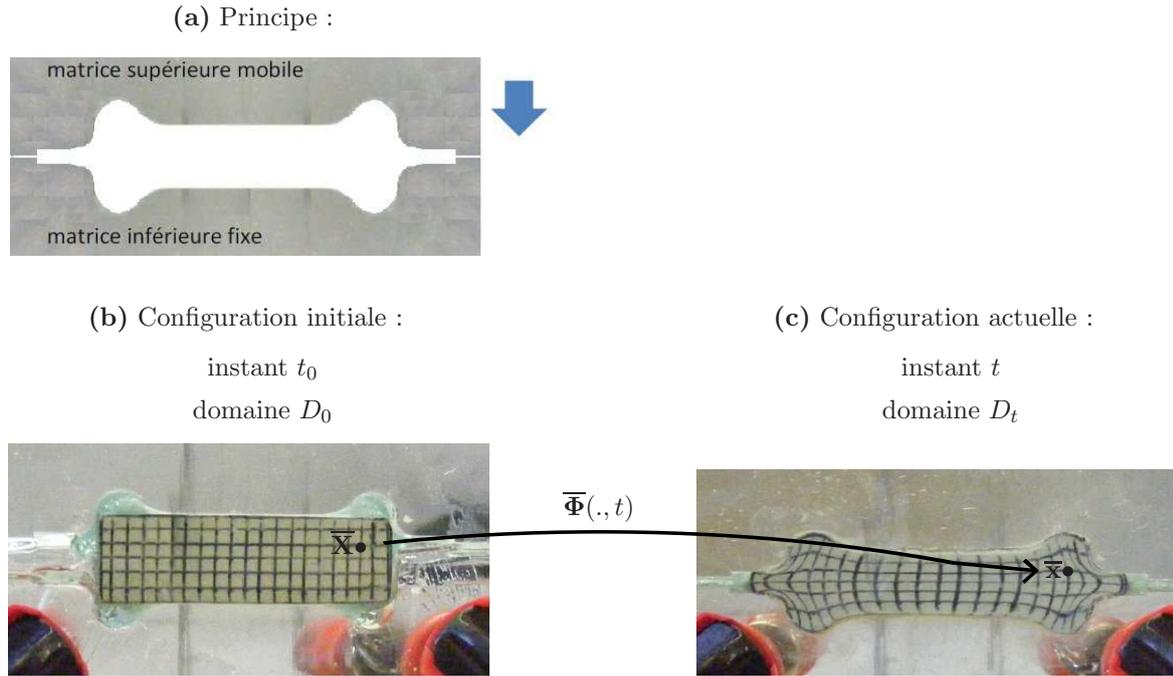
$$\boxed{\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{X}} \text{ et } \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}(t), t)}. \quad (1.21)$$

Si ce travail est fait quelque soit la position initiale  $\bar{\mathbf{X}}$  dans  $D_0$ , on en déduit d'après (1.17),

$$\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t) = \bar{\mathbf{x}}(t).$$

30. La notation  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  est un peu abusive, car  $\bar{\mathbf{x}}$  dépend de  $\bar{\mathbf{X}}$ , comme le rappelle justement la notation  $\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t)$ .

31. Disons de classe  $C^1$  au moins par rapport à  $\bar{\mathbf{X}}$ ; on la suppose aussi régulière par rapport à  $t$ , disons de classe  $C^2$  au moins.



**Fig. 1.5** – *Description lagrangienne du mouvement* à l'aide de la fonction *placement*  $\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t)$ , lors d'un essai de « *matricage* », technique de mise en forme de matériaux solides mous (le plus souvent, parce qu'ils ont été chauffés) dans des matrices solides rigides. Essai réalisé par Rachid Rahouadj avec des élèves de l'ENSEM, en utilisant de la plastiline marquée au feutre d'une grille régulière. La configuration dite actuelle est pratiquement la configuration finale; en effet il faut en général éviter le contact entre les matrices fixe et mobile.

#### 1.2.4 Lignes de courant

À un instant  $t$  donné, on peut caractériser un champ de vitesse eulerien  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  par ses *lignes de courant*, courbes tangentes en tout point au vecteur  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ . Ce sont donc des courbes paramétrées de la forme  $\bar{\mathbf{x}}(s)$ , avec  $s$  paramètre réel<sup>32</sup> et

$$\forall s, \quad d\bar{\mathbf{x}} \parallel \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}(s), t) \iff d\bar{\mathbf{x}} \wedge \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}(s), t) = \bar{\mathbf{0}}, \quad (1.22)$$

en notant

$$d\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}'(s)ds. \quad (1.23)$$

En un point où toutes les composantes du vecteur vitesse  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  sont non nulles, il passe une ligne de courant et une seule. En général les lignes de courant forment une famille de courbes dépendant de deux paramètres, par exemple les deux coordonnées de leur intersection avec un plan donné. Un exemple de calcul de lignes de courant sera donné dans le problème 1.1.

#### 1.2.5 Lignes d'émission

Un procédé que l'on peut employer pratiquement pour visualiser un écoulement consiste à injecter du colorant en un point  $\bar{\mathbf{x}}_p$  donné à partir d'un instant  $t_M$ , le  $M$  figurant pour « marquage ». En supposant que ce colorant se comporte comme un traceur parfait, on peut alors visualiser la

<sup>32</sup>. Le paramétrage par  $s$  variant dans un intervalle  $[s_1, s_2]$  n'est sûrement pas unique, puisqu'il résulte d'un choix de nature technique.

*ligne d'émission* qui est le lieu occupé par les particules matérielles qui ont été chargées en colorant en passant par  $\bar{\mathbf{x}}_P$  entre  $t_M$  et l'instant d'observation  $t$ . En notant  $t'$  cet instant de passage au point de marquage  $\bar{\mathbf{x}}_P$ , et en utilisant une description lagrangienne du mouvement, on obtient que la particule concernée était en  $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{x}}_P, t')$  à l'instant de référence, d'où

$$C_{LE} = \left\{ \bar{\Phi}(\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{x}}_P, t'), t) \quad \text{pour} \quad t' \in [t_M, t] \right\}. \quad (1.24)$$

### 1.2.6 Cas d'un mouvement stationnaire ou permanent

Un mouvement est dit *stationnaire* ou *permanent* si le champ de vitesse eulerien correspondant est indépendant du temps,

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (1.25)$$

Dans ce cas les trajectoires solutions de

$$\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \bar{\mathbf{X}} \quad \text{et} \quad \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}(t))$$

vérifient aussi le critère de définition des lignes de courant

$$d\bar{\mathbf{x}} \parallel \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}(t)).$$

*Les trajectoires et lignes de courant sont donc confondues.* D'autre part tous les points passant par le même point  $\bar{\mathbf{x}}_P$  ont la même trajectoire, *les trajectoires et lignes d'émission sont donc confondues.*

### 1.2.7 Dérivée particulière d'un champ scalaire

Considérons un champ scalaire tel que la masse volumique  $\rho$  ou la température  $T$ . En description lagrangienne  $\rho$  par exemple est vue comme dépendant de  $\bar{\mathbf{X}} \in D_0$  et  $t$ ,

$$\rho = \rho^L(\bar{\mathbf{X}}, t). \quad (1.26)$$

En description eulerienne  $\rho$  est vue au contraire comme dépendant de  $\bar{\mathbf{x}} \in D_t$  et  $t$ ,

$$\rho = \rho^E(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (1.27)$$

Le lien entre les deux se fait grâce aux applications  $\bar{\Phi}$  et  $\bar{\Psi}$  introduites section 1.2.2, suivant les formules

$$\rho^L(\bar{\mathbf{X}}, t) = \rho^E(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t), t) \quad \text{et} \quad \rho^E(\bar{\mathbf{x}}, t) = \rho^L(\bar{\Psi}(\bar{\mathbf{x}}, t), t). \quad (1.28)$$

Afin d'écrire des équations d'évolution basées sur la physique, il importe de suivre les particules matérielles dans leur mouvement. Le bon taux d'évolution d'une quantité comme la masse volumique est donc la *dérivée particulière*

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho^L(\bar{\mathbf{X}}, t)}{\partial t} = \frac{d\rho^E(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t), t)}{dt} = \frac{\partial \rho^E}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho^E}{\partial t} \quad (1.29)$$

en utilisant la convention de sommation d'Einstein<sup>33</sup>. On peut récrire cette équation en remarquant que, d'après (1.19) et (1.20),

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = V_i(\bar{\mathbf{X}}, t) = v_i(\bar{\mathbf{x}}, t),$$

33. Voir le chapitre 1 du cours de calcul tensoriel ;  $(x_1, x_2, x_3)$  sont ici les coordonnées dans le repère de travail.

d'où en description eulerienne, en omettant les exposants  $E$  pour alléger les notations,

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\nabla\rho) \cdot \bar{\mathbf{v}}}. \quad (1.30)$$

Le dernier terme, faisant intervenir la vitesse locale, est dit de « *convection* » ou d'« *advection* ». Le problème 1.2 illustre l'importance des effets d'advection, et montre leur « compétition » avec des effets de diffusion.

### 1.3 Problèmes

#### Problème 1.1 *Étude de l'écoulement potentiel autour d'un mobile cylindrique*

Les *écoulements engendrés par des mobiles* (par exemple un avion!) sont très importants en mécanique des fluides. On s'intéresse ici au cas d'un *mobile cylindrique*, que l'on peut considérer en première approximation comme *bidimensionnel*. Il prend donc la forme d'un disque de rayon  $a$ . L'écoulement étudié est considéré comme incompressible et irrotationnel, donc potentiel. En quelques mots l'hypothèse d'écoulement irrotationnel se justifie en fluide « parfait », comme on le verra dans la section 7.4.6, ou encore en « cellules de Hele-Shaw<sup>34</sup> ». Ces cellules sont des canaux plans de faible épaisseur, dans lesquelles les écoulements sont dominés par les effets visqueux. En conséquence on a dans l'équation de Navier-Stokes (7.51) équilibre entre le gradient de pression motrice et le terme visqueux, d'où une relation de proportionnalité entre la vitesse parallèlement aux plaques et le gradient de pression motrice<sup>35</sup>, qui montre que là encore l'écoulement est potentiel. La théorie complète des écoulements potentiels bidimensionnels est par exemple donnée dans Plaut (2018). L'objet du problème qui suit est premièrement de se familiariser avec différentes notions de cinématique, deuxièmement de continuer à s'entraîner en calcul différentiel (manipulation de  $\text{div}$ ,  $dx$ ,  $dy$ ,  $dr$ ,  $d\theta$ , etc...).

**1** On commence par travailler *dans le référentiel lié au disque*, muni d'un repère cartésien  $Oxyz$ . Le disque est centré en  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{0}}$ ; sa frontière est d'équation  $x^2 + y^2 = a^2$ . Le fluide arrive « de l'infini » avec la vitesse  $U\bar{\mathbf{e}}_x$ . On veut vérifier que le champ de vitesse bidimensionnel

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = v_x\bar{\mathbf{e}}_x + v_y\bar{\mathbf{e}}_y \quad \text{avec} \quad v_x = U \left( 1 + \frac{b(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) \quad \text{et} \quad v_y = U \frac{cxy}{(x^2 + y^2)^2}$$

peut constituer un bon modèle de l'écoulement, et faire une étude cinématique de cet écoulement. Dans ce modèle les constantes  $b$  et  $c$  sont pour l'instant des paramètres réels ajustables.

**1.1** À quel type de description du mouvement correspond la donnée du champ de vitesse  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}})$ ? Que peut-on dire de ce mouvement?

**1.2** Montrez que, en imposant une certaine relation entre les paramètres  $b$  et  $c$ , ce champ de vitesse décrit bien un écoulement de fluide incompressible,

$$\text{div}\bar{\mathbf{v}} = 0.$$

**1.3** Montrez que, par un choix adéquat de  $b$ , on peut assurer la condition d'imperméabilité de l'interface entre le solide et le fluide, c'est-à-dire la nullité de la vitesse normale au cercle frontière.

34. Du nom d'un ingénieur et professeur anglais actif fin XIX<sup>ème</sup>, début XX<sup>ème</sup>.

35. Cf. par exemple la section 9.7.3 de Guyon, Hulin & Petit (2012).

**1.4** Calculez puis tracez les lignes de courant de cet écoulement.

*Indications* : vous aurez intérêt à exprimer  $v_x$  et  $v_y$  en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  définies par

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta .$$

Vous aurez intérêt à utiliser la formule différentielle

$$d\left(\frac{y}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}(\cos 2\theta \, dy - \sin 2\theta \, dx) .$$

Vous donnerez au final un paramétrage polaire des lignes de courant, de la forme  $r = r(\theta, \mu)$ , en prenant soin d'identifier physiquement le paramètre  $\mu$  qui, en variant dans un certain intervalle, permet d'obtenir toutes les lignes de courant.

**1.5** Que peut-on dire des trajectoires dans cet écoulement ?

**2** On travaille maintenant dans le *référentiel lié au fluide à l'infini*. Dans ce référentiel le disque est centré en  $\bar{\mathbf{x}} = -Ut\bar{\mathbf{e}}_x$ .

**2.1** En explicitant la transformation de Galilée entre le référentiel lié au disque mobile, réputé « relatif », et le référentiel lié au fluide à l'infini, réputé « absolu », donnez l'expression du champ de vitesse  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  dans ce dernier référentiel.

*Indications* : vous aurez intérêt à utiliser des notations avec des ' pour les coordonnées et vitesses dans le référentiel relatif, afin de ne pas mélanger vos pinceaux !... Il pourra aussi être utile de faire a posteriori un test de cohérence, en vérifiant que la particule fluide en contact avec l'extrémité gauche du disque, située en  $\bar{\mathbf{x}} = -(Ut + a)\bar{\mathbf{e}}_x$ , est bien poussée à la vitesse  $-U\bar{\mathbf{e}}_x$ .

**2.2** Calculez puis tracez les lignes de courant de ce champ de vitesse à l'instant initial  $t = 0$ .

*Indications* : vous aurez ici encore intérêt à exprimer  $v_x$  et  $v_y$  en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ .

**2.3** Donnez au moins deux raisons pour lesquelles ces lignes de courant diffèrent des trajectoires de cet écoulement.

### Problème 1.2 *Étude d'un problème d'advection-diffusion*

Dans une atmosphère *calme*, une *pollution* accidentelle se produit au niveau d'une usine chimique, dont la cheminée, supposée très haute, relâche à l'instant  $t = 0$  une petite quantité de masse  $m_a$  de produit radioactif. En négligeant dans un premier temps les effets du sol et de la cheminée, on considère que la géométrie du problème est à symétrie sphérique autour du point O correspondant à la bouche de la cheminée. On utilisera cependant un repère orthonormé  $Ox_1x_2x_3$ . L'équation d'évolution de la masse volumique  $\rho_a$  de produits radioactifs est donnée par

$$\frac{d\rho_a}{dt} = -\text{div}(-D\bar{\nabla}\rho_a) = D \Delta\rho_a \quad (1.31)$$

où  $D$  est le *coefficient de diffusion* de ces produits,  $\Delta$  l'opérateur laplacien (cf. la section 2.5 du cours de calcul tensoriel).

**1.1** Justifiez par une analyse des symétries de ce problème (au sens large des propriétés de symétries géométriques et aussi des échelles physiques ou géométriques) que la dépendance spatiale de  $\rho_a$  se fera via une dépendance en

$$\xi = \frac{x_i x_i}{Dt} ,$$

et que l'on peut chercher la solution de ce problème sous la forme

$$\rho_a = f(t) g(\xi) .$$

**1.2** Vérifiez que

$$\rho_a = A t^{-3/2} \exp\left(-\frac{\xi}{4}\right) \quad (1.32)$$

est solution de l'équation (1.31). On vous demande de présenter ce calcul en utilisant les conventions de sommation indicielles introduites dans le cours de calcul tensoriel.

**1.3** Calculez la constante  $A$  de façon à respecter la loi de conservation de la masse

$$\iiint \rho_a(\bar{\mathbf{x}}, t) d^3x = m_a \text{ masse de produits émise à } t = 0 . \quad (1.33)$$

*Indications* : on rappelle que, si  $a$  est une constante positive,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2/a) dx = \sqrt{\pi a} ;$$

vous veillerez à vérifier l'homogénéité du résultat obtenu.

*Commentaire* : en utilisant le formalisme mathématique des distributions (cf. par exemple [Appel 2005](#)), on peut voir la condition (1.33) comme une conséquence de la *condition initiale*

$$\rho_a(\bar{\mathbf{x}}, t = 0) = m_a \delta \quad (1.34)$$

avec  $\delta$  la distribution de Dirac, et des propriétés de conservation de l'équation (1.31).

**1.4** Tracez l'allure des profils  $\rho_a(|\bar{\mathbf{x}}|, t)$  au cours du temps. En lien avec le commentaire précédent, que se passe-t-il lorsque  $t \rightarrow 0^+$  ?..

**1.5** Un village se trouve situé à la hauteur de la bouche de la cheminée, à une distance de 2 kilomètres à vol d'oiseau. Calculez le temps nécessaire pour que la concentration en éléments radioactifs atteigne en ce lieu sa valeur maximale, et donnez alors l'ordre de grandeur de ce « pic de concentration », sachant que  $m_a = 100$  g.

Vous prendrez ensuite un peu de recul pour critiquer cette application numérique et ce modèle.

**2** On considère le même phénomène de pollution, mais dans une atmosphère soumise à un *vent* que l'on suppose en première approximation uniforme

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = U \bar{\mathbf{e}}_1 . \quad (1.35)$$

**2.1** Expliquez ce qui change par rapport à la partie 1, et montrez que la solution de (1.31) est maintenant de la forme

$$\rho_a = A t^{-3/2} \exp\left[-\frac{(x_1 - Ut)^2 + x_2^2 + x_3^2}{4Dt}\right], \quad (1.36)$$

où  $A$  est la constante calculée en 1.3.

**2.2** En supposant que (malheureusement!) le village dont il était question en 1.5 est « sous le vent » en provenance de l'usine, reprenez cette question 1.5. Pour l'application numérique vous supposerez que  $U = 20$  km/h.

*Indication* : vous aurez intérêt à faire apparaître le *nombre de Péclet*<sup>36</sup>

$$\text{Pe} = \frac{UL}{D}$$

où  $L = 2$  km est la distance entre l'usine et le village.

Là encore on vous demande de prendre un peu de recul et de dégager si possible la « morale » de ces études.

## 1.4 Notes personnelles

---

36. Physicien français du XIX<sup>ème</sup> siècle.





## Chapitre 2

# Cinématique avancée : étude des déformations

Une approche « locale » de la cinématique semble a priori intéressante dans le cadre de la mécanique des milieux continus, puisqu'elle permettra sans doute de développer toutes les méthodes puissantes de l'analyse vectorielle et tensorielle (cf. le cours de calcul tensoriel) pour écrire puis résoudre de « bons modèles ». D'un point de vue moins mathématique mais plus physique, il importe d'être capable de discriminer entre les mouvements qui déforment et ceux qui ne déforment pas, et mieux, de pouvoir dire que tel mouvement déforme plus qu'un autre. En effet, si je prends un barreau d'acier par exemple entre mes mains, je sais qu'il sera aisé pour moi de le déplacer en bloc sans le déformer, c'est-à-dire que j'obtiendrais ce mouvement en appliquant des forces d'intensité faible, alors qu'au contraire je ne pourrais le déformer de façon mesurable qu'au prix d'un gros effort, et à la condition d'être un athlète. En d'autres termes, pour être capable de prédire le lien entre forces appliquées à un matériau et mouvements de ce matériau<sup>1</sup>, il faut être capable de définir précisément et de façon quantitative ce que sont les « *déformations* » dans un mouvement général de milieu continu. C'est exactement ce que nous allons faire dans ce chapitre. Comme nous avons l'ambition de traiter à la fois des solides et des fluides, il nous faudra faire l'effort de développer une étude systématique des phénomènes de déformation à la fois avec l'approche lagrangienne et l'approche eulerienne.

### 2.1 Étude lagrangienne des déformations

#### 2.1.1 Transport lagrangien d'un petit segment : tenseur gradient de la transformation

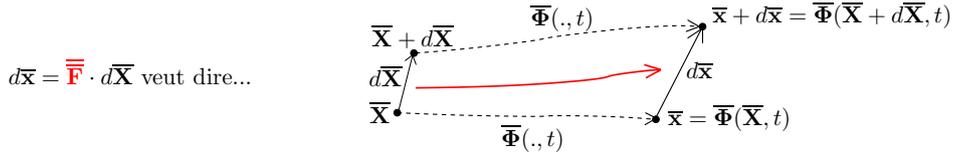
Dans une approche « locale » du mouvement décrit de façon lagrangienne par l'application

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\cdot, t) : D_0 &\longrightarrow D_t \\ \bar{\mathbf{X}} &\longmapsto \bar{\mathbf{x}} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

il est naturel de se poser la question du *transport d'un petit segment de matière*  $d\bar{\mathbf{X}}$  d'origine  $\bar{\mathbf{X}}$ . A priori, comme cela est représenté sur la figure 2.1, il sera transformé en une courbe d'origine  $\bar{\mathbf{x}}$  et d'extrémité  $\bar{\mathbf{x}} + d\bar{\mathbf{x}}$ , d'autant plus proche d'un segment que  $d\bar{\mathbf{X}}$  est petit. D'après la définition du

---

1. Sans parler du problème de la *rupture* des matériaux, qui présentent tous des capacités de déformations limitées!...



**Fig. 2.1** – Figure illustrant la définition intrinsèque (2.4) du *gradient* (lagrangien) *de la transformation* :  $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$  - sous-entendu au point  $\bar{\mathbf{X}}$  - est l'application linéaire qui à la différence de position initiale  $d\bar{\mathbf{X}}$  fait correspondre la différence de position actuelle  $d\bar{\mathbf{x}}$ . C'est donc l'application linéaire représentée par la flèche épaisse.

gradient d'un champ de vecteurs donnée dans la section 2.2 du cours de calcul tensoriel, en prenant la convention du calcul différentiel qui consiste à ne pas rappeler l'existence de termes correctifs supposés « infiniment petits » parce que  $d\bar{\mathbf{X}}$  est « infiniment petit », il existe une relation linéaire entre  $d\bar{\mathbf{X}}$  et  $d\bar{\mathbf{x}}$ , soit

$$d\bar{\mathbf{x}} = \bar{\bar{\nabla}}_{\mathbf{X}} \bar{\Phi}(., t) \cdot d\bar{\mathbf{X}} . \quad (2.2)$$

On définit donc le *tenseur* d'ordre 2 *gradient de la transformation*

$$\boxed{\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \bar{\bar{\mathbf{F}}}(\bar{\mathbf{X}}, t) = \bar{\bar{\nabla}}_{\mathbf{X}} \bar{\Phi}(., t)} \quad (2.3)$$

qui régit le transport d'un (tout) petit segment de matière d'origine  $\bar{\mathbf{X}}$  selon

$$\boxed{\bar{\bar{\mathbf{F}}} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3} \\ \boxed{d\bar{\mathbf{X}} \longmapsto d\bar{\mathbf{x}} = \bar{\bar{\mathbf{F}}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}} . \quad (2.4)$$

Comme tous les tenseurs introduits dans cette section 2.1,  $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$  est un *tenseur « lagrangien »* c'est-à-dire un champ tensoriel dépendant de  $\bar{\mathbf{X}} \in D_0$  et  $t$ . En repère orthonormé, d'après le cours de calcul tensoriel, on a

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j , \quad (2.5)$$

que l'on note parfois de façon légèrement abusive

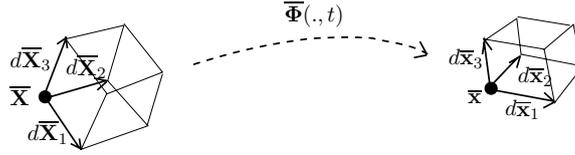
$$\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j . \quad (2.6)$$

En raisonnant en physicien, le fait que le milieu continu garde son intégrité localement autour de  $\bar{\mathbf{x}}$  durant le mouvement implique que  $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$  est une application linéaire bijective. Mathématiquement on peut voir cette propriété comme résultant du fait que  $\bar{\Phi}(., t)$  est bijective.

### 2.1.2 Transport lagrangien d'un petit volume : jacobien de la transformation

Avant d'en venir aux déformations elles-mêmes, il importe de se poser la question du *transport lagrangien d'un petit volume*, que l'on peut imaginer construit sur un parallélépipède dont un sommet est  $\bar{\mathbf{X}}$ , et dont les trois côtés de base sont trois petits vecteurs  $d\bar{\mathbf{X}}_1$ ,  $d\bar{\mathbf{X}}_2$  et  $d\bar{\mathbf{X}}_3$ . Comme cela est représenté sur la figure 2.2, ces petits vecteurs, qui sont en fait des petits segments de matière d'origine  $\bar{\mathbf{X}}$ , se transforment en petits vecteurs  $d\bar{\mathbf{x}}_1$ ,  $d\bar{\mathbf{x}}_2$  et  $d\bar{\mathbf{x}}_3$  d'origine

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t)$$



**Fig. 2.2** – Représentation du phénomène de *transport lagrangien d'un petit volume parallélépipédique*.

avec, d'après (2.4),

$$d\bar{x}_i = \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}_i . \quad (2.7)$$

Le volume initial peut se calculer à l'aide du produit mixte des vecteurs  $d\bar{\mathbf{X}}_1$ ,  $d\bar{\mathbf{X}}_2$  et  $d\bar{\mathbf{X}}_3$ , soit le déterminant des vecteurs colonnes représentant ces trois vecteurs dans une base quelconque

$$d^3X = \det([dX_1], [dX_2], [dX_3]) = \det([M]) , \quad (2.8)$$

en utilisant les notations du chapitre 1 du cours de calcul tensoriel, et en appelant  $[M]$  la matrice formée par les trois vecteurs colonnes  $[dX_1]$ ,  $[dX_2]$  et  $[dX_3]$ . Le volume actuel, pour les mêmes raisons et en vertu de (2.7), s'écrit

$$\begin{aligned} d^3x &= \det([dx_1], [dx_2], [dx_3]) \\ &= \det([F] \cdot [dX_1], [F] \cdot [dX_2], [F] \cdot [dX_3]) \\ &= \det([F] \cdot [M]) \\ d^3x &= \det([F]) \det([M]) \end{aligned} \quad (2.9)$$

d'après la théorie des déterminants. Au bilan on a, en introduisant le *jacobien de la transformation*<sup>2</sup>

$$\boxed{J = \det([F]) \text{ noté aussi } \det \bar{\mathbf{F}} ,} \quad (2.10)$$

que

$$\boxed{d^3x = J d^3X} . \quad (2.11)$$

Le champ lagrangien scalaire  $J$ , qui dépend de  $\bar{\mathbf{X}}$  et  $t$ , est la *dilatation volumique* dans le mouvement entre  $D_0$  et  $D_t$  :

- $J$  est toujours strictement positif car un trièdre direct reste toujours direct<sup>3</sup> ;
- $J > 1$  indique une *dilatation* locale ;
- $J < 1$  indique une *contraction* locale.

2. C'est bien une quantité scalaire intrinsèque qui ne dépend pas, d'après la théorie des déterminants, du choix de la base utilisée. On dit aussi que c'est un *invariant* du tenseur  $\bar{\mathbf{F}}$ . Un autre exemple d'invariant de  $\bar{\mathbf{F}}$  est sa trace  $\text{tr} \bar{\mathbf{F}}$ .

3. Lors d'un mouvement on reste toujours du même côté du miroir, n'en déplaise à Lewis Carroll! Mathématiquement, pour  $\bar{\mathbf{X}}$  fixé dans  $D_0$ , considérons la fonction continue  $j : t \mapsto J(\bar{\mathbf{X}}, t)$ . À  $t = t_0$  instant initial ou de référence,  $\bar{\Phi}(\cdot, t_0)$  se réduit à l'identité, donc  $\bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{X}}, t_0) = \bar{\mathbf{I}}$  et  $j(t_0) = \det \bar{\mathbf{I}} = 1$ . Comme  $\bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$  est une bijection, son déterminant  $j(t)$  ne peut s'annuler. L'image continue de  $[t_0, t]$  par  $j$  doit donc être un intervalle de la forme  $[j_1, j_2]$  avec  $0 < j_1 \leq 1 \leq j_2$ .

### 2.1.3 Transport lagrangien d'un produit scalaire : tenseur des dilatations de Cauchy

Nous sommes maintenant à même de faire (en description lagrangienne) la discrimination évoquée en introduction de ce chapitre entre mouvements qui déforment et mouvements qui ne déforment pas. Requérir que le gradient de la transformation  $\bar{\mathbf{F}}$  soit égal à l'identité dans un mouvement qui ne déforme pas est trop restrictif, car avec ce critère on écarte des mouvements de rotation, de la forme

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_0 + \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{X}}, \quad (2.12)$$

qui pourtant ne déforment pas. Dans un tel mouvement, cas particulier de « *transformation homogène* » telle que

$$\begin{aligned} & \text{les composantes de } \bar{\mathbf{x}} \text{ dépendent de façon affine des composantes de } \bar{\mathbf{X}} \\ \iff & \bar{\mathbf{F}} \text{ ne dépend pas de } \bar{\mathbf{X}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

on a

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{R}} \text{ rotation} \quad (2.14)$$

qui n'est pas forcément l'identité!

On peut se convaincre qu'un bon critère de non-déformation locale est celui de la conservation des produits scalaires entre deux petits vecteurs matériels quelconques  $d\bar{\mathbf{X}}$  et  $d\bar{\mathbf{X}}'$  d'origine  $\bar{\mathbf{X}}$ , transportés en  $d\bar{\mathbf{x}}$  et  $d\bar{\mathbf{x}}'$  d'origine  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t)$ , comme le montre la figure 2.3 :

$$\text{le mouvement n'est pas déformant autour de } \bar{\mathbf{X}} \text{ ssi } \forall d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}', \text{ on a } d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}' = d\bar{\mathbf{X}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}'. \quad (2.15)$$

Comme d'après (2.4) on a

$$d\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{X}} \quad \text{et} \quad d\bar{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}', \quad (2.16)$$

il est clair que, d'un point de vue différentiel, l'application qui au couple de petits vecteurs  $d\bar{\mathbf{X}}$  et  $d\bar{\mathbf{X}}'$  fait correspondre

$$d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}' = \left( \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{X}} \right) \cdot \left( \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}' \right) \quad (2.17)$$

est une *forme bilinéaire*. C'est donc un tenseur d'ordre 2 d'après le cours de calcul tensoriel. On l'appelle *tenseur des dilatations de Cauchy*<sup>4</sup> et on le note  $\bar{\mathbf{C}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$  ou  $\bar{\mathbf{C}}$  :

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} & : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}') & \longmapsto \bar{\mathbf{C}}(d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}') = d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}' \end{aligned}} \quad (2.18)$$

D'après l'équation (2.17) et le cours de calcul tensoriel<sup>5</sup>, on peut écrire que

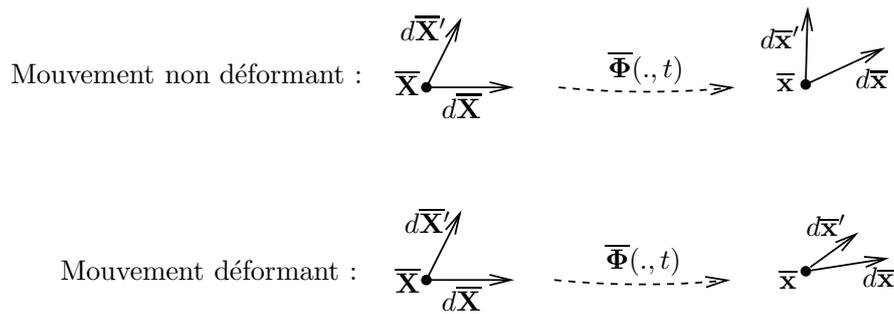
$$\boxed{d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}' = d\bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}' \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}}}, \quad (2.19)$$

soit en base orthonormée

$$\bar{\mathbf{C}} = F_{ki} F_{kj} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j. \quad (2.20)$$

4. En l'honneur du mathématicien français du XIX<sup>ème</sup> qui contribua aussi à la mécanique, plus précisément à la théorie des solides élastiques.

5. En particulier on adopte une écriture « en *sandwich* » introduite dans la section 1.4.1 de Plaut (2021a).



**Fig. 2.3** – Représentation du phénomène de *transport lagrangien du produit scalaire* entre deux petits vecteurs. Dans le cas de la figure supérieure, le produit scalaire est conservé, dans le cas de la figure inférieure, il est modifié.

Le critère (2.15) se traduit donc par

$$\boxed{\text{le mouvement n'est pas déformant autour de } \bar{\mathbf{X}} \text{ ssi } \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{I}}}. \quad (2.21)$$

En termes géométriques ceci équivaut à requérir que  $\bar{\mathbf{F}}$  soit une transformation orthogonale ; comme elle doit être directe pour des raisons physiques<sup>6</sup>, il s'agit forcément d'une *rotation*.

En revenant au cas général d'un mouvement quelconque, éventuellement déformant, on peut remarquer que  $\bar{\mathbf{C}}$  est toujours un *tenseur symétrique* associé à une *forme quadratique définie positive*. En effet

$$\forall d\bar{\mathbf{X}} \neq \bar{\mathbf{0}}, \quad \bar{\mathbf{C}}(d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}) = d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} = \|d\bar{\mathbf{x}}\|^2 = \|\bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}\|^2 > 0. \quad (2.22)$$

Cette forme quadratique a une interprétation immédiate qui justifie le nom donné à  $\bar{\mathbf{C}}$  :

$$\lambda(d\bar{\mathbf{X}}) = \frac{\|d\bar{\mathbf{x}}\|}{\|d\bar{\mathbf{X}}\|} = \sqrt{\frac{\bar{\mathbf{C}}(d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}})}{d\bar{\mathbf{X}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}}} = \begin{cases} \textit{dilatation} & \text{dans la direction } d\bar{\mathbf{X}} & \text{si } \lambda > 1 \\ \textit{contraction} & \text{dans la direction } d\bar{\mathbf{X}} & \text{si } \lambda < 1 \end{cases}. \quad (2.23)$$

Une autre conséquence du fait que  $\bar{\mathbf{C}}$  symétrique définit une forme quadratique définie positive est que  $\bar{\mathbf{C}}$  peut se diagonaliser sur une base orthonormée, ses valeurs propres étant strictement positives, et s'interprétant à la façon de (2.23). On reviendra sur l'interprétation générale des composantes du tenseur  $\bar{\mathbf{C}}$  dans l'exercice 2.1.

De manière générale, certains mécaniciens parlent de « *directions principales* » pour désigner les vecteurs propres d'un tenseur d'ordre 2, et de « *valeurs principales* » pour désigner les valeurs propres d'un tenseur d'ordre 2. On reviendra sur ce vocabulaire, et sur une représentation possible d'un tenseur symétrique d'ordre 2, dans la section 3.2.8.

<sup>6</sup> Mathématiquement, on a vu dans la section précédente que  $J = \det \bar{\mathbf{F}}$  est toujours strictement positif. Comme  $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{I}}$  implique que  $J^2 = 1$ , on ne peut qu'avoir  $J = +1$ .

### 2.1.4 Variation lagrangienne d'un produit scalaire : tenseur des déformations de Green-Lagrange

Le *tenseur de Green-Lagrange*<sup>7</sup> est défini en tant que *forme bilinéaire*, avec les mêmes notations que dans la section précédente, par

$$\bar{\bar{\mathbf{e}}} : (d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}') \mapsto \bar{\bar{\mathbf{e}}}(d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}') = \frac{1}{2}(d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}' - d\bar{\mathbf{X}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}') . \quad (2.24)$$

Il dépend de  $\bar{\mathbf{X}}$  et  $t$ , et permet de mesurer les variations des produits scalaires entre petits vecteurs d'origine  $\bar{\mathbf{X}}$  transportés par le mouvement en  $\bar{\mathbf{x}}$  à l'instant  $t$ . En écrivant que

$$d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}' - d\bar{\mathbf{X}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}' = 2d\bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}' , \quad (2.25)$$

on a, d'après les définitions de la section précédente,

$$\bar{\bar{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{\mathbf{C}}} - \bar{\mathbf{1}}) = \frac{1}{2}(\bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}} - \bar{\mathbf{1}}) \quad (2.26)$$

et

$$\text{le mouvement n'est pas déformant autour de } \bar{\mathbf{X}} \text{ ssi } \bar{\bar{\mathbf{e}}} = \bar{\mathbf{0}} . \quad (2.27)$$

De même que  $\bar{\bar{\mathbf{C}}}$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{e}}}$  est toujours un *tenseur symétrique*. Il s'écrit en composantes en repère orthonormé

$$\bar{\bar{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij}) \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j . \quad (2.28)$$

Il correspond à une *forme quadratique* définie par

$$d\bar{\mathbf{X}} \mapsto \bar{\bar{\mathbf{e}}}(d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2}(d\bar{\mathbf{x}}^2 - d\bar{\mathbf{X}}^2) , \quad (2.29)$$

égalité qui permet d'identifier la signification physique des vecteurs propres et valeurs propres de  $\bar{\bar{\mathbf{e}}}$ .

### 2.1.5 Mouvements de solide indéformable : approche par étude directe

Un *solide indéformable* est défini par la conservation, non seulement des produits scalaires entre petits vecteurs  $d\bar{\mathbf{X}}$  et  $d\bar{\mathbf{X}}'$ , mais plus par la conservation des produits scalaires entre segments quelconques (de taille éventuellement finie)  $\overline{\mathbf{A}_0\mathbf{M}_0}$  et  $\overline{\mathbf{A}_0\mathbf{M}'_0}$  :

$$\forall \mathbf{A}_0, \mathbf{M}_0, \mathbf{M}'_0 \in D_0 , \forall t, \quad \overline{\mathbf{A}_0\mathbf{M}_0} \cdot \overline{\mathbf{A}_0\mathbf{M}'_0} = \overline{\mathbf{A}\mathbf{M}} \cdot \overline{\mathbf{A}\mathbf{M}'} \quad (2.30)$$

en notant  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{M}'$  les positions actuelles, à l'instant  $t$ , de  $\mathbf{A}_0$ ,  $\mathbf{M}_0$  et  $\mathbf{M}'_0$ . À  $\mathbf{A}_0$  et  $t$  fixé, définissons le champ de vecteurs

$$\bar{\mathbf{f}}(\overline{\mathbf{A}_0\mathbf{M}_0}) = \overline{\mathbf{A}\mathbf{M}} . \quad (2.31)$$

On a, en vertu de (2.30), que  $\bar{\mathbf{f}}$  est une application vectorielle « orthogonale » au sens où

$$\forall \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}, \quad \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{v}}) . \quad (2.32)$$

7. Green est un mathématicien et physicien anglais du XIX<sup>ème</sup> siècle.

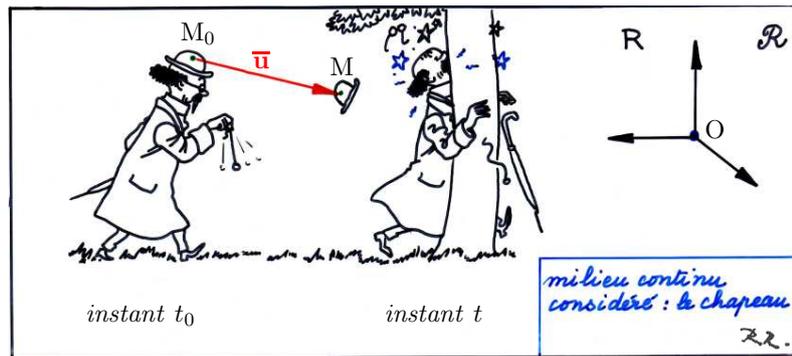


Fig. 2.4 – Figure illustrant la définition (2.35) du **déplacement**  $\bar{\mathbf{u}}$  d'un point matériel.

Montrons qu'une telle application est toujours linéaire. Pour cela on remarque que l'image d'une base orthonormée  $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$  par  $\bar{\mathbf{f}}$  est une base orthonormée, soit  $\{\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{e}}_i)\}$ . Soient maintenant  $x_1, x_2, x_3$  trois scalaires quelconques. Considérons le vecteur

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{f}}(x_i \bar{\mathbf{e}}_i) - x_i \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{e}}_i).$$

On a, par orthogonalité de  $\bar{\mathbf{f}}$ ,

$$\forall j, \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{e}}_j) \cdot \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{e}}_j \cdot x_i \bar{\mathbf{e}}_i - x_i \bar{\mathbf{e}}_j \cdot \bar{\mathbf{e}}_i = x_j - x_j = 0, \text{ d'où } \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{0}}, \text{ CQFD.}$$

On peut donc introduire un tenseur  $\bar{\bar{\mathbf{L}}}$  tel que

$$\forall \mathbf{M}, \overline{\mathbf{AM}} = \bar{\bar{\mathbf{L}}} \cdot \overline{\mathbf{A_0M_0}} \iff \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_A = \bar{\bar{\mathbf{L}}} \cdot (\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}}_A), \quad (2.33)$$

c'est-à-dire que l'on a affaire à une transformation homogène au sens de (2.13). Dans ce cas on a identité entre  $\bar{\bar{\mathbf{L}}}$  et le tenseur gradient de la transformation  $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$ , qui est une transformation orthogonale d'après (2.30). Cette transformation doit être directe pour des raisons physiques, c'est donc une **rotation** que l'on note  $\bar{\bar{\mathbf{R}}}$ . Au bilan on a donc un mouvement de **translation-rotation** en bloc

$$\boxed{\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_A + \bar{\bar{\mathbf{R}}} \cdot (\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}}_A)} \quad (2.34)$$

comme on l'a appris en classes préparatoires<sup>8</sup>.

### 2.1.6 Champ de déplacements - Hypothèse de petite transformation

En mécanique des solides on a souvent affaire à des « petits » mouvements au sens où les déplacements des points matériels restent « petits ». Pour être capable de formaliser ceci, en vue d'une exploitation éventuelle, il est donc intéressant de définir, comme cela est illustré sur la figure 2.4, le **champ de déplacements** des points matériels

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{\mathbf{u}}(\cdot, t) : D_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \bar{\mathbf{X}} \longmapsto \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t) = \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t) - \bar{\mathbf{X}} \end{array}} \quad (2.35)$$

8. On peut remarquer que les « démonstrations » données en classes préparatoires pour aboutir à ce résultat sont souvent déficientes : en effet elles supposent implicitement la linéarité de l'application  $\bar{\mathbf{f}}$  introduite ci-dessus, linéarité qui n'est pas si évidente.

L'*hypothèse des petits déplacements* consistera à poser que

$$\boxed{\forall \bar{\mathbf{X}} \in D_0, \quad \|\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t)\| \ll L \text{ taille caractéristique du système}} . \quad (2.36)$$

De manière générale on peut constater que, par définition même,

$$\bar{\nabla}_{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{u}}(., t) = \bar{\nabla}_{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\Phi}(., t) - \bar{\mathbf{1}},$$

d'où, en vertu de (2.3), le fait que le *tenseur gradient de la transformation*

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{1}} + \bar{\nabla}_{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{u}}(., t) .$$

On notera plutôt, en allégeant les notations,

$$\boxed{\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{1}} + \bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}}} . \quad (2.37)$$

En insérant cette égalité dans la définition (2.19) du *tenseur des dilatations de Cauchy*, on obtient que celui-ci vaut

$$\boxed{\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{1}} + \bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}}^T + \bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}}^T \cdot \bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}}} . \quad (2.38)$$

En conséquence (2.26) montre que le *tenseur des déformations de Green-Lagrange* vaut

$$\boxed{\bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}}^T + \bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}}^T \cdot \bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}})} . \quad (2.39)$$

Cette réécriture de  $\bar{\mathbf{e}}$ , dont on rappelle que la signification physique est donnée par

$$d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}' - d\bar{\mathbf{X}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}' = 2d\bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\mathbf{e}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}'$$

avec les notations de la section 2.1.4, montre que, en général, l'ordre de grandeur de  $\bar{\mathbf{e}}$  est celui de  $\bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}}$ . On définit en conséquence l'*hypothèse de petite transformation* par

$$\boxed{\forall \bar{\mathbf{X}} \in D_0, \quad \|\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{1}}\| \ll 1 \iff \|\bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}}\| \ll 1} . \quad (2.40)$$

Techniquement la norme utilisée pour mesurer l'ordre de grandeur du tenseur  $\bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}}$  importe peu, puisque l'espace des tenseurs d'ordre 2 est de dimension finie, égale à 9 (on peut ici raisonner en termes de matrice), donc toutes les normes sont équivalentes sur cet espace. En pratique on raisonnera souvent à l'aide d'une norme infinie<sup>9</sup> et en utilisant un repère orthonormé, d'où la traduction suivante de l'hypothèse de petite transformation :

$$\boxed{\forall \bar{\mathbf{X}} \in D_0, \forall i, j, \quad \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \ll 1} . \quad (2.41)$$

9. Non induite, i.e.,  $\|\bar{\mathbf{L}}\|_\infty = \max_{i,j}(L_{ij})$ .

### 2.1.7 Petites déformations - Tenseur des déformations linéarisé

Dans cette sous-section on se place dans l'hypothèse de *petite transformation*, qui implique celle des *petites déformations*<sup>10</sup>,

$$\boxed{\|\bar{\epsilon}\| \ll 1} . \quad (2.42)$$

Une autre conséquence de l'hypothèse de petite transformation est que le dernier terme dans l'expression (2.39) peut être négligé devant les deux premiers, i.e.

$$\bar{\mathbf{e}} \simeq \bar{\bar{\mathbf{e}}} \quad (2.43)$$

avec

$$\boxed{\bar{\bar{\mathbf{e}}} = \bar{\bar{\mathbf{e}}}(\bar{\mathbf{X}}, t) = \frac{1}{2}(\bar{\bar{\nabla}}\bar{\mathbf{u}} + \bar{\bar{\nabla}}\bar{\mathbf{u}}^T)} \quad (2.44)$$

le *tenseur des déformations linéarisé*. Sa signification physique se déduit de celle de  $\bar{\mathbf{e}}$  : en petite transformation on a

$$\boxed{d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}' - d\bar{\mathbf{X}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}' \simeq 2d\bar{\mathbf{X}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{e}}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}'} . \quad (2.45)$$

En base orthonormée, en prenant par exemple

$$d\bar{\mathbf{X}} = d\bar{\mathbf{X}}' = dX \bar{\mathbf{e}}_1 , \quad (2.46)$$

on obtient

$$dx^2 = \|d\bar{\mathbf{x}}\|^2 \simeq dX^2 + 2 dX^2 \epsilon_{11} ,$$

soit, en prenant la racine carré de cette équation, et en utilisant le fait que  $\bar{\bar{\mathbf{e}}} \ll 1$ ,

$$\frac{dx}{dX} \simeq 1 + \epsilon_{11} . \quad (2.47)$$

Ainsi  $\epsilon_{11}$  est l'*allongement réduit* s'il est positif, ou *rétrécissement réduit*<sup>11</sup> s'il est négatif, dans la direction initiale  $\bar{\mathbf{e}}_1$ .

D'autre part, en prenant

$$d\bar{\mathbf{X}} = dX \bar{\mathbf{e}}_1 \quad \text{et} \quad d\bar{\mathbf{X}}' = dX \bar{\mathbf{e}}_2 , \quad (2.48)$$

on obtient, en vertu de (2.45),

$$d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}' \simeq 2 dX^2 \epsilon_{12} .$$

Introduisant l'angle de *glissement*  $\theta$  tel que

$$(\widehat{d\bar{\mathbf{x}}, d\bar{\mathbf{x}}'}) = \frac{\pi}{2} - \theta ,$$

il vient

$$\|d\bar{\mathbf{x}}\| \|d\bar{\mathbf{x}}'\| \sin \theta \simeq 2 dX^2 \epsilon_{12} ,$$

soit à l'ordre le plus bas en  $\bar{\bar{\mathbf{e}}}$ ,

$$\theta \simeq \sin \theta \simeq 2 \epsilon_{12} . \quad (2.49)$$

10. La réciproque n'est pas vraie, comme cela sera discuté au niveau de l'équation (2.54). Sur ce sujet on méditera aussi la discussion autour des équations (2.64) et (2.65).

11. Certains utilisent la terminologie « *allongement relatif* » ou « *rétrécissement relatif* ».

Un exemple de mouvement local déformant plan est donné sur la figure 2.5.

On remarque aussi que, d'après le résultat de l'exercice 1.10 de calcul tensoriel, on a, pour le jacobien de la petite transformation, c'est-à-dire la *dilatation volumique*,

$$J = \det \bar{\mathbf{F}} = \det \left( \bar{\mathbf{1}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} \right) \simeq 1 + \text{tr} \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} = 1 + \text{div} \bar{\mathbf{u}} . \quad (2.50)$$

Ceci permet une interprétation physique de la *divergence du champ de déplacements*.

On note pour terminer une simplification qui se révélera utile en petite transformation : on peut en première approximation considérer que

$$\bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \simeq \bar{\nabla}_{\mathbf{x}} , \quad (2.51)$$

à condition naturellement que  $\bar{\mathbf{X}}$  et  $\bar{\mathbf{x}}$  se correspondent par  $\bar{\Phi}$ ,

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t) .$$

En effet, si on considère par exemple le champ de déplacements  $\bar{\mathbf{u}}$ , on a, en vertu de la formule (2.10) du cours de calcul tensoriel, et par composition des dérivées partielles,

$$\bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_k} \otimes \bar{\mathbf{e}}_k = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \otimes \bar{\mathbf{e}}_k = F_{ik} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_i} \otimes \bar{\mathbf{e}}_k .$$

Comme  $\bar{\mathbf{F}}$  est très proche de l'identité du fait de l'hypothèse de petite transformation (2.40), on obtient bien, en première approximation,

$$\bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{u}} \simeq \delta_{ik} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_i} \otimes \bar{\mathbf{e}}_k = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_k} \otimes \bar{\mathbf{e}}_k = \bar{\nabla}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{u}} .$$

Ceci simplifiera les études réalisées en petits déplacements et transformations : on pourra confondre  $\bar{\mathbf{X}}$  et  $\bar{\mathbf{x}}$  dans le calcul de  $\bar{\mathbf{e}}$ .

### 2.1.8 Déplacements d'un solide indéformable

D'après le résultat de la section 2.1.5, le champ de déplacements d'un solide indéformable peut s'écrire en général sous la forme

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{u}}_0 + \left( \bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{1}} \right) \cdot \bar{\mathbf{X}} \quad (2.52)$$

où  $\bar{\mathbf{R}}$  est une rotation. On a alors

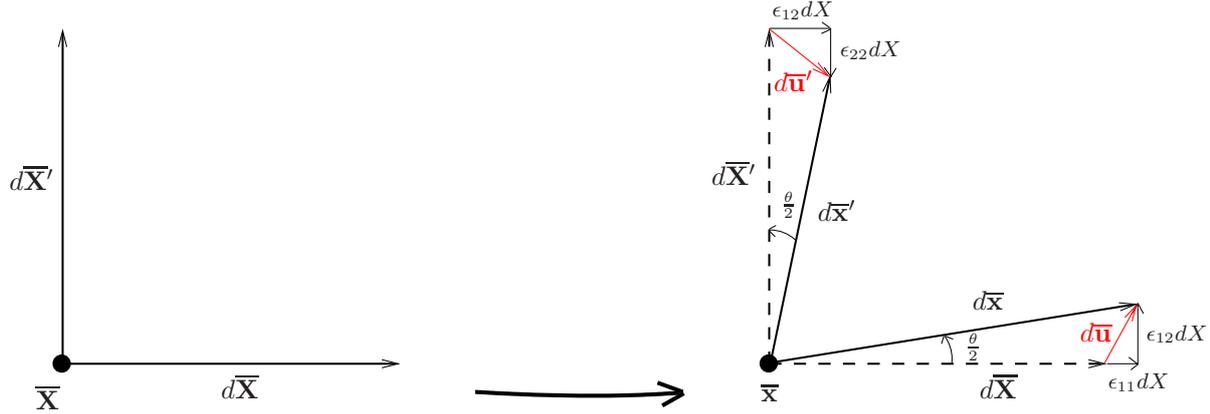
$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{R}} . \quad (2.53)$$

Ceci permet de donner un exemple de mouvement satisfaisant l'hypothèse des petites déformations<sup>12</sup>, puisque

$$\bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \left( \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{1}} \right) = \bar{\mathbf{0}} \ll 1 , \quad (2.54)$$

sans pour autant satisfaire l'hypothèse de petite transformation, puisque, si  $\bar{\mathbf{R}}$  est une rotation d'angle  $\pi$  (autour d'un certain axe),  $\bar{\mathbf{F}}$  est très différente de l'identité.

12. Pas étonnant pour un solide justement indéformable!



**Fig. 2.5** – Représentation locale d'un *mouvement plan déformant sans rotation*, i.e.  $\bar{\Omega} = \bar{\mathbf{0}}$  avec les notations de la section 2.1.9. Les petits segments de matière dans la configuration de référence sont pris dans les directions des axes de coordonnées, et de normes égales, c'est-à-dire donnés par l'équation (2.48). Cette figure permet de visualiser les composantes  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$  et  $\epsilon_{12}$  du *tenseur des déformations linéarisé*, ainsi que l'angle de *glissement*  $\theta$ .

Si on se place maintenant en hypothèse de *petite transformation*, on a (2.43) donc

$$\bar{\epsilon} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (2.55)$$

En conséquence la décomposition en parties symétrique et antisymétrique de gradient de  $\bar{\mathbf{u}}$ , comme elle est décrite section 2.2 du cours de calcul tensoriel, se réduit à

$$\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} = \bar{\Omega}. \quad (2.56)$$

On en déduit pour le champ de déplacements, en vertu de formules de calcul tensoriel,

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_0 + \bar{\Omega} \cdot \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{u}}_0 + \overline{\text{vd}}(\bar{\Omega}) \wedge \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{u}}_0 + \overline{\text{vd}}(\bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{1}}) \wedge \bar{\mathbf{X}}.$$

En notant simplement  $\bar{\Omega}$  le vecteur dual de  $\bar{\Omega} = \bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{1}}$ , il vient

$$\boxed{\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_0 + \bar{\Omega} \wedge \bar{\mathbf{X}}}, \quad (2.57)$$

qui correspond à une translation pour ce qui est du premier terme, et à une rotation infinitésimale pour ce qui est du second terme. Un champ de cette forme (2.57), qui correspond à la solution générale de l'équation

$$\bar{\epsilon} = \bar{\mathbf{0}} \iff \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T = \bar{\mathbf{0}}, \quad (2.58)$$

est appelé « *champ de moments* ». On peut noter que

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot}} \bar{\mathbf{u}}.$$

### 2.1.9 Décomposition locale d'un champ de déplacements général

En règle générale, autour d'un point  $\bar{\mathbf{X}}$  donné, on peut écrire que

$$d\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}} + d\bar{\mathbf{X}}) - \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}) = \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} \cdot d\bar{\mathbf{X}} \quad (2.59)$$

et décomposer  $\overline{\nabla \mathbf{u}}$  en parties symétrique et antisymétrique, comme expliqué section 2.2 du cours de calcul tensoriel. On écrit donc que

$$\boxed{\overline{\nabla \mathbf{u}} = \overline{\boldsymbol{\epsilon}} + \overline{\boldsymbol{\Omega}}}, \quad (2.60)$$

d'où, en posant

$$\overline{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot } \mathbf{u}}, \quad (2.61)$$

la formule locale

$$\boxed{d\overline{\mathbf{u}} = \overline{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot d\overline{\mathbf{X}} + \overline{\boldsymbol{\Omega}} \wedge d\overline{\mathbf{X}}}. \quad (2.62)$$

Cette formule, qui s'explique en repère orthonormé sous la forme

$$du_i = \epsilon_{ij} dX_j + \epsilon_{ijk} \Omega_j dX_k, \quad (2.63)$$

montre que localement on peut décomposer les déplacements en une *déformation infinitésimale* (terme  $\overline{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}$ ) et une *rotation infinitésimale* (terme  $\overline{\boldsymbol{\Omega}} \wedge d\overline{\mathbf{X}}$ ). On méditera à ce sujet les figures 2.5 de ce document et 2.2 du cours de calcul tensoriel.

On peut conclure cette étude lagrangienne en remarquant que l'hypothèse

$$\textit{petite transformation} : \quad \left\| \overline{\nabla \mathbf{u}} \right\| \ll 1, \quad (2.64)$$

est équivalente aux hypothèses

$$\begin{aligned} \textit{petite déformation linéarisée} : \quad & \left\| \overline{\boldsymbol{\epsilon}} \right\| \ll 1 \\ \text{et } \textit{petite rotation} : \quad & \left\| \overline{\boldsymbol{\Omega}} \right\| \ll 1. \end{aligned} \quad (2.65)$$

## 2.2 Étude eulerienne des déformations

### 2.2.1 Transport d'un petit segment : tenseur gradient de vitesse

Considérons, avec les notations de la section 2.1.1, un petit segment de matière  $d\overline{\mathbf{x}}$  transporté par le mouvement du milieu continu considéré. D'une certaine façon il faudrait peut-être mieux le noter  $d\overline{\mathbf{x}}(t)$  puisqu'il dépend du temps, comme cela est représenté sur la figure 2.6. Avec l'approche eulerienne, il est naturel de vouloir calculer la dérivée particulaire

$$\frac{d(d\overline{\mathbf{x}})}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{d\overline{\mathbf{x}}(t+dt) - d\overline{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}} + d\overline{\mathbf{x}}) - \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}). \quad (2.66)$$

En introduisant le *tenseur gradient de vitesse*

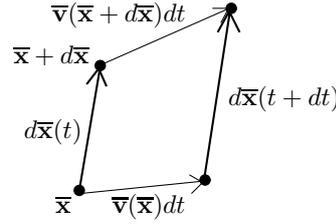
$$\boxed{\overline{\mathbf{K}} = \overline{\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}}} \quad (2.67)$$

on obtient

$$\boxed{\frac{d(d\overline{\mathbf{x}})}{dt} = \overline{\mathbf{K}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}}. \quad (2.68)$$

Comme tous les tenseurs introduits dans cette section 2.2,  $\overline{\mathbf{K}}$  est un *tenseur « eulerien »* c'est-à-dire un champ tensoriel dépendant de  $\overline{\mathbf{x}} \in D_t$  et  $t$ . D'après le cours de calcul tensoriel, si on travaille en repère orthonormé on a

$$\overline{\mathbf{K}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j. \quad (2.69)$$



**Fig. 2.6** – Représentation du phénomène de *transport d'un petit segment de matière*  $d\bar{x}$ , entre deux instants très proches  $t$  et  $t + dt$ .

### 2.2.2 Transport d'un champ de vecteurs : dérivée particulaire

Il est temps d'étendre la formule (1.30) établie dès le chapitre 1 pour le transport d'un champ scalaire au cas plus compliqué du transport d'un champ de vecteurs. Soit donc  $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  un tel champ ; on peut penser au champ de vitesse, ou au champ magnétique dans un métal liquide par exemple. La *dérivée particulaire* de ce champ est définie par

$$\frac{d\bar{\mathbf{b}}}{dt} = \frac{d\bar{\mathbf{b}}(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t), t)}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{b}}}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{b}}}{\partial t} \quad (2.70)$$

en utilisant la composition des dérivées et en travaillant en repère orthonormé  $Ox_1x_2x_3$ . Or  $\partial \Phi_i / \partial t$  est la vitesse eulerienne  $v_i$ , donc

$$\frac{d\bar{\mathbf{b}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{b}}}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial \bar{\mathbf{b}}}{\partial t}$$

i.e., de façon plus intrinsèque,

$$\boxed{\frac{d\bar{\mathbf{b}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{b}}}{\partial t} + \left( \bar{\nabla}_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{b}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}}} \quad (2.71)$$

### 2.2.3 Transport d'un petit volume : divergence de la vitesse

Pour calculer la dérivée particulaire d'un petit volume on considère le cas d'un tel volume parallélépipédique rectangle construit à l'instant  $t$  sur les vecteurs d'une base orthonormée,

$$d\bar{\mathbf{x}}^i(t) = dx \bar{\mathbf{e}}_i ,$$

puis évoluant ensuite avec le milieu continu. On met les indices en haut en écrivant  $d\bar{\mathbf{x}}^i$  pour des raisons purement pratiques qui vont s'éclaircir immédiatement. En utilisant les notations de la section 1.6 du cours de calcul tensoriel, le volume correspondant est

$$d^3x = \bar{\bar{\epsilon}}(d\bar{\mathbf{x}}^1, d\bar{\mathbf{x}}^2, d\bar{\mathbf{x}}^3) = \epsilon_{ijk} dx_i^1 dx_j^2 dx_k^3 . \quad (2.72)$$

En vertu de la trilinearité du déterminant, on obtient, en notant avec un point supérieur la dérivée par rapport au temps

$$\frac{d(d^3x)}{dt} = \epsilon_{ijk} \dot{dx}_i^1 dx_j^2 dx_k^3 + \epsilon_{ijk} dx_i^1 \dot{dx}_j^2 dx_k^3 + \epsilon_{ijk} dx_i^1 dx_j^2 \dot{dx}_k^3 .$$

Dans cette équation on peut injecter (2.68), soit, compte tenu du choix particulier fait à l'instant  $t$ ,

$$\dot{dx}_i^1 = K_{i1} dx , \quad \dot{dx}_j^2 = K_{j2} dx , \quad \dot{dx}_k^3 = K_{k3} dx .$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(dx)^3} \frac{d(d^3x)}{dt} &= \epsilon_{ijk} K_{i1} \delta_{j2} \delta_{k3} + \epsilon_{ijk} \delta_{i1} K_{j2} \delta_{k3} + \epsilon_{ijk} \delta_{i1} \delta_{j2} K_{k3} \\
 &= \epsilon_{i23} K_{i1} + \epsilon_{1j3} K_{j2} + \epsilon_{12k} K_{k3} \\
 &= K_{11} + K_{22} + K_{33} \\
 \frac{1}{d^3x} \frac{d(d^3x)}{dt} &= \text{tr} \overline{\overline{\mathbf{K}}}, \tag{2.73}
 \end{aligned}$$

puisque par exemple la seule valeur de  $i$  qui correspond à  $\epsilon_{i23} \neq 0$  est  $i = 1$ . Or  $\overline{\overline{\mathbf{K}}}$  est le tenseur gradient de  $\overline{\mathbf{v}}$ , donc en vertu de la formule (2.24) du cours de calcul tensoriel, il vient que le coefficient de proportionnalité entre le taux de variation du petit volume et ce volume lui-même est la **divergence de la vitesse**,

$$\boxed{\frac{d(d^3x)}{dt} = (\text{div} \overline{\mathbf{v}}) d^3x}. \tag{2.74}$$

Ceci permet une interprétation valable localement et instantanément de la divergence de la vitesse :

- si  $\text{div} \overline{\mathbf{v}} > 0$  alors on a **dilatation** des volumes ;
- si  $\text{div} \overline{\mathbf{v}} < 0$  alors on a **contraction** des volumes ;
- si  $\text{div} \overline{\mathbf{v}} = 0$  alors on a **conservation** des volumes.

#### 2.2.4 Transport d'un produit scalaire : tenseur des taux de déformation

Avec les notations de la section 2.1.3, calculons la dérivée particulière

$$\frac{d(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}')}{dt} = \frac{d(d\overline{\mathbf{x}})}{dt} \cdot d\overline{\mathbf{x}}' + d\overline{\mathbf{x}} \cdot \frac{d(d\overline{\mathbf{x}}')}{dt}$$

en vertu de la bilinéarité du produit scalaire. En faisant usage de (2.68), il vient

$$\frac{d(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}')}{dt} = (\overline{\overline{\mathbf{K}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}) \cdot d\overline{\mathbf{x}}' + d\overline{\mathbf{x}} \cdot (\overline{\overline{\mathbf{K}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}').$$

On peut mettre le premier terme sous une forme similaire à celle du second terme en utilisant le tenseur  $\overline{\overline{\mathbf{K}}}$  transposé, cf. la section 1.4.2 du cours de calcul tensoriel. Il vient

$$\frac{d(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}')}{dt} = d\overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{K}}}^T \cdot d\overline{\mathbf{x}}' + d\overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{K}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}',$$

en supprimant les parenthèses « inutiles »... En introduisant le **tenseur des taux de déformation**<sup>13</sup>

$$\boxed{\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \frac{1}{2} (\overline{\overline{\mathbf{K}}} + \overline{\overline{\mathbf{K}}}^T) = \frac{1}{2} (\overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}} + \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}}^T)}, \tag{2.75}$$

il vient l'expression de la dérivée particulière d'un produit scalaire entre petits vecteurs,

$$\boxed{\frac{d(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}')}{dt} = 2d\overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}'}. \tag{2.76}$$

13. Parfois appelé aussi **tenseur des vitesses de déformation**.

Le *tenseur symétrique*  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$  peut se diagonaliser sur une base orthonormée. Un cas particulier de la formule (2.76), obtenu lorsque  $d\bar{\mathbf{x}} = d\bar{\mathbf{x}}'$ ,

$$\frac{d\|d\bar{\mathbf{x}}\|^2}{dt} = 2d\bar{\mathbf{x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}, \quad (2.77)$$

permet d'interpréter les composantes diagonales de  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ . Par exemple  $D_{11}$  peut être, en vertu de

$$\frac{d\|dx\bar{\mathbf{e}}_1\|^2}{dt} = 2dx^2 D_{11},$$

vu comme le *taux d'allongement*, s'il est positif, ou *taux de contraction*, s'il est négatif, des petits segments de matière orientés dans la direction  $\bar{\mathbf{e}}_1$ . De même

$$\frac{d(dx\bar{\mathbf{e}}_1 \cdot dx\bar{\mathbf{e}}_2)}{dt} = 2dx^2 D_{12}$$

permet d'identifier  $D_{12}$  à un *taux de glissement* entre deux petits segments orientés dans les directions  $\bar{\mathbf{e}}_1$  et  $\bar{\mathbf{e}}_2$ .

### 2.2.5 Champs de vitesse d'un solide indéformable

D'un point de vue eulerien, un solide indéformable est défini par la conservation des produits scalaires entre segments de matière, petits ou non. Il suffit en fait d'exiger cette conservation pour de petits segments,

$$\forall d\bar{\mathbf{x}}, d\bar{\mathbf{x}}', \quad \frac{d(d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}')}{dt} = 0 \iff d\bar{\mathbf{x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}' = 0 \quad (2.78)$$

en vertu de (2.76), pour être capable de déterminer complètement la structure du champ de vitesse  $\bar{\mathbf{v}}$ . En effet (2.78) donne

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \overline{\overline{\mathbf{0}}} \iff \overline{\overline{\nabla}}\bar{\mathbf{v}} + \overline{\overline{\nabla}}\bar{\mathbf{v}}^T = \overline{\overline{\mathbf{0}}}, \quad (2.79)$$

équation analogue à (2.58) à condition de faire les identifications

$$\overline{\overline{\mathbf{X}}} \rightsquigarrow \bar{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathbf{u}}} \rightsquigarrow \bar{\mathbf{v}}.$$

De même que la solution générale de (2.58) prend la forme (2.57), de même la solution générale de (2.79) est un *champ de moments* de la forme

$$\boxed{\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\boldsymbol{\omega}} \wedge \bar{\mathbf{x}}}. \quad (2.80)$$

Le premier terme correspond à un mouvement de *translation* globale, le second à un mouvement de *rotation*, le vecteur  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  étant le *vecteur vitesse de rotation instantanée*. On peut noter que

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \overline{\overline{\text{rot}}} \bar{\mathbf{v}}.$$

Cette forme (2.80) de champ de vitesse a été étudiée dans la section A.1.2...

### 2.2.6 Décomposition locale d'un champ de vitesse général

De façon analogue à ce qui a été fait dans la section 2.1.9 pour le champ de déplacements autour d'un point  $\bar{\mathbf{X}}$  donné, on peut décomposer le champ de vitesse autour d'un point  $\bar{\mathbf{x}}$  donné sous la forme

$$d\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}} + d\bar{\mathbf{x}}) - \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = \overline{\overline{\nabla}}\bar{\mathbf{v}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} + \overline{\overline{\boldsymbol{\omega}}} \wedge d\bar{\mathbf{x}} . \quad (2.81)$$

avec

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\omega}}} = \frac{1}{2} \overline{\overline{\text{rot}}} \bar{\mathbf{v}} . \quad (2.82)$$

La formule (2.81) montre que localement on peut décomposer le mouvement en une *déformation instantanée* (terme  $\overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}$ ) et une *rotation instantanée* (terme  $\overline{\overline{\boldsymbol{\omega}}} \wedge d\bar{\mathbf{x}}$ ). On méditera à ce sujet la figure 2.2 du cours de calcul tensoriel.

## 2.3 Liens entre les études lagrangiennes et eulériennes

Il importe bien sûr de faire le lien entre les études des déformations basées sur l'approche lagrangienne et celles basées sur l'approche eulérienne.

### 2.3.1 Transport de petits vecteurs

En partant de la définition intrinsèque du tenseur lagrangien  $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ , avec les notations de la section 2.1.1,

$$d\bar{\mathbf{x}} = \overline{\overline{\mathbf{F}}} \cdot d\bar{\mathbf{X}} ,$$

et en dérivant par rapport au temps, ce qu'indique le point supérieur, il vient

$$\dot{d}\bar{\mathbf{x}} = \dot{\overline{\overline{\mathbf{F}}}} \cdot d\bar{\mathbf{X}} = \dot{\overline{\overline{\mathbf{F}}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}}^{-1} \cdot d\bar{\mathbf{x}} .$$

Par identification avec (2.68),

$$\dot{d}\bar{\mathbf{x}} = \overline{\overline{\mathbf{K}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} ,$$

on en déduit le lien entre  $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$  et le tenseur eulérien  $\overline{\overline{\mathbf{K}}}$ ,

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}} = \dot{\overline{\overline{\mathbf{F}}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}}^{-1} . \quad (2.83)$$

Bien entendu  $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$  doit être considéré en  $\bar{\mathbf{X}}$  à l'instant  $t$  et  $\overline{\overline{\mathbf{K}}}$  en  $\bar{\mathbf{x}} = \overline{\overline{\Phi}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$  au même instant  $t$ .

### 2.3.2 Transport de petits volumes

La formule (2.11) de transport lagrangien d'un petit volume matériel,

$$d^3x = J d^3X ,$$

peut elle aussi être dérivée par rapport au temps. On en déduit que

$$\frac{d(d^3x)}{dt} = \dot{J} d^3X = \dot{J} J^{-1} d^3x .$$

En identifiant la formule eulérienne correspondante (2.74),

$$\frac{d(d^3x)}{dt} = \text{div}\bar{\mathbf{v}} d^3x ,$$

on obtient la formule remarquable

$$\dot{J} = J \text{div}\bar{\mathbf{v}} . \quad (2.84)$$

### 2.3.3 Transport de produits scalaires

Le lecteur intéressé montrera en exercice que

$$\bar{\mathbf{D}} = (\bar{\mathbf{F}}^T)^{-1} \cdot \dot{\bar{\mathbf{e}}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-1}, \quad (2.85)$$

formule qui n'est, cependant, pas indispensable pour la suite de ce cours.

## 2.4 Exercices et problème

### Exercice 2.1 *Interprétation des composantes du tenseur des dilatations de Cauchy*

On considère un milieu continu dont le mouvement est caractérisé localement, autour d'un point  $\bar{\mathbf{X}}$ , à un instant  $t$ , par un tenseur des dilatations de Cauchy  $\bar{\mathbf{C}}$ . On utilise un repère orthonormé associé à une base  $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ . On considère deux (très) petits vecteurs d'origine  $\bar{\mathbf{X}}$ ,

$$d\bar{\mathbf{X}}_1 = dX \bar{\mathbf{e}}_1 \quad \text{et} \quad d\bar{\mathbf{X}}_2 = dX \bar{\mathbf{e}}_2$$

avec  $dX$  une (très) petite longueur. Ces vecteurs sont transportés dans le mouvement en  $d\bar{\mathbf{x}}_1$  et  $d\bar{\mathbf{x}}_2$ .

1 Rappelez comment on peut calculer

$$\lambda_1 = \frac{\|d\bar{\mathbf{x}}_1\|}{\|d\bar{\mathbf{X}}_1\|} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\|d\bar{\mathbf{x}}_2\|}{\|d\bar{\mathbf{X}}_2\|}$$

grâce au tenseur  $\bar{\mathbf{C}}$ , et montrez que l'on peut interpréter ainsi les composantes diagonales de

$$[C] = \text{Mat}(\bar{\mathbf{C}}, \{\bar{\mathbf{e}}_i\}) = [C_{ij}].$$

2 Du fait d'éventuelles déformations du milieu, l'angle

$$(\widehat{d\bar{\mathbf{X}}_1, d\bar{\mathbf{X}}_2}) = \frac{\pi}{2}$$

n'est pas forcément conservé. On introduit donc en général un *angle de glissement*  $\theta$  tel que

$$(\widehat{d\bar{\mathbf{x}}_1, d\bar{\mathbf{x}}_2}) = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Montrez que l'on peut déduire  $\sin \theta$  des composantes  $C_{11}$ ,  $C_{22}$  et  $C_{12}$  de  $[C]$ , cette dernière composante non diagonale jouant un rôle crucial au sens où

$$\theta = 0 \pmod{\pi} \iff C_{12} = 0.$$

**Exercice 2.2** *Interprétation des vecteurs propres du tenseur des dilatations de Cauchy*

On considère un milieu continu dont le mouvement est caractérisé localement, autour d'un point  $\bar{\mathbf{X}}$ , à un instant  $t$ , par un tenseur des dilatations de Cauchy  $\bar{\mathbf{C}}$ . On suppose que ce tenseur se diagonalise sur une base orthonormée  $\{\bar{\mathbf{n}}_1, \bar{\mathbf{n}}_2, \bar{\mathbf{n}}_3\}$ , les valeurs propres associées vérifiant

$$c_1 > c_2 > c_3 .$$

Montrez que la direction de  $\bar{\mathbf{n}}_1$  définit celle des vecteurs  $d\bar{\mathbf{X}}$  qui maximisent le rapport

$$R(d\bar{\mathbf{X}}) = \frac{\|d\bar{\mathbf{x}}\|}{\|d\bar{\mathbf{X}}\|} ,$$

$d\bar{\mathbf{x}}$  étant le vecteur  $d\bar{\mathbf{X}}$  une fois transporté par le mouvement, tandis que celle de  $\bar{\mathbf{n}}_3$  définit celle des vecteurs  $d\bar{\mathbf{X}}$  qui minimisent le rapport  $R(d\bar{\mathbf{X}})$ .

**Problème 2.1** *Étude d'un mouvement de cisaillement pur*

On étudie le mouvement d'un milieu continu dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , dans lequel un repère orthonormé  $Ox_1x_2x_3$  a été choisi. Le milieu occupe à l'instant initial  $t_0$  le domaine

$$D_0 = \{ \bar{\mathbf{X}} = X_i \bar{\mathbf{e}}_i \quad \text{avec} \quad X_1 \in \mathbb{R}, X_2 \in [-a, a], X_3 \in [-b, b] \} .$$

Le mouvement est décrit de façon *lagrangienne* par la donnée de  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t)$  avec

$$x_1 = X_1 + k(t)X_2, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3 ,$$

$k$  étant une fonction régulière du temps, supposée positive lorsque  $t \geq t_0$ .

**1.1** Rappelez quelle est la signification physique de  $\bar{\mathbf{x}}$ . Que peut-on dire de la valeur de la fonction  $k$  à l'instant  $t_0$ ? Que vaut  $D_t$ ?

**1.2** Représentez le mouvement et justifiez le terme « cisaillement pur ».

**1.3** Calculez le tenseur gradient de la transformation. Vous en donnerez une expression intrinsèque et une expression matricielle. Vous donnerez aussi une formule de transport qui fait intervenir ce tenseur, et permet son interprétation physique.

**1.4** Que peut-on dire du transport de petits volumes matériels dans ce mouvement?

**1.5** Calculez le tenseur des dilatations de Cauchy, en en donnant une expression intrinsèque et une expression matricielle. Donnez aussi une formule de transport qui fait intervenir ce tenseur.

**1.6** À quelle condition ce mouvement se fait-il sans déformation?

**1.7** Diagonalisez le tenseur des dilatations de Cauchy, et interprétez physiquement le résultat obtenu.

**1.8** Donnez une expression intrinsèque et une expression matricielle du tenseur des déformations de Green-Lagrange. Donnez aussi une formule de transport qui fait intervenir ce tenseur.

**1.9** Diagonalisez le tenseur des déformations de Green-Lagrange, et interprétez physiquement le résultat obtenu.

**1.10** Explicitez l'hypothèse de petite transformation pour ce mouvement, et déduisez le tenseur des déformations linéarisé correspondant du tenseur des déformations de Green-Lagrange. Donnez aussi une formule de transport qui fait intervenir le tenseur des déformations linéarisé.

**1.11** Retrouvez la même expression du tenseur des déformations linéarisé en partant du calcul du champ de déplacements.

**1.12** Diagonalisez le tenseur des déformations linéarisé, et interprétez physiquement le résultat obtenu.

**1.13** Explicitez la décomposition locale du champ de déplacements en une déformation infinitésimale et une rotation infinitésimale.

### §

On passe maintenant en description *eulérienne*.

**2.1** Calculez le champ de vitesse lagrangien puis le champ de vitesse eulerien correspondant à ce mouvement.

**2.2** Calculez le tenseur gradient de vitesse. À quoi peut servir ici ce tenseur ? Vérifiez qu'il est relié au tenseur gradient de la transformation par la formule établie dans le cours.

**2.3** Que peut-on dire de la divergence de la vitesse ? Cela est-il surprenant ?

**2.4** Calculez le tenseur des taux de déformation. À quoi peut servir ici ce tenseur ? Vérifiez qu'il est relié aux tenseurs gradient de la transformation et des déformations de Green-Lagrange par la formule donnée dans le cours.

**2.5** Diagonalisez le tenseur des taux de déformation et interprétez physiquement le résultat obtenu.

**2.6** Explicitez la décomposition (a priori locale mais en fait, ici, globale) du champ de vitesse en une déformation instantanée et une rotation instantanée.

## 2.5 Notes personnelles



## Chapitre 3

# Bilans de masse et de quantité de mouvement - Tenseur des contraintes

Nous avons déjà abordé l'étude du « *transport* » de quantités scalaires ou vectorielles dans les sous-sections 1.2.7 et 2.2.2. Des formules de transport locales ont été obtenues, mais il semble au moins aussi important d'obtenir des formules globales permettant d'étudier le transport de quantités intégrées sur un volume. C'est ce que nous allons faire dans la première section de ce chapitre. Au sens strict, la section 3.1.1 relève de la « cinématique pure ». Par contre, les études des sections suivantes sur le *transport de la masse*, puis celui de la *quantité de mouvement*, font intervenir, outre la cinématique, la loi de physique classique de *conservation de la masse*. Nous verrons ensuite, en section 3.2, qu'une réécriture locale du bilan complet de quantité de mouvement, prenant donc en compte les forces appliquées à un sous-système quelconque du milieu continu, nécessite une étude fine des forces de nature surfacique exercées à l'interface entre ce sous-système et le reste du milieu, ou « *efforts intérieurs* ». Cette étude nous conduira à introduire le *tenseur des contraintes de Cauchy*.

Le point de vue utilisé est généralement eulerien, mais on verra que la description des forces surfaciques et l'équation locale d'évolution de la quantité de mouvement finalement obtenues s'adaptent de façon quasi immédiate à une description lagrangienne, pourvu que l'on soit en petits déplacements et petites transformations.

Faute de temps, nous ne pourrions donner d'interprétation microscopique du tenseur des contraintes. Sur ce sujet très intéressant, le lecteur est renvoyé à la section 5.4 de [Le Tallec \(2009\)](#).

### 3.1 Transport de quantités intégrées sur un volume

#### 3.1.1 Formules globales impliquant une densité volumique

Considérons une *quantité scalaire*  $C$ , extensive, définie par une *densité volumique locale*  $c(\bar{x}, t)$  en description eulerienne. On peut penser par exemple à la masse, ou à la quantité de matière d'un produit chimique dilué dans un milieu, etc... Ainsi un *domaine matériel volumique*  $\Omega_t$  *sous-partie quelconque* du milieu continu considéré<sup>1</sup> contient au total, à l'instant  $t$ ,

$$C(t) = \iiint_{\Omega_t} c(\bar{x}, t) d^3x . \quad (3.1)$$

---

1. On peut déjà jeter un coup d'oeil à la figure 3.1.

À un instant ultérieur le volume matériel  $\Omega_t$  aura éventuellement changé de position à cause du mouvement du milieu continu, donc  $C(t)$  aura évolué même si, localement,

$$\frac{\partial c}{\partial t}(\bar{\mathbf{x}}, t) = 0 .$$

On veut justement calculer en général la *dérivée particulière*

$$\frac{dC}{dt} .$$

Ce calcul n'est a priori pas évident car le domaine d'intégration  $\Omega_t$  dans l'intégrale de volume (3.1) dépend du temps. Afin de se ramener à un volume indépendant du temps, faisons le changement de variable permettant de revenir sur la configuration initiale de référence du milieu continu, à  $t = t_0$ , suivant l'équation (1.18) du chapitre 1,

$$\bar{\mathbf{X}} = \bar{\Psi}(\bar{\mathbf{x}}, t) \iff \bar{\mathbf{x}} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t) . \quad (3.2)$$

Notons  $\Omega_0$  le domaine matériel occupé à  $t = t_0$  par les points qui se trouvent en  $\Omega_t$  à l'instant  $t$ . D'après le théorème de changement de variable dans une intégrale de volume, écrit à la manière d'un physicien, on a

$$C(t) = \iiint_{\Omega_t} c(\bar{\mathbf{x}}, t) d^3x = \iiint_{\Omega_0} c(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t), t) \frac{d^3x}{d^3X} d^3X . \quad (3.3)$$

On voit donc, d'après l'étude de la section 2.1.2, apparaître la dilatation volumique  $J = J(\bar{\mathbf{X}}, t)$  dans l'intégrale ramenée sur la configuration de référence,

$$C(t) = \iiint_{\Omega_0} c(\bar{\mathbf{x}}, t) d^3x = \iiint_{\Omega_0} c(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t), t) J(\bar{\mathbf{X}}, t) d^3X , \quad (3.4)$$

ce qu'aurait écrit directement un mathématicien<sup>2</sup>. L'intérêt de cette réécriture est que le domaine d'intégration est, maintenant, indépendant de l'instant  $t$  considéré. On peut donc écrire que la dérivée par rapport au temps de cette intégrale est donnée par l'intégrale de la dérivée par rapport au temps de l'intégrand, soit, en travaillant en coordonnées orthonormées,

$$\frac{dC}{dt}(t) = \iiint_{\Omega_0} \left( \frac{\partial c}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} J + \frac{\partial c}{\partial t} J + c \frac{\partial J}{\partial t} \right) d^3X . \quad (3.5)$$

D'après l'équation (1.19), on a

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(\bar{\mathbf{X}}, t) = V_i(\bar{\mathbf{X}}, t)$$

vitesse lagrangienne au point  $\bar{\mathbf{X}}$  à l'instant  $t$ , soit

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(\bar{\mathbf{X}}, t) = v_i(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t), t)$$

vitesse eulerienne correspondante. D'autre part la formule (2.84) montre que

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\bar{\mathbf{X}}, t) = J(\bar{\mathbf{X}}, t) \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}(\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t), t) .$$

On a donc

$$\frac{dC}{dt}(t) = \iiint_{\Omega_0} \left( \frac{\partial c}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial c}{\partial t} + c \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} \right) (\bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t), t) J(\bar{\mathbf{X}}, t) d^3X . \quad (3.6)$$

2. En préférant d'ailleurs le terme « jacobien » à celui de « dilatation » pour parler de  $J...$

D'après la formule de changement de variable (3.4), utilisée maintenant pour passer d'une intégrale sur  $\Omega_0$  à une intégrale sur  $\Omega_t$ , il vient

$$\frac{dC}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \left( \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla c + \frac{\partial c}{\partial t} + c \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} \right) d^3x . \quad (3.7)$$

En faisant usage de la formule (2.56) du cours de calcul tensoriel pour simplifier l'intégrand, il vient

$$\boxed{\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} c(\bar{\mathbf{x}}, t) d^3x = \iiint_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c\bar{\mathbf{v}}) \right] d^3x} . \quad (3.8)$$

L'intégrale de volume peut être transformée en une intégrale de surface grâce à la formule intégrale de la divergence vue en calcul tensoriel. En notant  $\bar{\mathbf{n}}$  la normale sortante au bord  $\partial\Omega_t$  de  $\Omega_t$ , il vient

$$\boxed{\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} c(\bar{\mathbf{x}}, t) d^3x = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} c\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S} . \quad (3.9)$$

On distingue un premier terme volumique dû aux variations temporelles de  $c$  à  $\bar{\mathbf{x}}$  fixé, et un terme surfacique d'**advection** ou **convection** dû au mouvement. Ce deuxième terme s'interprète, dans le cas pertinent où  $\Omega_t$  est un « *tube de courant* » au sens de la section 7.1.1, comme la différence entre le taux de gain de la quantité  $C$  en sortie (l'intégrale étant prise sur  $S_s$ , où  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} > 0$ ) et le taux de perte en entrée (l'intégrale étant prise sur  $S_e$ , où  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} < 0$ ).

### 3.1.2 Transport de masse : conservation de la masse

#### Conservation de la masse en description eulerienne

Comme on l'a déjà suggéré, la première quantité extensive à laquelle on peut appliquer cette formule est la masse. La densité volumique correspondante est  $\rho$ . Une loi fondamentale de la physique classique est la **conservation de la masse**, que l'on peut donc écrire, en vertu de (3.8),

$$\forall \Omega_t, \quad \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho d^3x = \iiint_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{\mathbf{v}}) \right] d^3x = 0 . \quad (3.10)$$

Ces intégrales sont toutes nulles si et seulement si l'intégrand est nul. On peut pour s'en convaincre considérer un volume infinitésimal  $d\Omega_t$  centré sur un  $\bar{\mathbf{x}}$  quelconque de  $D_t$ ; alors, par continuité des champs intégrés<sup>3</sup>,

$$\iiint_{d\Omega_t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{\mathbf{v}}) \right] d^3x \simeq \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{\mathbf{v}}) \right](\bar{\mathbf{x}}, t) d\Omega_t .$$

On en déduit donc l'équation de conservation de la masse sous forme locale

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{\mathbf{v}}) = 0} . \quad (3.11)$$

3. Une démonstration plus propre s'obtiendrait en utilisant un théorème de la moyenne, qui stipule que, si une fonction  $f$  continue est intégrée sur un volume, il existe un point particulier A dans ce volume tel que

$$\iiint_{\Omega_t} f(\mathbf{M}) d^3x = f(\mathbf{A}) \iiint_{\Omega_t} d^3x .$$

En combinant cette équation avec les équations (1.30) de ce document et (2.56) du cours de calcul tensoriel, on obtient une forme équivalente de cette loi de conservation,

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}} . \quad (3.12)$$

On aurait pu établir cette formule directement à partir de la « définition mécanique » de la divergence de la vitesse, c'est-à-dire l'équation (2.74), comme le montrera le lecteur à titre d'exercice.

En mécanique des fluides, on travaillera très souvent sous l'hypothèse d'*incompressibilité*

$$\rho = \text{constante} \text{ indépendante de } \bar{\mathbf{x}} \text{ et } t . \quad (3.13)$$

En conséquence la conservation de la masse (3.12) prend la forme simple<sup>4</sup>

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0 . \quad (3.14)$$

Nous reviendrons sur d'autres conséquences de la loi générale eulerienne (3.11) lorsque nous nous consacrerons à l'étude de la mécanique des fluides.

### Conservation de la masse en description lagrangienne

Donnons la loi de conservation de la masse en description lagrangienne, plus adaptée à la mécanique des solides. L'expression de cette loi se déduit de la formule (2.11) donnant la dilatation volumique entre les configurations initiale et actuelle,

$$\frac{d^3x}{d^3X} = J(\bar{\mathbf{X}}, t) ,$$

avec les notations de la section 2.1.2. En appelant  $d^3m$  la masse (conservée) du petit élément de matière dont on suit le mouvement, on peut écrire qu'à l'instant initial

$$\rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0) = \frac{d^3m}{d^3X}$$

et à l'instant actuel

$$\rho(\bar{\mathbf{X}}, t) = \frac{d^3m}{d^3x} .$$

On en déduit, en faisant le quotient de ces deux équations, que

$$\boxed{\frac{\rho(\bar{\mathbf{X}}, t)}{\rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0)} = \frac{1}{J(\bar{\mathbf{X}}, t)}} . \quad (3.15)$$

### 3.1.3 Formule globale impliquant une densité massique

Revenant à une description eulerienne du mouvement, nous considérons à nouveau une quantité extensive, cette fois-ci  $E$ , définie par une *densité massique*  $e(\bar{\mathbf{x}}, t)$ ,

$$E(t) = \iiint_{\Omega_t} \rho e \, d^3x . \quad (3.16)$$

4. Déjà rencontrée dans le problème 1.1.

Appliquons la formule (3.8) à cette quantité. En posant  $c = \rho e$ , on obtient

$$\frac{dE}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \bar{\mathbf{v}}) \right] d^3x .$$

En faisant appel à la formule (2.56) du cours de calcul tensoriel, il vient pour l'intégrand

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \bar{\mathbf{v}}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} e + \rho \frac{\partial e}{\partial t} + e \operatorname{div}(\rho \bar{\mathbf{v}}) + (\bar{\nabla} e) \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}}) = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla} e$$

compte tenu de la loi de conservation de la masse (3.11). On reconnaît en facteur de  $\rho$  la dérivée particulaire

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\nabla} e$$

en vertu de (1.30). Au bilan on obtient la formule remarquable

$$\boxed{\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho e d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{de}{dt} d^3x} . \quad (3.17)$$

### 3.1.4 Transport de quantité de mouvement

En appliquant la formule précédente à l'une des composantes  $v_i$  du champ de vitesse eulerien  $\bar{\mathbf{v}}$  sur une base orthonormée, c'est-à-dire en posant  $e = v_i$ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho v_i d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{dv_i}{dt} d^3x .$$

Introduisant la *quantité de mouvement*

$$\boxed{\bar{\mathbf{p}} = \iiint_{\Omega_t} d^3m \bar{\mathbf{v}} = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{v}} d^3x} \quad (3.18)$$

contenue dans  $\Omega_t$ , on a donc

$$\boxed{\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x} . \quad (3.19)$$

D'autre part, en utilisant plutôt la formule de transport (3.9), dans laquelle on pose  $c = \rho v_i$ , il vient

$$\frac{dp_i}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \rho v_i (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S .$$

Ceci étant valable quel que soit l'indice  $i$ , on obtient de façon plus intrinsèque

$$\boxed{\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S} . \quad (3.20)$$

Cette formule, souvent appelée « *formule de transport d'Euler* », se révélera surtout utile en mécanique des fluides.

## 3.2 Description des efforts intérieurs - Tenseur des contraintes

### 3.2.1 Première version de la loi d'évolution de la quantité de mouvement - Définition du vecteur contrainte

Grâce au travail fait en section 3.1, nous pouvons enfin appliquer la *première loi fondamentale de la dynamique*, ou *loi d'évolution de la quantité de mouvement*  $\bar{\mathbf{p}}$ , au système matériel constitué par un volume matériel  $\Omega_t$ , typiquement isolé « par la pensée » dans le domaine  $D_t$  occupé par le milieu continu à l'instant  $t$ . Cette partition de  $D_t$  en  $\Omega_t$  et son complémentaire  $D_t - \Omega_t$  résultant d'une action de la pensée, on dit souvent que la frontière correspondante  $\partial\Omega_t$  est une « *coupe virtuelle* » de  $D_t$ .

La loi d'évolution de la quantité de mouvement appliquée à  $\Omega_t$  s'écrit

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \bar{\mathbf{R}}_{\text{ext}} = \text{somme des forces extérieures appliquées.} \quad (3.21)$$

On suppose dans ce qui suit que l'on travaille dans un *référentiel galiléen*, de façon à n'avoir à considérer que des forces physiques, et non des forces d'inertie<sup>5</sup>. Parmi ces forces il faut distinguer des *forces volumiques à distance*, en général le poids,

$$\bar{\mathbf{R}}_{\text{poids}} = \iiint_{\Omega_t} d^3\bar{\mathbf{f}} = \iiint_{\Omega_t} \rho\bar{\mathbf{g}} d^3x \quad (3.22)$$

avec  $\bar{\mathbf{g}}$  l'accélération de la pesanteur, et des *forces surfaciques de contact*, qui sont exercées à la surface frontière de  $\Omega_t$  par le milieu extérieur à  $\Omega_t$ , c'est-à-dire contenu dans  $D_t - \Omega_t$ , le complémentaire de  $\Omega_t$  dans  $D_t$ . Pour l'instant on suppose que  $\Omega_t$  est intérieur à  $D_t$ , domaine total occupé par le milieu<sup>6</sup>, mais on reviendra sur cette hypothèse un peu plus tard. Ainsi à l'extérieur de  $\Omega_t$  il y a encore le milieu continu. Le *postulat de Cauchy* consiste à supposer, en physicien, que la force élémentaire  $d^2\bar{\mathbf{f}}$  exercée par le milieu extérieur sur une petite surface  $d^2S$  du bord de  $\Omega_t$ , centrée en  $\bar{\mathbf{x}}$ , comme cela est représenté sur la figure 3.1, vérifie les propriétés suivantes :

- *extensivité* de  $d^2\bar{\mathbf{f}}$  :  $d^2\bar{\mathbf{f}}$  dépend linéairement de  $d^2S$  pourvu que cette surface soit suffisamment petite ;
- *localité* de  $d^2\bar{\mathbf{f}}$  :  $d^2\bar{\mathbf{f}}$  ne dépend que de l'orientation du plan tangent à  $\partial\Omega_t$  au point  $\bar{\mathbf{x}}$ , orientation définie par la donnée de la *normale unitaire sortante*  $\bar{\mathbf{n}}$  à  $\Omega_t$  au point  $\bar{\mathbf{x}}$ .

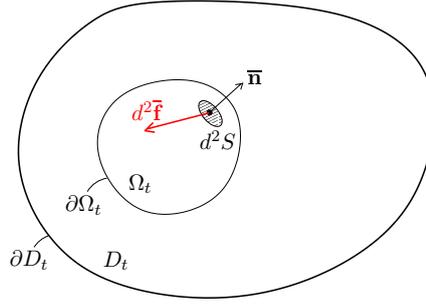
Ce postulat de Cauchy permet d'introduire une *densité surfacique d'efforts*, ou « *vecteur contrainte* »  $\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}, t)$ , tel que la force élémentaire exercée par le milieu extérieur sur une petite surface  $d^2S$  de normale sortante  $\bar{\mathbf{n}}$  soit

$$\boxed{d^2\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}, t) d^2S} . \quad (3.23)$$

Les composantes d'un vecteur contrainte sont dimensionnellement des forces par unité de surface ou pressions ; l'unité SI correspondante est donc le Pascal Pa. Naturellement  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ . D'autres unités sont l'atmosphère,  $1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , le bar,  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ , *the pound per square inch*,  $1 \text{ psi} = 6895 \text{ Pa}$ .

5. L'inclusion de *forces d'inertie* dans cette loi ne pose aucun problème de fond, il suffit d'altérer  $\bar{\mathbf{g}}$  dans l'équation (3.22), cf. l'équation (A.43).

6. Ainsi on étudie en ce moment les « *efforts intérieurs* » au milieu continu, comme le dit le titre de cette section !..



**Fig. 3.1** – Représentation d’une surface élémentaire  $d^2 S$  du bord d’un ouvert  $\Omega_t$  isolé par la pensée dans le domaine total  $D_t$ , et de la force élémentaire  $d^2 \bar{\mathbf{f}}$  exercée par le milieu contenu dans  $D_t - \Omega_t$  sur cette surface élémentaire. La surface  $\partial\Omega_t$  est une « *coupe virtuelle* » de  $D_t$ .

L’égalité (3.23) permet d’exprimer la résultante des efforts de surface exercés par le milieu contenu dans  $D_t - \Omega_t$  sur  $\partial\Omega_t$  comme

$$\bar{\mathbf{R}}_{\text{surfiques}} = \iint_{\partial\Omega_t} d^2 \bar{\mathbf{f}} = \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}, t) d^2 S . \quad (3.24)$$

Au bilan la loi d’évolution de la quantité de mouvement appliquée à  $\Omega_t$  s’écrit

$$\boxed{\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} d^3 \bar{\mathbf{f}} + \iint_{\partial\Omega_t} d^2 \bar{\mathbf{f}}} \quad (3.25)$$

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3 x = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3 x + \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}, t) d^2 S . \quad (3.26)$$

On aimerait transformer le dernier terme de (3.26) en terme de volume, afin de pouvoir identifier une équation locale d’évolution de la quantité de mouvement, de la forme

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} + ? \quad (3.27)$$

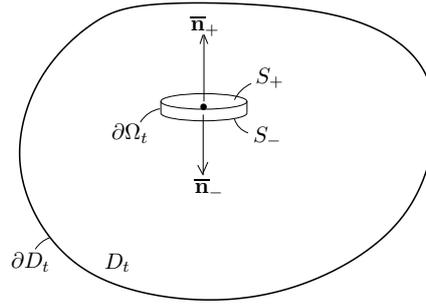
Il est clair qu’il nous faut mieux modéliser les efforts intérieurs, pour l’instant décrits par les vecteurs contraintes, afin de réaliser cet objectif. C’est ce que nous allons maintenant faire.

### 3.2.2 Imparité du vecteur contrainte vis-à-vis de $\bar{\mathbf{n}}$

Afin d’établir une première propriété importante du vecteur contrainte, considérons un domaine  $\Omega_t$  prenant la forme d’un petit cylindre d’épaisseur  $h$  et de rayon  $a$ , centré en  $\bar{\mathbf{x}}$ , comme présenté sur la figure 3.2. Explicitons le bilan de quantité de mouvement (3.26) pour ce petit volume, considéré dans la limite où  $h \ll a \ll L$  échelle des hétérogénéités « macroscopiques » du système<sup>7</sup>. Compte tenu de ces hypothèses, les deux termes de volume dans (3.26) peuvent être approximés par le produit des intégrands, supposés dépendre continûment de la position, évalués en  $\bar{\mathbf{x}}$ , par le volume du système,

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3 x - \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3 x \simeq \left( \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} - \rho \bar{\mathbf{g}} \right) (\bar{\mathbf{x}}, t) \pi a^2 h . \quad (3.28)$$

7. Bien entendu, pour que le modèle du milieu continu s’applique, il faut que  $h \gg d$  taille des volumes élémentaires représentatifs.



**Fig. 3.2** – Représentation d'un *domaine cylindrique élémentaire* isolé par la pensée dans un milieu continu occupant le domaine total  $D_t$ .

D'autre part, si  $h$  est très petit, les termes de surface dans (3.26) correspondants à l'intégrale sur la frontière latérale de  $\Omega_t$  sont négligeables devant ceux correspondants aux intégrales sur les surfaces disques « supérieure » et « inférieure »,

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}, t) d^2S &\simeq \iint_{S_+} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}_+, t) d^2S + \iint_{S_-} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}_-, t) d^2S . \\ \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}, t) d^2S &\simeq \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}_+, t) \pi a^2 + \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}_-, t) \pi a^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

compte tenu de la petitesse de  $a$  et d'une hypothèse de continuité de  $\bar{\mathbf{T}}$  par rapport à  $\bar{\mathbf{x}}$ . Regroupant (3.28) et (3.29), on obtient le bilan de quantité de mouvement

$$\left( \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} - \rho \bar{\mathbf{g}} \right) (\bar{\mathbf{x}}, t) \pi a^2 h \simeq \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}_+, t) \pi a^2 + \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}_-, t) \pi a^2 .$$

En prenant en compte l'hypothèse  $h \ll a$ , le terme de droite ne peut être compensé par celui de gauche, sauf s'il est rigoureusement nul. On obtient ainsi l'*imparité du vecteur contrainte*  $\bar{\mathbf{T}}$  vis-à-vis de  $\bar{\mathbf{n}}$ ,

$$\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}_+, t) = -\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}_-, t)$$

soit, puisque  $\bar{\mathbf{n}}_- = -\bar{\mathbf{n}}_+$ , et  $\bar{\mathbf{n}}_+$  est quelconque,

$$\forall \bar{\mathbf{n}}, \quad \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}, t) = -\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, -\bar{\mathbf{n}}, t) . \quad (3.30)$$

On peut voir ce résultat comme une « *loi de l'action-réaction* », puisqu'il exprime en quelque sorte l'équilibre des forces surfaciques exercées de part et d'autre d'une même surface disque.

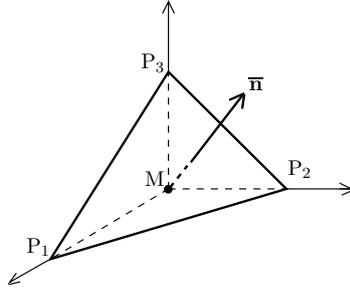
### 3.2.3 Tétraèdre de Cauchy - Linéarité du vecteur contrainte vis-à-vis de $\bar{\mathbf{n}}$

Afin de progresser dans la modélisation des efforts intérieurs, nous suivons Cauchy en considérant un petit tétraèdre  $\Omega_t$  dont un sommet est un point  $M$  quelconque de  $D_t$ , et dont trois faces, notées  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ , sont contenues dans les plans

$$x_1 = \overline{\mathbf{OM}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1, \quad x_2 = \overline{\mathbf{OM}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_2, \quad x_3 = \overline{\mathbf{OM}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3, \quad (3.31)$$

comme cela est représenté sur la figure 3.3. Rappelons que le point  $O$  désigne l'origine de notre repère. La dernière face, dont on note  $S$  l'aire, est définie par ses sommets  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  tels que

$$\overline{\mathbf{MP}}_i = \frac{h}{n_i} \bar{\mathbf{e}}_i ,$$



**Fig. 3.3** – Représentation d'un *petit tétraèdre*  $\Omega_t$  isolé par la pensée dans le milieu continu.

$h$  étant une petite longueur, les  $n_i$  étant les composantes du vecteur normal unitaire correspondant

$$\bar{\mathbf{n}} = n_i \bar{\mathbf{e}}_i .$$

Explicitons la loi fondamentale de la dynamique (3.26) pour ce tétraèdre. En première approximation, si  $h$  est très petit, on peut considérer que les termes volumiques s'écrivent<sup>8</sup>

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x - \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x \simeq \left( \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} - \rho \bar{\mathbf{g}} \right) (\bar{\mathbf{x}}, t) \frac{Sh}{3} , \quad (3.32)$$

ce dernier facteur ( $Sh/3$ ) étant le volume du tétraèdre  $\Omega_t$ . D'autre part le dernier terme de (3.26), correspondant aux forces surfaciques, s'écrit, en ne rappelant que la dépendance de  $\bar{\mathbf{T}}$  vis-à-vis du vecteur normal à la surface,

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}} d^2S &= \iint_{S_1} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}_1) d^2S + \iint_{S_2} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}_2) d^2S + \iint_{S_3} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}_3) d^2S + \iint_S \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) d^2S . \\ \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}} d^2S &\simeq \bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{e}}_1) S_1 + \bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{e}}_2) S_2 + \bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{e}}_3) S_3 + \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) S . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Or les surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  se déduisent de  $S$  par projection sur les plans (3.31), elles valent donc

$$S_i = S n_i .$$

On peut retrouver ce résultat de géométrie en appliquant la formule intégrale de la divergence au tenseur identité, sur le volume  $\Omega_t$  du tétraèdre. Cette formule donne

$$\iiint_{\Omega_t} \operatorname{div} \bar{\mathbf{I}} d^3x = \bar{\mathbf{0}} = \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{n}} d^2S = \bar{\mathbf{n}} S - \bar{\mathbf{e}}_i S_i .$$

Par insertion dans (3.33), et usage de la propriété d'imparité (3.30), on obtient

$$\iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}} d^2S \simeq \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) S - \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{e}}_i) S n_i . \quad (3.34)$$

En équilibrant (3.32) et (3.34), il vient

$$\left( \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} - \rho \bar{\mathbf{g}} \right) (\bar{\mathbf{x}}, t) \frac{Sh}{3} \simeq [\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) - \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{e}}_i) n_i] S .$$

En considérant la limite d'une longueur  $h$  très petite, le terme de droite ne peut être compensé par le terme de gauche que s'il est rigoureusement nul. On en déduit la **linéarité du vecteur contrainte vis-à-vis de  $\bar{\mathbf{n}}$** ,

$$\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{T}}(n_i \bar{\mathbf{e}}_i) = n_i \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{e}}_i) ,$$

soit encore, en rappelant les dépendances (provisoirement cachées) vis-à-vis de  $\bar{\mathbf{x}}$  et  $t$ ,

$$\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, n_i \bar{\mathbf{e}}_i, t) = n_i \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{e}}_i, t) . \quad (3.35)$$

8. Rappelons que l'on note  $\bar{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{OM}}$ .

### 3.2.4 Tenseur des contraintes de Cauchy

Celui-ci est défini comme l'*application linéaire* qui, en un point donné  $\bar{\mathbf{x}}$  de l'espace, à un instant  $t$  donné, fait correspondre au vecteur normal unitaire  $\bar{\mathbf{n}}$  le vecteur contrainte  $\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}, t)$ . On le note  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, t) & : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ & \bar{\mathbf{n}} & \longmapsto \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}, t) \end{array}} . \quad (3.36)$$

En vertu de (3.23), on peut écrire, de façon plus explicitement physique, que la force  $d^2\bar{\mathbf{f}}$  exercée par le milieu extérieur sur un élément de surface  $d^2S$  de normale sortante  $\bar{\mathbf{n}}$  est donnée par

$$\boxed{d^2\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}, t) d^2S = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S} . \quad (3.37)$$

Ce tenseur introduit en description eulerienne peut aussi être utilisé en description lagrangienne à la condition de travailler en petits déplacements et petite transformation. Alors, d'une part on peut « confondre »  $\bar{\mathbf{x}}$  et  $\bar{\mathbf{X}}$ , d'autre part la normale  $\bar{\mathbf{n}}$  à un élément de surface est en première approximation la même dans les configurations initiale et actuelle. En grands déplacements et surtout grande transformation, il faut être plus prudent, et utiliser en général en description lagrangienne d'autres tenseurs des contraintes, dits de Boussinesq et Piola-Kirchhoff, voir par exemple les sections V.4 de Salençon (1996), 13.5 de Le Tallec (2009) ou 4.1 de Forest & Amestoy (2020).

Il faut enfin mentionner que la loi (3.37) est aussi supposée valable si  $d^2S$  est au bord du domaine occupé par le milieu continu, c'est-à-dire sur l'*interface entre deux milieux continus* différents. Dans un tel cas on aura le plus souvent (en l'absence de phénomènes de « tension superficielle », qui peuvent exister à l'interface entre deux fluides) *continuité du vecteur contrainte* à l'interface, par une sorte de généralisation de la loi de l'action-réaction vue en section 3.2.2.

### 3.2.5 Loi locale d'évolution de la quantité de mouvement

Nous sommes maintenant en mesure d'identifier le point d'interrogation de l'équation (3.27), puisque, grâce au modèle (3.37), nous pouvons écrire la première loi fondamentale de la dynamique (3.26) sous la forme

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S . \quad (3.38)$$

En utilisant la formule intégrale de la divergence, il vient

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iiint_{\Omega_t} \bar{\mathbf{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} d^3x , \quad (3.39)$$

où l'on rappelle que, en composantes sur une base orthonormée, d'après le cours de calcul tensoriel,

$$\bar{\mathbf{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \bar{\mathbf{e}}_i . \quad (3.40)$$

Ceci étant quel que soit le volume  $\Omega_t$ , on peut identifier les intégrands à gauche et à droite de cette équation. On en déduit la *loi locale d'évolution de la quantité de mouvement*,

$$\boxed{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}} . \quad (3.41)$$

Cette loi formulée en description eulérienne peut s'utiliser en description lagrangienne à la condition de travailler en petits déplacements et petite transformation. On explicitera alors plutôt l'accélération en termes de la vitesse lagrangienne  $\bar{\mathbf{V}}$ , ou du champ de déplacement  $\bar{\mathbf{u}}$ , selon

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} . \quad (3.42)$$

### 3.2.6 Rappels de dynamique : moment cinétique et couple

On rappelle que la loi d'évolution (3.25) de la quantité de mouvement  $\bar{\mathbf{p}}$ , ou « première loi de Newton », ne suffit pas en mécanique générale. En effet, elle ne qualifie que la *quantité de mouvement de « translation »*, or des mouvements de *rotation* sont possibles. Une étude géométrique simple, présentée sur la figure 3.4a,b, montre que la *quantité de mouvement de « rotation »* autour de O point fixe du référentiel de travail, d'un système occupant un domaine  $\Omega_t$ , est son **moment cinétique** par rapport à O

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\text{O}) = \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge d^3m \bar{\mathbf{v}} = \iiint_{\Omega_t} \rho \overline{\mathbf{OM}} \wedge \bar{\mathbf{v}} d^3x . \quad (3.43)$$

C'est bien un **champ de moments**, au sens où le moment cinétique par rapport à O se déduit du moment cinétique par rapport à un autre point A suivant

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\text{O}) = \iiint_{\Omega_t} (\overline{\mathbf{OA}} + \overline{\mathbf{AM}}) \wedge d^3m \bar{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{OA}} \wedge \bar{\mathbf{p}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\text{A}) , \quad (3.44)$$

formule de « transport » caractéristique des champs de moments<sup>9</sup>.

On admet que le moment cinétique d'un système n'évolue que sous l'effet des efforts extérieurs appliqués, suivant la **loi d'évolution du moment cinétique** qui fait intervenir le **couple** par rapport à O développé par les forces extérieures volumiques et surfaciques,  $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{ext}}(\text{O})$ ,

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\text{O})}{dt} = \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{ext}}(\text{O}) = \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge d^3\bar{\mathbf{f}} + \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge d^2\bar{\mathbf{f}} , \quad (3.45)$$

où  $\overline{\mathbf{OM}}$  est le **vecteur « bras de levier »** par rapport à O des forces volumiques ou surfaciques appliquées en M, comme l'illustre la figure 3.4c,d. Un champ de couples est aussi un **champ de moments**, au sens où le couple par rapport à O se déduit du couple par rapport à un autre point A suivant

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{ext}}(\text{O}) &= \iiint_{\Omega_t} (\overline{\mathbf{OA}} + \overline{\mathbf{AM}}) \wedge d^3\bar{\mathbf{f}} + \iint_{\partial\Omega_t} (\overline{\mathbf{OA}} + \overline{\mathbf{AM}}) \wedge d^2\bar{\mathbf{f}} \\ \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{ext}}(\text{O}) &= \overline{\mathbf{OA}} \wedge \left( \iiint_{\Omega_t} d^3\bar{\mathbf{f}} + \iint_{\partial\Omega_t} d^2\bar{\mathbf{f}} \right) + \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{AM}} \wedge d^3\bar{\mathbf{f}} + \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\mathbf{AM}} \wedge d^2\bar{\mathbf{f}} \\ \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{ext}}(\text{O}) &= \overline{\mathbf{OA}} \wedge \bar{\mathbf{R}}_{\text{ext}} + \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{ext}}(\text{A}) \\ \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{ext}}(\text{O}) &= \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{ext}}(\text{A}) + \bar{\mathbf{R}}_{\text{ext}} \wedge \overline{\mathbf{AO}} . \end{aligned} \quad (3.46)$$

En conséquence, une distribution d'efforts extérieurs qui a une résultante nulle conduit à un couple qui ne dépend pas du point considéré. Des exemples de tels efforts seront rencontrés dans le problème 4.1.

9. À comparer par exemple à la formule (2.57) pour le champ des petits déplacements d'un solide indéformable, dans laquelle il faut réaliser que  $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\text{A})$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_0 = \bar{\mathbf{u}}(\text{O})$ ,  $\bar{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{OA}}$ , ou à celles (2.80) et (A.18) pour le champ de vitesse d'un solide indéformable...

### 3.2.7 Loi d'évolution du moment cinétique - Symétrie du tenseur des contraintes

Pour l'instant le tenseur des contraintes  $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$  est quelconque. Afin de démontrer qu'il est symétrique, ce qui constitue une propriété très importante<sup>10</sup>, nous explicitons la *loi d'évolution du moment cinétique* (3.45), pour un sous-domaine  $\Omega_t$  de  $D_t$ . En supposant l'absence de couples volumiques<sup>11</sup>, il vient

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho \overline{\mathbf{OM}} \wedge \overline{\mathbf{v}} \, d^3x = \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge \rho \overline{\mathbf{g}} \, d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \overline{\mathbf{n}}) \, d^2S. \quad (3.47)$$

À l'aide de la formule de transport (3.17), on peut écrire le terme de gauche sous la forme

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho \overline{\mathbf{OM}} \wedge \overline{\mathbf{v}} \, d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d}{dt} (\overline{\mathbf{OM}} \wedge \overline{\mathbf{v}}) \, d^3x = \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge \rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} \, d^3x.$$

En faisant usage de l'équation locale (3.41), on obtient

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho \overline{\mathbf{OM}} \wedge \overline{\mathbf{v}} \, d^3x = \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge \rho \overline{\mathbf{g}} \, d^3x + \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge \overline{\mathbf{div}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \, d^3x.$$

Par insertion dans (3.47), il vient

$$\iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge \overline{\mathbf{div}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \, d^3x = \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \overline{\mathbf{n}}) \, d^2S. \quad (3.48)$$

Transformons ce terme de surface, de la forme<sup>12</sup>

$$\iint_{\partial\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \overline{\mathbf{n}}) \, d^2S = \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\overline{\mathbf{L}}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \, d^2S,$$

en terme de volume. En passant en composantes dans le repère orthonormé naturel  $Ox_1x_2x_3$ , on a, d'après la formule d'algèbre tensorielle donnant le produit vectoriel en terme du tenseur alterné fondamental,

$$\overline{\mathbf{OM}} \wedge (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \overline{\mathbf{n}}) = \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kq} n_q \overline{\mathbf{e}}_i = \overline{\overline{\mathbf{L}}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \quad \text{avec} \quad L_{iq} = \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kq}.$$

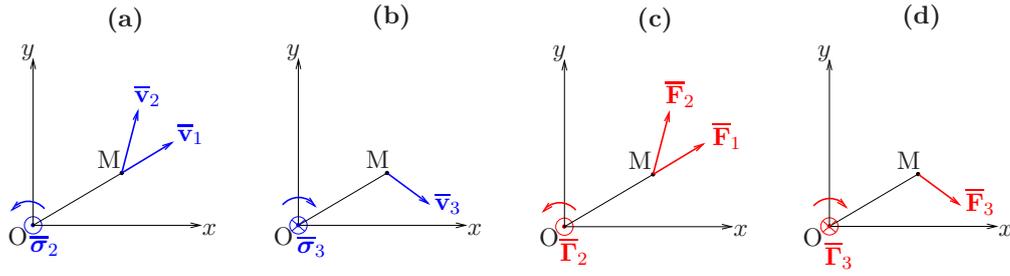
La formule intégrale de la divergence donne donc

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \overline{\mathbf{n}}) \, d^2S &= \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{div}} \overline{\overline{\mathbf{L}}} \, d^3x \\ &= \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial L_{iq}}{\partial x_q} \, d^3x \, \overline{\mathbf{e}}_i \\ &= \iiint_{\Omega_t} \epsilon_{ijk} \left( \delta_{jq} \sigma_{kq} + x_j \frac{\partial \sigma_{kq}}{\partial x_q} \right) \, d^3x \, \overline{\mathbf{e}}_i \\ \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \overline{\mathbf{n}}) \, d^2S &= \iiint_{\Omega_t} \epsilon_{ijk} \left( \sigma_{kj} + x_j \frac{\partial \sigma_{kq}}{\partial x_q} \right) \, d^3x \, \overline{\mathbf{e}}_i. \end{aligned} \quad (3.49)$$

10. Qui permettra par exemple de le diagonaliser sur une base orthonormée.

11. Il n'y a pas de « couples » non associés à des forces, i.e. tous les couples (les termes de droite de 3.47) sont des « moments de forces ».

12. Il est clair que l'intégrand dépend linéairement de  $\overline{\mathbf{n}}$ .



**Fig. 3.4** – Signification géométrique des *moment cinétique* et *couple*, dans l'espace affine muni d'un repère orthonormé direct  $Oxyz$ . On considère pour simplifier le cas d'une masse ponctuelle, de valeur  $m$ , située en  $M$ , de vitesse  $\bar{v}$ , et d'une force « ponctuelle »  $\bar{F}$  appliquée à celle-ci. Les figures **a**, **b** illustrent la définition analogue à (3.43),  $\bar{\sigma}(O) = \overline{OM} \wedge m \bar{v}$ . Dans le 1<sup>er</sup> cas illustré sur la figure **a** où  $\overline{OM} \parallel \bar{v}_1$ , le moment cinétique est nul, cette vitesse  $\bar{v}_1$  ne correspond à aucune rotation par rapport à  $O$ . Dans le 2<sup>d</sup> cas illustré sur la figure **a**,  $\bar{\sigma}_2 = \overline{OM} \wedge m \bar{v}_2$  pointe dans la direction des  $z$  croissants. Cette vitesse  $\bar{v}_2$  correspond à une quantité de mouvement de rotation autour de  $O$  dans le sens direct (ou trigonométrique), comme indiqué par la flèche courbe, ce, en vertu d'une « règle de la main droite » : si j'oriente mon pouce droit levé dans la direction de  $\bar{\sigma}$ , mes autres doigts indiquent la direction de la rotation. Dans le cas illustré sur la figure **b**,  $\bar{\sigma}_3 = \overline{OM} \wedge m \bar{v}_3$  pointe dans la direction des  $z$  décroissants. Cette vitesse  $\bar{v}_3$  correspond donc à une quantité de mouvement de rotation autour de  $O$  dans le sens horaire (ou anti-trigonométrique), comme indiqué par la flèche courbe, ce, en vertu de la même « règle de la main droite ». Les figures **c**, **d** illustrent la définition analogue à (3.45),  $\bar{\Gamma}(O) = \overline{OM} \wedge \bar{F}$  où  $\overline{OM}$  est le *vecteur bras de levier*. Dans le 1<sup>er</sup> cas illustré sur la figure **c** où  $\overline{OM} \parallel \bar{F}_1$ , le couple est nul, cette force  $\bar{F}_1$  n'induit aucun moment cinétique par rapport à  $O$ . Dans le 2<sup>d</sup> cas illustré sur la figure **c**,  $\bar{\Gamma}_2 = \overline{OM} \wedge \bar{F}_2$  pointe dans la direction des  $z$  croissants. Ce couple induit donc un moment cinétique correspondant à une rotation autour de  $O$  dans le sens direct, comme symbolisé par la flèche courbe. Dans le cas illustré sur la figure **d**,  $\bar{\Gamma}_3 = \overline{OM} \wedge \bar{F}_3$  pointe dans la direction des  $z$  décroissants. Ce couple induit donc un moment cinétique correspondant à une rotation autour de  $O$  dans le sens horaire (ou anti-trigonométrique), comme indiqué par la flèche courbe. Cette représentation d'un couple par une flèche courbe sera souvent utilisée, cf. par exemple la figure 4.3b.

Toujours à l'aide du tenseur alterné fondamental, on peut écrire en composantes le terme de gauche de (3.48) sous la forme

$$\iiint_{\Omega_t} \overline{OM} \wedge \overline{\text{div}} \bar{\sigma} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kq}}{\partial x_q} d^3x \bar{e}_i. \quad (3.50)$$

Au bilan la loi d'évolution du moment cinétique (3.48) s'écrit

$$\iiint_{\Omega_t} \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} d^3x \bar{e}_i = \bar{0}. \quad (3.51)$$

Ceci étant quel que soit le sous-domaine  $\Omega_t$  de  $D_t$ , on en déduit la nullité de l'intégrand,

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{kj} \bar{e}_i = \bar{0} \iff \bar{\bar{\epsilon}} : \bar{\sigma} = \bar{0} \iff \overline{\text{vd}}(\bar{\sigma}) = \bar{0} \quad (3.52)$$

avec les notations de la section 1.6 du cours de calcul tensoriel. D'après le résultat de l'exercice 1.14 de calcul tensoriel, ceci exprime bien que  $\bar{\sigma}$  est un tenseur symétrique.

### 3.2.8 Diagonalisation du tenseur des contraintes - Représentation de Mohr

Dans cette section on raisonne à  $\bar{x}$  et  $t$  fixé, et on note  $\bar{\sigma}$  le tenseur  $\bar{\sigma}(\bar{x}, t)$ . D'après la théorie des endomorphismes vue en classes préparatoires,  $\bar{\sigma}$ , endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}^3$ , est en

conséquence diagonalisable sur une base orthonormée  $\{\bar{\mathbf{n}}_i\}$ . Ces *vecteurs propres* définissent des *directions propres* que certains appellent aussi « *directions principales* » des contraintes. Les valeurs propres correspondantes  $\{\sigma_i\}$ , réelles, sont appelées *contraintes propres* ou, souvent, « *contraintes principales* »<sup>13</sup>. Par convention, on les ordonne de sorte que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 . \quad (3.53)$$

Une question pertinente posée par Mohr<sup>14</sup> est celle de la caractérisation de l'ensemble des valeurs possibles du vecteur contrainte

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \frac{d^2\bar{\mathbf{f}}}{d^2S} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (3.54)$$

lorsque la surface élémentaire  $d^2S$  centrée sur  $\bar{\mathbf{x}}$  change d'orientation, c'est-à-dire lorsque  $\bar{\mathbf{n}}$  varie sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . D'un point de vue physique, il semble raisonnable de décomposer le vecteur  $\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}})$  en deux contributions, comme cela est représenté sur la figure 3.5a :

- une composante colinéaire à  $\bar{\mathbf{n}}$ , i.e. normale à la surface ; c'est la « *contrainte normale* »<sup>15</sup>

$$\sigma(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} ; \quad (3.55)$$

- le reste, qui est forcément dans le plan de la surface élémentaire ; on le désigne en conséquence comme la « *contrainte tangentielle* »<sup>16</sup> ; sa norme est notée  $\tau(\bar{\mathbf{n}})$ , et on a, en vertu du théorème de Pythagore,

$$\tau^2(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{T}}^2(\bar{\mathbf{n}}) - \sigma^2(\bar{\mathbf{n}}) . \quad (3.56)$$

Mohr a proposé de représenter l'état des contraintes en  $\bar{\mathbf{x}}$  par l'ensemble des points  $(\sigma(\bar{\mathbf{n}}), \tau(\bar{\mathbf{n}}))$  dans un plan quand  $\bar{\mathbf{n}}$  varie. En utilisant une décomposition de  $\bar{\mathbf{n}}$  quelconque dans la base propre  $\{\bar{\mathbf{n}}_i\}$ ,

$$\bar{\mathbf{n}} = n_1\bar{\mathbf{n}}_1 + n_2\bar{\mathbf{n}}_2 + n_3\bar{\mathbf{n}}_3 , \quad (3.57)$$

on a, puisque  $\bar{\mathbf{n}}$  est unitaire,

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 . \quad (3.58)$$

D'autre part

$$\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \sigma_1 n_1 \bar{\mathbf{n}}_1 + \sigma_2 n_2 \bar{\mathbf{n}}_2 + \sigma_3 n_3 \bar{\mathbf{n}}_3 ,$$

donc les équations (3.55) et (3.56) s'écrivent

$$\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma(\bar{\mathbf{n}}) , \quad (3.59)$$

$$\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma^2(\bar{\mathbf{n}}) + \tau^2(\bar{\mathbf{n}}) . \quad (3.60)$$

Les équations (3.58), (3.59) et (3.60) constituent un système linéaire inhomogène en les variables  $(n_1^2, n_2^2, n_3^2)$ . Le déterminant de ce système vaut

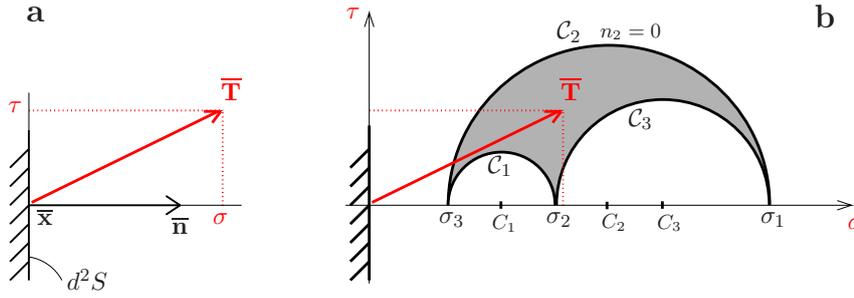
$$(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_1) .$$

13. D'autres parlent des « *valeurs principales des contraintes* ».

14. Ingénieur et professeur allemand actif à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle.

15. On peut noter que, mathématiquement, la formule (3.55) traduit une perception de  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  comme étant une forme quadratique.

16. Ou « *contrainte de cisaillement* » ou « *cission* ».



**Fig. 3.5** – **a** : Décomposition d'un vecteur contrainte  $\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}})$  en une contrainte normale  $\sigma(\bar{\mathbf{n}})$  et une contrainte tangentielle  $\tau(\bar{\mathbf{n}})$ . **b** : Dans un cas générique où les valeurs propres du tenseur des contraintes sont toutes distinctes, on représente en gris le lieu des points  $(\sigma(\bar{\mathbf{n}}), \tau(\bar{\mathbf{n}}))$  lorsque  $\bar{\mathbf{n}}$  décrit la sphère unité. Cette « *représentation de Mohr* » est caractérisée par trois (demi) cercles, cf. les équations (3.62).

Commençons donc par étudier le *cas générique où les contraintes propres sont toutes différentes*. Alors la solution du système (3.58), (3.59) et (3.60) est unique, et s'exprime ainsi<sup>17</sup> :

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}, \quad (3.61a)$$

$$n_2^2 = -\frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)}, \quad (3.61b)$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)}. \quad (3.61c)$$

Comme les  $n_i^2$  sont positifs ou nuls, en prenant en compte l'ordonnement (3.53),  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , on obtient

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \geq 0, \quad (3.62a)$$

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) \leq 0, \quad (3.62b)$$

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) \geq 0. \quad (3.62c)$$

La première de ces équations se réécrit

$$\tau^2 + (\sigma - C_1)^2 \geq R_1^2 \quad \text{avec} \quad C_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \quad R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad (3.63)$$

elle signifie que l'on est dans le plan  $(\sigma, \tau)$  à l'extérieur du *premier cercle de Mohr*  $C_1$ , de centre  $(C_1, 0)$  placé sur l'axe des abscisses et de rayon  $R_1$ . Le diamètre de ce cercle est donné par le segment reliant les points  $(\sigma_2, 0)$  et  $(\sigma_3, 0)$ . D'après (3.61) sont exactement sur ce cercle (l'inégalité devient une égalité) les points  $(\sigma(\bar{\mathbf{n}}), \tau(\bar{\mathbf{n}}))$  lorsque  $n_1 = 0$ . De même l'équation (3.62b) signifie que l'on est à l'intérieur du *deuxième cercle de Mohr*  $C_2$ , dont le diamètre est donné par le segment reliant  $(\sigma_1, 0)$  et  $(\sigma_3, 0)$ . Enfin l'équation (3.62c) signifie que l'on est à l'extérieur du *troisième cercle de Mohr*  $C_3$ , dont le diamètre est donné par le segment reliant  $(\sigma_1, 0)$  et  $(\sigma_2, 0)$ . L'intersection des extérieurs de  $C_1$  et  $C_3$  et de l'intérieur de  $C_2$  est représentée en gris sur la figure 3.5b. Cette figure explique que l'on appelle souvent  $C_2$  « *grand cercle de Mohr* »,  $C_1$  et  $C_3$  « *petits cercles de Mohr* ». Sur cette figure, on a pris naturellement l'intersection des

17. On omet, pour simplifier les notations, de rappeler que  $\sigma = \sigma(\bar{\mathbf{n}})$  et  $\tau = \tau(\bar{\mathbf{n}})$ . À  $(\sigma, \tau)$  donné correspondent donc, en général, 8 valeurs possibles de  $\bar{\mathbf{n}}$ , qui se déduisent entre elles par des symétries planes par rapport aux plans de coordonnées, ou par des compositions de ces symétries. Ces symétries spatiales sont liées à la symétrie de l'endomorphisme  $\bar{\sigma}$ .

cercles et surfaces que l'on vient d'évoquer avec le demi-plan  $\tau \geq 0$ , puisque  $\tau$  est une norme, donc en toute rigueur il faudrait parler de « *demi cercles* » de Mohr au lieu de « cercles » de Mohr. Sur cette représentation, vous êtes invités à visualiser les [animations de la page web du module](#), au niveau de la séance correspondante. Ces animations seront présentées en amphi.

Considérons maintenant le *cas où deux contraintes propres coïncident*, par exemple

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 . \quad (3.64)$$

En raisonnant en physicien, on peut voir ce cas comme un cas limite du précédent, obtenu lorsque  $\sigma_2$  tend vers  $\sigma_3$  par valeurs supérieures. Alors le premier cercle de Mohr  $\mathcal{C}_1$  se réduit à un point, tandis que le deuxième cercle  $\mathcal{C}_2$  s'approche du troisième  $\mathcal{C}_3$  jusqu'à coïncider avec lui. On en conclut que la représentation de Mohr se réduit à *un seul cercle*, le cercle  $\mathcal{C}_3$  dont le diamètre est le segment liant  $(\sigma_2, 0)$  à  $(\sigma_1, 0)$ . Bien entendu ce résultat peut aussi s'établir mathématiquement en étudiant le système (3.58), (3.59), (3.60); le lecteur fera cette démonstration à titre d'exercice.

### 3.2.9 Applications : contrainte tangentielle maximale - critère de Tresca

La représentation de Mohr est *très utilisée en mécanique des solides et en géomécanique*, car elle permet une représentation visuelle « simple » du tenseur des contraintes. L'une de ses applications intéressantes est le calcul de la *contrainte tangentielle maximale*

$$\tau_{\max} = \max_{\bar{\mathbf{n}}} \tau(\bar{\mathbf{n}}) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.65)$$

rayon du plus grand cercle de Mohr (cf. la figure 3.5b). La contrainte normale correspondant à ce vecteur est de plus donnée par l'abscisse du centre de ce cercle,

$$\sigma(\bar{\mathbf{n}}) = C_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} . \quad (3.66)$$

Par insertion de ces valeurs de  $\tau$  et  $\sigma$  dans le système (3.58), (3.59), (3.60), on obtient

$$n_1^2 = \frac{1}{2}, \quad n_2^2 = 0, \quad n_3^2 = \frac{1}{2} .$$

En conséquence les normales  $\bar{\mathbf{n}}$  sont

$$\bar{\mathbf{n}}_{\pm} = \frac{\bar{\mathbf{n}}_1 \pm \bar{\mathbf{n}}_3}{\sqrt{2}}, \quad (3.67)$$

qui correspondent aux deux *bissectrices du secteur angulaire formé par  $\bar{\mathbf{n}}_1$  et  $\bar{\mathbf{n}}_3$* .

De fait beaucoup de matériaux solides supportent plutôt bien des contraintes normales élevées, mais au contraire mal des contraintes tangentielles élevées. En conséquence, en anticipant sur le chapitre suivant, un *critère de limite élastique* couramment utilisé est le *critère de Tresca* qui porte justement sur  $\tau_{\max}$ ,

$$\tau_{\max} < \tau_{\lim} . \quad (3.68)$$

Des exemples d'application de ce critère seront donnés dans les problèmes 4.4, 4.5, 4.6 et 5.1.

### 3.3 Exercices

#### Exercice 3.1 Représentation de Mohr d'un état de contraintes planes

On considère un point matériel  $\bar{\mathbf{x}}$  d'un milieu continu tel que, à un instant  $t$ , le tenseur des contraintes de Cauchy  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  soit, dans la base orthonormée  $\{\bar{\mathbf{e}}_x, \bar{\mathbf{e}}_y, \bar{\mathbf{e}}_z\}$ , de la forme

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_{xx}\bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_x + \sigma_{yy}\bar{\mathbf{e}}_y \otimes \bar{\mathbf{e}}_y + \sigma_{xy}\bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_y + \sigma_{yx}\bar{\mathbf{e}}_y \otimes \bar{\mathbf{e}}_x . \quad (3.69)$$

1 Existe-t'il une relation entre  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{yx}$  ?

2 Justifiez l'existence de deux vecteurs unitaires orthogonaux  $\bar{\mathbf{n}}_1$  et  $\bar{\mathbf{n}}_2$  dans le plan  $xy$ , que l'on peut choisir de sorte que  $\{\bar{\mathbf{n}}_1, \bar{\mathbf{n}}_2, \bar{\mathbf{e}}_z\}$  soit directe, et de deux réels  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , tels que

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_1\bar{\mathbf{n}}_1 \otimes \bar{\mathbf{n}}_1 + \sigma_2\bar{\mathbf{n}}_2 \otimes \bar{\mathbf{n}}_2 . \quad (3.70)$$

3 On suppose dorénavant que

$$\sigma_1 > \sigma_2 . \quad (3.71)$$

Soit  $\bar{\mathbf{R}}$  la rotation d'angle  $\pi/2$  autour de  $\bar{\mathbf{e}}_z$ . Étant donné un vecteur  $\bar{\mathbf{n}}$  quelconque du plan  $xy$ , on considère comme dans le cas tridimensionnel la *contrainte normale*

$$\sigma(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} , \quad (3.72)$$

et on définit maintenant une *contrainte tangentielle algébrique* par

$$\tau(\bar{\mathbf{n}}) = \left( \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) \cdot \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \left( \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} . \quad (3.73)$$

3.1 Représentez cette décomposition sur un schéma géométrique, en prenant un exemple.

3.2 On considère un vecteur

$$\bar{\mathbf{n}} = \cos \alpha \bar{\mathbf{n}}_1 + \sin \alpha \bar{\mathbf{n}}_2 \quad (3.74)$$

avec  $\alpha$  un angle polaire réel. Montrez que l'on a la « *règle du  $-2\alpha$*  » :

$$\sigma(\bar{\mathbf{n}}) = C_3 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(-2\alpha) \quad \text{et} \quad \tau(\bar{\mathbf{n}}) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(-2\alpha) \quad (3.75)$$

où  $C_3$  est un réel que vous calculerez. Donnez, grâce à un schéma, une interprétation géométrique de cette règle<sup>18</sup>.

3.3 Quelle est la valeur maximale de la contrainte tangentielle si  $\bar{\mathbf{n}}$  varie dans le plan  $xy$  ? Pour quelle valeur de  $\bar{\mathbf{n}}$  est-elle atteinte ?

**Commentaire sur l'exercice 3.1 :** dans le cas plus général d'un état de contraintes non planes, si on se restreint à des vecteurs  $\bar{\mathbf{n}}$  variant dans un plan engendré par deux vecteurs propres de  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ ,  $\bar{\mathbf{n}}_1$  et  $\bar{\mathbf{n}}_2$ , on peut utiliser la même représentation de Mohr.

18. Des [animations vidéo illustrant cette règle sont disponibles sur la page web du module](#).

**Exercice 3.2** *Retour sur le mouvement de cisaillement pur : étude des contraintes*

On revient sur l'étude du mouvement de cisaillement pur faite dans le problème 2.1, mais du point de vue des efforts intérieurs. On se place dans le cas d'un mouvement de *solide*, dans l'hypothèse de petits déplacements et petite transformation, et on suppose qu'une configuration d'équilibre, avec  $k = \text{constante}$ , a été atteinte. On néglige toute influence de la pesanteur<sup>19</sup>.

**1** Comment se traduisent les hypothèses de petits déplacements et petite transformation ?

**2** Quelle équation locale faut-il résoudre dans le domaine  $D_0$ , afin de pouvoir calculer le tenseur des contraintes de Cauchy  $\bar{\sigma}$  ? Explicitez la en composantes dans le repère orthonormé  $Ox_1x_2x_3$ .

**3** On suppose que le matériau est collé sur des plaques solides indéformables situées en  $X_2 = \pm a$ , sur lesquelles on a agit pour imposer le mouvement de cisaillement pur. Écrivez sur la base d'un argument physique la forme du vecteur contrainte sur ces interfaces. Vous ferez une hypothèse de symétrie sous  $X_2 \mapsto -X_2$  pour relier la force tangentielle appliquée au niveau de l'interface supérieure à celle appliquée au niveau de l'interface inférieure.

Déduisez-en des conditions limites sur  $\bar{\sigma}$  valables sur les plans  $X_2 = \pm a$ .

**4** On suppose que le matériau est, au niveau des plans  $X_3 = \pm b$ , en contact avec un gaz à très faible pression, négligeable.

Déduisez-en des conditions limites sur  $\bar{\sigma}$  valables sur les plans  $X_3 = \pm b$ .

**5.1** Au vu de toutes ces équations, proposez une forme très simple de tenseur des contraintes solution. Vous l'écrirez en composantes puis sous forme intrinsèque.

**5.2** Représentez dans le plan  $X_1OX_2$  les vecteurs contraintes qui s'exercent sur les faces d'un élément parallélépipédique<sup>20</sup> de section carrée dans le plan  $X_1OX_2$ , avec des faces normales à  $\bar{e}_1$  et  $\bar{e}_2$ , étendu dans la direction  $X_3$  jusqu'aux plans  $X_3 = \pm b$ . Interprétez physiquement son état de contraintes.

**6.1** Quelle est la représentation de Mohr la plus pertinente pour caractériser l'état de contraintes de ce système ? Tracez-la grâce à une construction géométrique, sans faire le calcul des contraintes principales.

**6.2** Déduisez de cette représentation les valeurs propres et vecteurs propres du tenseur des contraintes. Représentez dans le plan physique  $X_1OX_2$  les vecteurs contraintes qui s'exercent sur les faces d'un élément parallélépipédique de section carré dans ce plan, avec des faces orthogonales aux vecteurs propres dans ce plan, cet élément étant toujours étendu dans la direction  $X_3$  jusqu'aux plans  $X_3 = \pm b$ . Interprétez physiquement son état de contraintes.

**3.4 Notes personnelles**

19. L'effet de celle-ci peut être considéré comme pris en compte dans la configuration de référence de l'étude.

20. Cet élément résulte d'une « coupe virtuelle » dans le matériau, au sens introduit au tout début de la section 3.2.1.





## Chapitre 4

# Solides élastiques

‘*Ut tensio sic vis*’

« *Telle déformation, telle force* »

Hooke <sup>1</sup>

Considérons un *solide* en mouvement, dans l’hypothèse de *petits déplacements* et *petite transformation* pour pouvoir utiliser le tenseur des contraintes de Cauchy et l’équation d’évolution de la quantité de mouvement

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} = \rho \bar{\mathbf{g}} + \overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}}, \quad (4.1)$$

comme expliqué au chapitre 3. Les *inconnues* « *principales* » de ce problème général sont <sup>2</sup>

1. le champ de déplacements  $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$  ;
2. le champ de tenseur des contraintes de Cauchy  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$ .

En effet connaissant  $\bar{\mathbf{u}}$  on peut calculer tous les tenseurs de déformation, et plus particulièrement le tenseur des déformations linéarisé

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\bar{\mathbf{X}}, t) = \frac{1}{2} \left( \overline{\nabla}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{u}} + \overline{\nabla}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{u}}^T \right). \quad (4.2)$$

D’autre part on peut aussi déterminer la masse volumique selon l’équation (3.15),

$$\rho(\bar{\mathbf{X}}, t) = \frac{\rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0)}{J(\bar{\mathbf{X}}, t)} = \frac{\rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0)}{1 + \text{div} \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t)} \simeq \rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0) [1 - \text{div} \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t)], \quad (4.3)$$

en faisant usage de (2.50). On fera souvent une hypothèse d’homogénéité et d’indépendance par rapport au temps de la masse volumique,

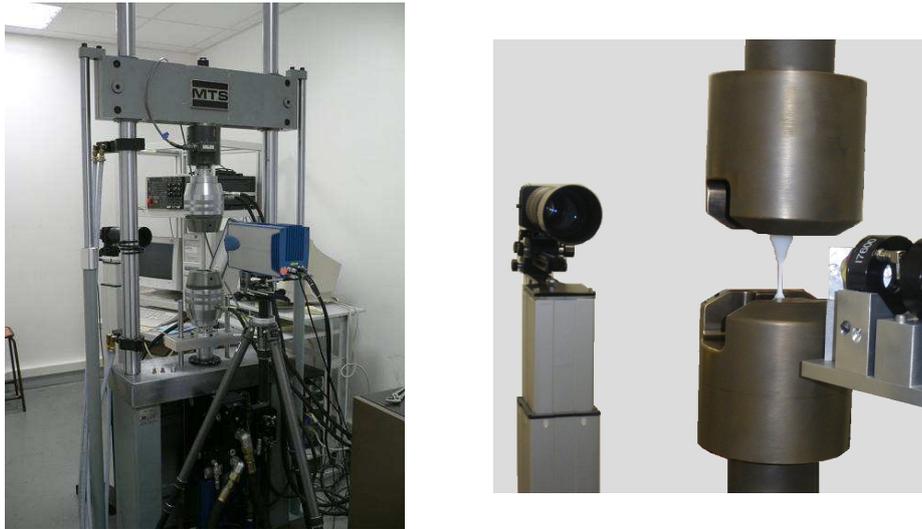
$$\rho(\bar{\mathbf{X}}, t) \simeq \rho_0 \text{ indépendante de } \bar{\mathbf{X}} \text{ et } t, \quad (4.4)$$

du moins dans les termes contenant  $\rho$  de l’équation d’évolution de la quantité de mouvement (4.1). La seule *équation générale* dont nous disposons pour calculer les champs  $\bar{\mathbf{u}}$  et  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  est justement cette

---

1. Physicien anglais du XVII<sup>ème</sup> siècle.

2. Rappelons que, avec les hypothèses posées, on peut considérer que  $\bar{\mathbf{x}} \simeq \bar{\mathbf{X}}$  dans  $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$  et  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$ , donc confondre les champs lagrangiens et euleriens.



**Fig. 4.1** – *Machine de traction* du Lemta : vue d'ensemble à gauche, vue zoomée à droite (arrière plan effacé par traitement d'image). Les mors sont deux grosses pièces cylindriques symétriques, situées l'une en haut, l'autre en bas, dans lesquelles l'échantillon de matériau à tester est fixé. Deux paires de mors légèrement différentes sont disponibles. Sur la photographie de gauche on distingue une caméra infra-rouge qui permet de faire des études thermomécaniques ; sur la photographie de droite un laser et une caméra permettent de faire des expériences de diffusion de lumière donnant accès à la microstructure du matériau en traction (merci à Stéphane André, Christophe Baravian, Arnaud Blaise et Jérôme Dillet).

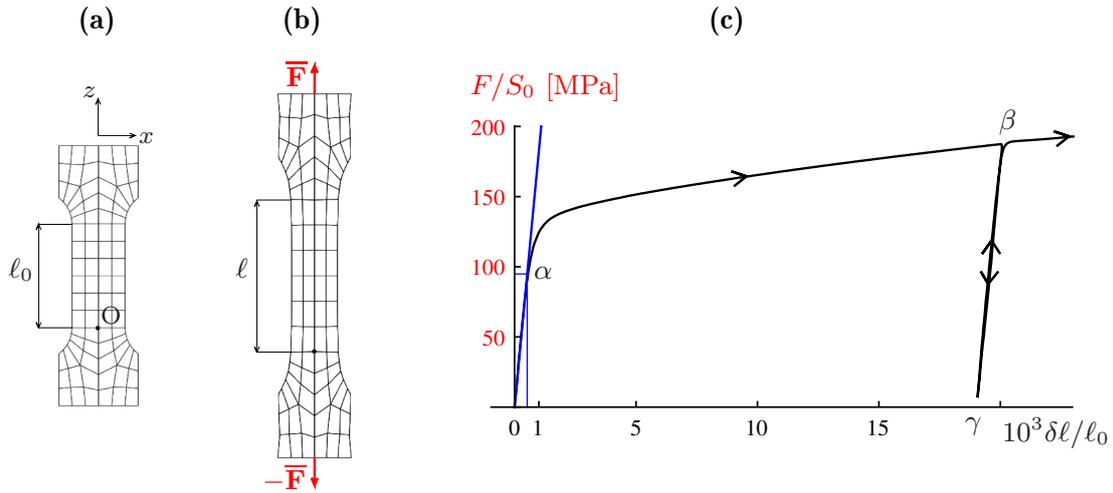
équation (4.1). On a comme inconnues un champ vectoriel et un champ tensoriel, mais comme équation seulement une équation vectorielle : il manque une équation tensorielle à l'appel. Cette équation *dépend du matériau considéré*, c'est sa « *loi de comportement* ». Nous allons introduire en section 4.1 la loi de comportement des *solides élastiques linéaires isotropes*, puis exposer, dans la section 4.2, quelques généralités concernant les problèmes de l'ingénieur correspondants. Ensuite, dans les sections 4.3 et 4.4, nous présenterons les deux grandes méthodes de résolution utilisées pour résoudre ces problèmes. L'approche utilisée pour introduire la loi de l'élasticité section 4.1, plutôt « terre à terre », est celle d'un « physicien appliqué ». Des approches plus sophistiquées, rigoureuses et systématiques, faisant appel à des bilans d'*énergie* et d'*entropie*, autorisés par le développement complet de la *thermomécanique des milieux continus*, sont présentées par exemple dans les chapitres VII de Salençon (1996), 8, 10 et 12 de Le Tallec (2009), ou 6 de Forest & Amestoy (2020). Des exemples complémentaires d'approches microscopiques de « physicien théoricien » sont donnés dans les chapitres 9 et 11 de Le Tallec (2009).

## 4.1 Loi de comportement élastique linéaire isotrope

### 4.1.1 Mise en évidence par une expérience de traction

Le comportement élastique linéaire peut être identifié grâce à des expériences de *traction pure*<sup>3</sup>. Ces expériences se font dans une *machine de traction* du type de celle présentée sur la figure 4.1. En utilisant par exemple des éprouvettes de traction du type de celle présentée sur la figure 4.2a, on assure un état de transformation (approximativement) homogène dans la « partie utile » de l'éprouvette. On mesure l'*allongement*  $\delta l$  de la partie utile de l'éprouvette, et, simulta-

3. Certains auteurs parlent plutôt de *traction simple* ou *traction uniaxiale*.



**Fig. 4.2** – **a** : Schéma d'une *éprouvette de traction* au repos, avec un « maillage » permettant un suivi lagrangien. La longueur de la zone utile de l'éprouvette dans la direction  $z$  est  $\ell_0$ . **b** : Schéma de cette même éprouvette soumise à des forces de traction  $\bar{\mathbf{F}}$  en « haut »,  $-\bar{\mathbf{F}}$  en « bas ». La déformation de l'éprouvette a été simulée grâce au logiciel d'éléments finis ABAQUS par Sébastien Allain. La longueur de la zone utile de l'éprouvette dans la direction  $z$  de traction est maintenant  $\ell = \ell_0 + \delta\ell$ , avec  $\delta\ell$  l'allongement. **c** : *Diagramme de traction* présentant la *contrainte nominale*  $F/S_0 = \|\bar{\mathbf{F}}\|/S_0$  en fonction de l'*allongement réduit*  $\delta\ell/\ell_0$ , qui est aussi la *déformation*  $\epsilon_{zz}$ . Ce diagramme a été obtenu expérimentalement sur un acier doux à Arcelormittal Research, dans le cadre de l'étude publiée dans Allain & Bouaziz (2010).

nément, la *force appliquée*  $\bar{\mathbf{F}}$ , cf. la figure 4.2b<sup>4</sup>. On en déduit un *diagramme de traction* tel celui présenté sur la figure 4.2c. On observe l'existence d'une première zone, près de l'origine dans le plan  $(\delta\ell/\ell_0, F/S_0)$ , dans laquelle l'expérience est *réversible*, et il existe une relation *linéaire* entre  $F/S_0$  et  $\delta\ell/\ell_0$ . C'est cette région qui correspond au *comportement élastique linéaire*. On peut y identifier une première constante caractéristique du matériau, son *module d'Young*<sup>5</sup>  $E$ , tel que

$$\frac{F}{S_0} = E \frac{\delta\ell}{\ell_0} \iff \frac{\delta\ell}{\ell_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_0}. \quad (4.5)$$

En première approximation le champ des déplacements verticaux (dans la direction de la traction) est, dans la partie utile de l'éprouvette, linéaire de la forme

$$u_z = \epsilon_{zz} Z, \quad (4.6)$$

avec en conséquence  $\delta\ell = u_z(Z = \ell_0) - u_z(Z = 0) = \epsilon_{zz}\ell_0$ . Ainsi la relation (4.5) peut s'écrire

$$\epsilon_{zz} = \frac{\delta\ell}{\ell_0} = \frac{\ell}{\ell_0} - 1 = \frac{dz}{dZ} - 1 = \frac{1}{E} \frac{F}{S_0}, \quad (4.7)$$

où l'on a fait apparaître le fait qu'en transformation homogène la variation de segments infinitésimaux égale celle de segments de taille finie. Dans le cas de l'acier présenté sur la figure 4.2c, on a

$$E \simeq \frac{200 \text{ MPa}}{10^{-3}} = 200 \text{ GPa}. \quad (4.8)$$

4. Le maillage présenté ne comprend pas les zones qui seraient en réalité prises par les mors, l'essai numérique réalisé est en ce sens « idéalisé ». Cependant, les conditions limites utilisées sont équivalentes, au sens du principe de Saint Venant que l'on verra plus loin, aux conditions réelles...

5. Du nom d'un physicien anglais du début XIX<sup>ème</sup>; en anglais on appelle justement  $E$  the 'Young's modulus'.

Par contre, si on dépasse la **limite d'élasticité** (en traction) marquée  $\alpha$  sur la figure 4.2c, la relation entre  $F/S_0$  et  $\delta\ell/\ell_0$  devient **non linéaire**, et l'expérience **irréversible**. Par exemple si, une fois arrivé en  $\beta$  sur la figure 4.2c, on relâche la force de traction, on obtient à force nulle un état où l'éprouvette présente un **allongement rémanent** mesuré par la position  $\gamma$ . On qualifie ce régime de **régime élastoplastique**. Dans le cas de l'acier présenté sur la figure 4.2c, la contrainte limite d'élasticité en traction est

$$\sigma_0 \simeq 92 \text{ MPa} . \quad (4.9)$$

La rupture viendra à valeurs beaucoup plus hautes de  $F/S_0$ , au delà des limites de la figure 4.2c... Ce type de comportement à fortes sollicitations est caractéristique des matériaux **ductiles** ; au contraire, dans les matériaux **fragiles**, la rupture suit de façon immédiate ou quasi immédiate la limite élastique, lorsque l'on augmente les sollicitations (cf. par exemple le problème 4.7).

Revenant au régime élastique qui nous intéresse ici, un autre résultat expérimental général et très important est que, dans le régime élastique linéaire, il existe une **contraction** dans les directions  $x$  et  $y$  perpendiculaires à la direction de traction  $z$ , comme cela est visible sur la figure 4.2b. Avec les notations de la section 2.1, on peut prouver expérimentalement, en faisant par exemple des mesures optiques de cette contraction, l'existence d'un **coefficient de Poisson**<sup>6</sup>

$$\nu > 0 , \quad (4.10)$$

dépendant seulement du matériau, tel que

$$\boxed{\epsilon_{xx} = \frac{dx}{dX} - 1 = \epsilon_{yy} = \frac{dy}{dY} - 1 = -\nu \left( \frac{dz}{dZ} - 1 \right) = -\nu \epsilon_{zz}} . \quad (4.11)$$

Pour un acier,  $\nu$  est de l'ordre de 0,3 ; cet ordre de grandeur se retrouve dans beaucoup de matériaux. L'ordre de grandeur de  $E$  et  $\nu$  pour divers matériaux est donné dans le tableau 4.1.

### 4.1.2 Approche par essais-erreurs basée sur l'étude de la traction pure

Comme on l'a annoncé en introduction, on utilise une approche heuristique par essais-erreurs pour établir la loi de comportement du solide élastique isotrope, en régime linéaire. Ceci nous permettra de bien réfléchir et mettre en place le cadre de travail « standard » en mécanique des milieux solides, en décortiquant un exemple pertinent de sollicitation mécanique.

#### Première tentative

Dans le régime élastique linéaire, en s'inspirant de la relation (4.7), il semble naturel de postuler l'existence d'une relation locale linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations,

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left( \bar{\bar{\nabla}} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\bar{\nabla}} \bar{\mathbf{u}}^T \right) = \bar{\bar{\mathbf{L}}}(\bar{\bar{\sigma}}) . \quad (4.12)$$

On utilise le tenseur des déformations linéarisé puisque, désormais, on se place en petits déplacements et petite transformation. Une relation du type de (4.12) est cohérente avec la définition donnée en section 1.1.1 des solides, pour lesquels, comme cela est représenté sur la figure 1.1, une force constante implique un déplacement constant<sup>7</sup>. On peut aussi noter que cette loi implique

6. Mathématicien et physicien français du XIX<sup>ème</sup> siècle ; en anglais on appelle  $\nu$  the 'Poisson's ratio'.

7. Alors que, dans les fluides, une force constante implique une vitesse constante.

Matériau solide	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$E$ [GPa]	$\nu$
Acier	7800	180 à 220	0,28
Aluminium	2700	70	0,33
Uranium	18900	170	0,23
Diamant	3500	1000	0,2
Verre	2500	90	0,22
Caoutchouc	900	0,001 à 0,1	0,49
Caoutchouc chargé en carbone	900	0,1 à 1	0,49
Béton	1800 à 2500	20 à 50	0,2

**Tab. 4.1** – Valeurs typiques de la *masse volumique*  $\rho$ , du *module d'Young*  $E$  et du *coefficient de Poisson*  $\nu$  de divers matériaux solides, dans des conditions standard de température et de pression. La variabilité des lignes correspondant aux aciers, caoutchoucs (ou élastomères) et bétons s'explique par le fait qu'il existe différents types ou « qualités » de ces matériaux. Notez enfin que le coefficient de Poisson des caoutchoucs approche la valeur limite 0,5 correspondant à un matériau incompressible, cf. la section 4.1.7.

bien qu'un mouvement de solide indéformable, correspondant à une rotation en bloc, avec  $\overline{\nabla \mathbf{u}}$  antisymétrique en vertu de la décomposition de la section 2.1.9, ne crée pas de contraintes internes dans un matériau,

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{L}}(\overline{\mathbf{0}}).$$

Au vu de la relation globale (4.7), il est tentant de poser, tout simplement, une relation de proportionnalité entre  $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  et  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ , i.e.

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{E} \overline{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (\Delta \text{ formule fausse!}) \quad (4.13)$$

Cette relation peut sembler, à première vue, correspondre à la forme générale d'une relation linéaire entre  $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  et  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$  dans le cas considéré dans tout ce chapitre d'un *matériau isotrope*. Cette hypothèse d'isotropie,

$$\text{il n'y a aucune direction privilégiée a priori dans le matériau,} \quad (4.14)$$

a en effet pour conséquence que les directions propres des tenseurs des déformations et des contraintes ne peuvent que coïncider, ce qui est bien assuré par (4.13). Ainsi, seules les sollicitations mécaniques imposées au matériau introduisent (éventuellement) des directions privilégiées dans le matériau « sous tension », à savoir les directions propres des tenseurs  $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  et  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$  (deux directions propres sont réellement « privilégiées » l'une par rapport à l'autre seulement si les valeurs propres associées diffèrent).

### Test : modélisation de la traction pure

Examinons ce que donnerait la loi de comportement (4.13) dans le cas de l'expérience de traction pure présentée sur la figure 4.2a. On *ne prend pas en compte* dans cette modélisation, et ceci est *très fréquent en mécanique des solides*, les effets de la *pesanteur* et de la *pression de l'air ambiant*. Il y a deux raisons à cela. Premièrement les contraintes dues à la pesanteur, de l'ordre de

$$\frac{mg}{S} \simeq \frac{1 \text{ kg } 10 \text{ m}^2/\text{s}}{10 \text{ cm}^2} = 10 \text{ kPa},$$

ou à la pression atmosphérique, de l'ordre de

$$p_0 = 1 \text{ atm} \simeq 100 \text{ kPa} = 1000 \text{ hPa},$$

sont souvent *négligeables* devant les contraintes mises en jeu en mécanique des solides, cf. les échelles de contrainte du graphe de la figure 4.2b. Deuxièmement, la pesanteur et la pression atmosphérique étaient déjà présentes dans la configuration de référence, et on travaille souvent en élasticité linéaire en *différence* par rapport à cette configuration de référence : on ne calcule pas  $\bar{\sigma}$  mais  $\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_0$ , où  $\bar{\sigma}_0$  est le tenseur des contraintes dans la configuration de référence, en l'absence de tout effort de traction. On anticipe ici sur la linéarité des problèmes d'élasticité, sur laquelle on reviendra section 4.2.2.

Compte tenu de l'absence effective de la pesanteur pour notre problème de traction, l'état de contrainte peut être considéré comme homogène dans toute la partie utile de l'éprouvette, de forme cylindrique. On satisfait alors bien l'équation d'équilibre (4.1),

$$\bar{\sigma} \text{ indépendant de } \bar{\mathbf{X}} \implies \bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{div}} \bar{\sigma}. \quad (4.15)$$

Écrivons d'autre part les conditions limites aux bords de la partie utile de l'éprouvette. Celle-ci est un cylindre d'axe Oz, de rayon de référence  $a$  et de hauteur de référence  $\ell_0$ , O étant choisi au centre de la section de cette partie utile la plus proche de la tête inférieure B.

- Sur les bords latéraux, pour  $X^2 + Y^2 = a^2$ ,  $Z \in [0, \ell_0]$  : *condition de surface libre*<sup>8</sup>

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\sigma} \cdot \frac{X\bar{\mathbf{e}}_x + Y\bar{\mathbf{e}}_y}{a} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (4.16)$$

- Sur la section limite inférieure, pour  $X^2 + Y^2 \in [0, a^2]$ ,  $Z = 0$  : *condition de force de traction uniformément imposée*

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\sigma} \cdot (-\bar{\mathbf{e}}_z) = -(F/S)\bar{\mathbf{e}}_z. \quad (4.17)$$

- Sur la section limite supérieure, pour  $X^2 + Y^2 \in [0, a^2]$ ,  $Z = \ell_0$  : *condition de force de traction uniformément imposée*

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{e}}_z = (F/S)\bar{\mathbf{e}}_z. \quad (4.18)$$

Une solution simple de ces équations est le tenseur des contraintes justement dit de **traction pure**

$$\bar{\sigma} = \sigma \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z \quad (4.19)$$

avec

$$\sigma = F/S \quad (4.20)$$

la contrainte de traction. Dans le cadre des hypothèses de petits déplacements et petite transformation utilisées ici, on peut confondre dans  $\sigma$  les valeurs de référence  $S_0$  et actuelle  $S$  de la section de l'éprouvette,

$$\sigma = F/S \simeq F/S_0. \quad (4.21)$$

Si on applique la « version 0 » (4.13) de notre loi de comportement des solides élastiques à ce tenseur des contraintes, on en déduit un état de déformation

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{E} \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{E} \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z. \quad (\Delta \text{ formule fausse!})$$

On aurait donc  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 0$ , en contradiction flagrante avec le phénomène de contraction des longueurs dans les plans horizontaux traduit par l'équation (4.11).

8. Puisque l'on peut oublier les effets de la pression de l'air ambiant.

### Deuxième tentative

En revenant en arrière, au niveau de l'équation (4.13), on peut remarquer que la relation « isotrope » linéaire la plus générale entre deux tenseurs  $\overline{\sigma}$  et  $\overline{\epsilon}$  comporte en fait deux termes, un terme proportionnel à  $\overline{\sigma}$  et un terme proportionnel à  $(\text{tr}\overline{\sigma})\overline{\mathbf{1}}$ . Il faut donc écrire en général

$$\overline{\epsilon} = \frac{1}{E_1}\overline{\sigma} + \frac{1}{E_2}(\text{tr}\overline{\sigma})\overline{\mathbf{1}}. \quad (4.22)$$

Cette relation est bien isotrope au sens déjà posé ci-dessus : les directions propres des tenseurs des déformations et des contraintes coïncident toujours, ce qui indique qu'il n'y a aucune direction privilégiée a priori par le matériau lui-même.

### Validation et enrichissement par un retour sur la modélisation de la traction pure

Afin d'identifier les constantes caractéristiques du matériau  $E_1$  et  $E_2$  introduites dans (4.22), revenons sur l'exemple de la traction pure. En injectant (4.19) dans (4.22), on obtient

$$\overline{\epsilon} = \frac{\sigma}{E_2}(\overline{\mathbf{e}}_x \otimes \overline{\mathbf{e}}_x + \overline{\mathbf{e}}_y \otimes \overline{\mathbf{e}}_y) + \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)\sigma\overline{\mathbf{e}}_z \otimes \overline{\mathbf{e}}_z. \quad (4.23)$$

En conséquence on a bien maintenant

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \frac{\sigma}{E_2} \neq 0,$$

et, par identification avec l'équation (4.11),

$$\frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}} = \frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}} = -\nu = \frac{1/E_2}{1/E_1 + 1/E_2} = \frac{1}{1 + E_2/E_1}. \quad (4.24)$$

D'autre part dans la direction  $z$  on obtient

$$\epsilon_{zz} = \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)\sigma,$$

qui donne, par identification avec (4.7), compte tenu de (4.21),

$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} = \frac{1}{E}. \quad (4.25)$$

La solution unique du système formé par les équations (4.24) et (4.25), qui est linéaire vis-à-vis de  $1/E_1$  et  $1/E_2$ , est donnée par

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1 + \nu}{E}, \quad \frac{1}{E_2} = -\frac{\nu}{E}. \quad (4.26)$$

### 4.1.3 Écriture de la loi contraintes $\rightarrow$ déformations

On déduit de ce qui précède l'expression de la *loi de comportement* (4.22) du *solide élastique isotrope en régime linéaire* en termes du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ ,

$$\boxed{\overline{\epsilon} = \frac{1 + \nu}{E}\overline{\sigma} - \frac{\nu}{E}(\text{tr}\overline{\sigma})\overline{\mathbf{1}}}. \quad (4.27)$$

Cette loi est souvent appelée *loi de Hooke*, en hommage aux travaux de pionnier de ce physicien anglais sur la mécanique des solides élastiques. En composantes dans une base orthonormée, elle s'écrit

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}. \quad (4.28)$$

#### 4.1.4 Ce que nous apprend le cas du cisaillement pur

Dans le cas du *cisaillement pur*, nous avons appris en traitant le problème 2.1 qu'en petits déplacements et petite transformation on a un tenseur des déformations linéarisé de la forme

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{k}{2}(\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1) \quad (4.29)$$

avec  $k = u_1/X_2 \ll 1$ . D'autre part l'état de contrainte correspondant a été déterminé dans l'exercice 3.2; en négligeant les effets de la pesanteur terrestre,  $g \simeq 0$ , on a

$$\bar{\bar{\sigma}} = \tau(\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1) \quad (4.30)$$

avec  $\tau = F/S$  la contrainte de cisaillement appliquée au niveau des plans  $X_2 = \pm a$ . Ces résultats sont bien entendu compatibles avec la loi de Hooke (4.27), à condition d'avoir

$$\frac{k}{2} = \frac{1 + \nu}{E} \tau. \quad (4.31)$$

On introduit en général le *module de cisaillement*<sup>9</sup>

$$\mu = \frac{\tau}{k} = \frac{\tau}{u_1/X_2} = \frac{\text{contrainte de cisaillement}}{\text{gradient de déplacement}}, \quad (4.32)$$

qui doit, physiquement, être strictement positif. Par identification avec (4.31), on obtient une expression du module de cisaillement en fonction de  $E$  et  $\nu$ ,

$$\boxed{\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}}. \quad (4.33)$$

Ceci montre qu'en général le coefficient de Poisson  $\nu > -1$ ... ce que l'on savait déjà d'après (4.10).

#### 4.1.5 Écriture de la loi déformations $\rightarrow$ contraintes

Nous sommes maintenant mûrs pour inverser la loi de Hooke écrite en (4.27), afin d'exprimer  $\bar{\bar{\sigma}}$  en fonction de  $\bar{\bar{\epsilon}}$ . En prenant la trace de (4.27), il vient

$$\text{tr} \bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \text{tr} \bar{\bar{\sigma}} - 3 \frac{\nu}{E} \text{tr} \bar{\bar{\sigma}} = \frac{1 - 2\nu}{E} \text{tr} \bar{\bar{\sigma}}. \quad (4.34)$$

La loi (4.27) montre donc que

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{E}{1 + \nu} \bar{\bar{\epsilon}} + \frac{\nu}{1 + \nu} (\text{tr} \bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{\mathbf{1}}} = \frac{E}{1 + \nu} \bar{\bar{\epsilon}} + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\text{tr} \bar{\bar{\epsilon}}) \bar{\bar{\mathbf{1}}}. \quad (4.35)$$

On reconnaît en facteur de  $\bar{\bar{\epsilon}}$  le double du module de cisaillement (4.33). Afin d'alléger les notations, on introduit aussi une notation pour le coefficient de  $(\text{tr} \bar{\bar{\epsilon}}) \bar{\bar{\mathbf{1}}}$ ; on appelle *premier coefficient de Lamé*

$$\boxed{\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}. \quad (4.36)$$

9. Les anglo-saxons appellent souvent  $\mu$  the 'shear modulus' or 'rigidity modulus', et le notent plutôt  $G$ .

Bien entendu le *second coefficient de Lamé* est alors le module de cisaillement (4.33). Au bilan on obtient une nouvelle version de la *loi de Hooke*,

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda (\text{tr} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) \bar{\mathbf{1}} + 2\mu \bar{\boldsymbol{\epsilon}}}, \quad (4.37)$$

soit, en composantes dans une base orthonormée,

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}. \quad (4.38)$$

On peut inverser les relations (4.33) et (4.36) pour montrer que

$$\boxed{E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}}. \quad (4.39)$$

#### 4.1.6 Et la masse volumique dans tout cela ?

Revenons pour la dernière fois dans ce chapitre sur la masse volumique  $\rho$ , en imaginant que l'on veuille aller au delà de l'approximation la plus courante (4.4). Il faut alors remonter au niveau de l'équation (4.3),

$$\rho(\bar{\mathbf{X}}, t) = \rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0) [1 - \text{div} \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t)] = \rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0) [1 - \text{tr} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\bar{\mathbf{X}}, t)] \quad (4.40)$$

puisque  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  est la partie symétrique de  $\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}$ . En conséquence la variation de densité entre la configuration initiale de référence et la configuration actuelle est

$$\frac{\delta \rho}{\rho}(\bar{\mathbf{X}}, t) = \frac{\rho(\bar{\mathbf{X}}, t) - \rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0)}{\rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0)} = -\text{tr} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\bar{\mathbf{X}}, t) = -\frac{1 - 2\nu}{E} \text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{X}}, t) \quad (4.41)$$

d'après (4.34).

#### 4.1.7 Ce que nous apprend le cas d'une compression pure

Un état de *compression pure* est caractérisé par une contraction homogène du milieu,

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = -\epsilon \bar{\mathbf{1}} \quad \text{avec} \quad \epsilon > 0, \quad (4.42)$$

sous l'effet d'un champ de pression uniforme

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -p \bar{\mathbf{1}} \quad \text{avec} \quad p > 0. \quad (4.43)$$

Bien entendu ceci est compatible avec la loi de Hooke, et, en utilisant l'équation (4.41), on obtient que, dans cet état, la densité augmente suivant

$$\frac{\delta \rho}{\rho}(\bar{\mathbf{X}}, t) = 3\epsilon = \frac{1 - 2\nu}{E} 3p. \quad (4.44)$$

Ceci permet d'obtenir une nouvelle inégalité portant sur le coefficient de Poisson,

$$1 - 2\nu > 0 \quad \iff \quad \boxed{\nu < 1/2}, \quad (4.45)$$

le cas limite,  $\nu = 1/2$ , correspondant à un *matériau incompressible*. Pour un matériau « strictement » incompressible, la loi de comportement de Hooke n'est plus valable<sup>10</sup>, et il faut introduire

10. Dans (4.37),  $\lambda \rightarrow \infty$  et  $\text{tr} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \rightarrow 0$ , le produit correspondant est donc indéterminé!..

un champ de pression, cf. par exemple [Le Tallec \(2009\)](#).

On peut remarquer que, d'après (4.36), l'inégalité (4.45) montre que le premier coefficient de Lamé  $\lambda$  est lui aussi positif. Une autre application de l'équation (4.44) est la définition du **module de compression**  $K$  par

$$K = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \iff \frac{1}{K} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\delta \rho}{\rho} = 3 \frac{1-2\nu}{E} \iff \boxed{K = \frac{E}{3(1-2\nu)}}. \quad (4.46)$$

On montre, à l'aide des expressions (4.39) de  $E$  et  $\nu$  en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$ , que

$$\boxed{K = \lambda + \frac{2}{3}\mu}. \quad (4.47)$$

## 4.2 Problèmes d'élasticité linéarisé : généralités

Un **problème d'élasticité linéarisé** est un problème impliquant un solide élastique isotrope en régime linéaire, dans l'hypothèse de petits déplacements et petite transformation. En faisant l'hypothèse simplificatrice (4.4), on doit alors résoudre, *dans le domaine occupé par le milieu continu solide*, l'équation de la quantité de mouvement (4.1),

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} = \rho_0 \bar{\mathbf{g}} + \overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}}, \quad (4.48)$$

dans laquelle  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  est lié à  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  donc à  $\bar{\mathbf{u}}$  par l'intermédiaire de la loi de Hooke (4.27) ou (4.37).

### 4.2.1 Conditions limites régulières

Bien entendu il importe de donner des *conditions limites* sur le bord du domaine occupé par le milieu continu solide. Ces conditions limites sont dites « **régulières** » si, quel que soit l'indice  $i$  de direction de coordonnée ( $i = 1, 2, 3$ ), quel que soit  $\bar{\mathbf{X}}$  sur le bord du domaine, on a

- soit une **condition limite en déplacement**,

$$\boxed{u_i(\bar{\mathbf{X}}) = u_i^d(\bar{\mathbf{X}}) \text{ donné}}; \quad (4.49)$$

- soit une **condition limite en contrainte**,

$$\boxed{T_i(\bar{\mathbf{X}}) = T_i^d(\bar{\mathbf{X}}) \text{ donné}}, \quad (4.50)$$

en notant toujours  $\bar{\mathbf{T}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$  le vecteur contrainte au point considéré.

Un exemple de condition du premier type (4.49) est celui d'un **encastrement**,

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{0}} \text{ sur un bord.} \quad (4.51)$$

Un exemple de condition du deuxième type (4.50) est celui d'une **surface libre**

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{0}} \text{ sur un bord.} \quad (4.52)$$

Une propriété importante d'un problème posé avec des conditions limites régulières est l'**existence et unicité de la solution en déplacements**  $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$ . Ce résultat, que nous admettons, peut se démontrer à l'aide d'une approche énergétique<sup>11</sup>, cf. par exemple les chapitres X de [Salençon \(1996\)](#) ou 9 de [Forest & Amestoy \(2020\)](#).

11. Ou, plus mathématiquement, « variationnelle ».

### 4.2.2 Linéarité : principe de superposition

Comme  $\bar{\sigma}$  dépend linéairement de  $\bar{\mathbf{u}}$ , la solution  $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$  d'un problème d'élasticité linéarisé dépend *linéairement* des « sources de déplacements » (ou de contraintes) que sont

- la force volumique de pesanteur  $\rho_0 \bar{\mathbf{g}}$  dans l'équation de la quantité de mouvement (4.48),
- les déplacements donnés  $u_i^d$  dans les conditions limites en déplacement (4.49),
- les contraintes données  $T_i^d$  dans les conditions limites en contrainte (4.50).

Ceci implique l'existence d'un *principe de superposition* permettant de découper un problème d'élasticité linéarisé en sous-problèmes plus simples : si on peut écrire toutes ces sources comme une somme de plusieurs sources, alors la solution sera la somme des solutions de tous les sous-problèmes correspondants à chacune de ces sources. Ce principe permet par exemple d'isoler les effets de la pesanteur ou de la pression d'un gaz ambiant sur un solide, comme cela a été expliqué dans la section 4.1.2 p. 75.

### 4.2.3 Conditions limites globales - Principe de Saint Venant

Il n'est pas toujours facile de définir, pour un problème d'ingénieur donné, des conditions limites aussi précises que celles écrites plus haut (4.49) ou (4.50). Considérons par exemple le pilier d'un pont routier. Il repose sur des fondations enfoncées assez profondément dans le sol, fondations qui constituent en fait le prolongement souterrain de ce pilier. Les conditions limites qui s'appliquent à l'interface entre le béton constituant ces fondations et le sol ne sont pas simples à deviner. On se contente souvent d'écrire, pour cette raison, des *conditions limites globales*, impliquant une intégrale de surface sur la portion  $S$  considérée du bord (ou sur une coupe virtuelle délimitée par une section  $S$ , située près du bord) :

$$\frac{1}{S} \iint_S u_i d^2S = u_i^d \text{ déplacement moyen donné,} \quad (4.53)$$

ou

$$\iint_S T_i d^2S = F_i^d \text{ force donnée,} \quad (4.54)$$

ou encore, pour un problème dans lequel un couple est appliqué<sup>12</sup>,

$$\iint_S (\overline{\mathbf{AM}} \wedge \overline{\mathbf{T}})_i d^2S = \Gamma_i^d(A) \text{ couple donné.} \quad (4.55)$$

Une conséquence de l'approche par conditions limites globales de la forme (4.53), (4.54) ou (4.55) est que l'on perd l'unicité des solutions du problème, qui devient en quelque sorte mal posé. Ceci n'est pas forcément très dommageable car on a alors, éventuellement, plus de « chance » pour trouver une solution analytique « simple ». Le *principe de Saint Venant*<sup>13</sup> stipule de plus que, si le milieu solide étudié est « élancé » au sens où on peut isoler des régions « centrales » « loin » des bords où sont seulement posées des conditions limites globales, alors toutes les solutions possibles de ce problème mal posé présentent un comportement similaire dans ces régions « centrales ». En d'autres termes toute solution trouvée sera, a priori, pertinente dans les régions « centrales » du milieu, mais, par contre, sujette à caution près des bords où sont seulement posées des conditions limites globales. Une illustration de ce principe sera donnée avec l'expérience de photoélasticité sur

12. La définition générale d'un couple a été rappelée en section 3.2.6.

13. Ingénieur français du XIX<sup>ème</sup> siècle.

un barreau ou « *poutre* » en flexion, cf. la figure 4.3 et le problème 4.1. On notera que dans ce problème 4.1, on exprimera les conditions limites globales sur des « coupes virtuelles » du barreau, prenant la forme d'une section droite ou gauche, de forme simple. Une approche similaire sera utilisée dans le problème 5.1...

#### 4.2.4 Solutions analytiques (+ ou – exactes) ou numériques ?

Nous sommes maintenant armés pour discuter des deux grandes méthodes de recherche de solutions analytiques d'un problème d'élasticité linéarisé. Avant cela, il faut insister sur le fait que des solutions analytiques exactes de problèmes réguliers n'existent que *rarement*, et que pour des « *problèmes simples* », par exemple des problèmes bidimensionnels. Si l'on accepte de traiter des problèmes non réguliers, dans le cas de corps élancés, on a plus de possibilités pour trouver des solutions analytiques. Cependant celles-ci doivent être considérées comme « approchées », puisqu'elles ne sont valables que « loin de certains bords » (ceux où sont posés des conditions limites globales) du corps solide considéré d'après le principe de Saint Venant. C'est justement l'objet de la « *théorie des poutres* », souvent considérée comme une sous-discipline de la « *résistance des matériaux* », que de systématiser ce type d'approche « à la Saint Venant ». Aux Mines de Nancy, des éléments de théorie des poutres seront donnés en deuxième année dans le département *Géoingénierie* dans le cadre du cours correspondant d'Olivier Deck.

Malheureusement<sup>14</sup> de nombreux systèmes mécaniques pertinents pour l'ingénieur utilisent des corps qui ne sont pas élancés ; que l'on songe par exemple à une voiture ou à une turbine. De plus, même dans le cas de corps élancés, on peut désirer, pour garantir la sécurité d'un système par exemple, être capable de « calculer » une solution « la plus précise possible » d'un problème de mécanique, en allant plus loin qu'une approche globale « à la Saint Venant ». Ceci est heureusement possible grâce à l'*approche numérique*, le plus souvent basée, en mécanique des solides, sur des « *méthodes d'éléments finis* »<sup>15</sup> consistant grosso modo à discrétiser le domaine occupé par le milieu continu en petits domaines élémentaires, sur lesquels les champs sont constants<sup>16</sup>. On remplace alors une équation aux dérivées partielles (typiquement 4.48) par un grand nombre d'équations différentielles ordinaires, qui sont ensuite résolues numériquement. Diverses initiations à ces méthodes sont proposées à Mines Nancy en deuxième année, par exemple dans le cadre du cours de Jenny (2019) du département *Énergie*. Un ouvrage de référence assez exhaustif sur les méthodes d'éléments finis est le traité en trois volumes de Zienkiewicz & Taylor (2000). Ce traité fourmille d'exemples et d'illustrations ; le feuilleter ne peut-être que bénéfique.

### 4.3 Méthode des déplacements - Équation de Navier

La méthode de résolution la plus naturelle, a priori, pour résoudre un problème d'élasticité linéarisé, consiste à considérer comme *inconnue* « *primaire* » le *champ de déplacements*  $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$ . On doit alors résoudre, dans le domaine occupé par le milieu continu solide, l'équation de

14. Pour les adeptes des calculs analytiques.

15. Ces méthodes peuvent aussi être utilisées en mécanique des fluides, comme le prouve le titre du troisième volume de Zienkiewicz & Taylor (2000) !

16. En reprenant les notations de la section 1.1.1, ces domaines sont petits par rapport à l'échelle  $L$  des gradients macroscopiques, mais grands par rapport à l'échelle  $\ell$  des gradients microscopiques, de sorte que, à leur échelle, les lois de la mécanique des milieux continus restent valables.

la quantité de mouvement (4.48), dans laquelle il est naturel d'exprimer  $\bar{\sigma}$  en terme de

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \left( \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T \right) \quad (4.56)$$

grâce à la loi de Hooke (4.37),

$$\bar{\sigma} = \lambda (\text{tr} \bar{\epsilon}) \bar{\mathbf{1}} + 2\mu \bar{\epsilon} . \quad (4.57)$$

L'exercice de calcul tensoriel 2.9 montre que l'on peut obtenir avec cette démarche une équation de la quantité de mouvement qui fait seulement intervenir le champ de déplacements,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} = \rho_0 \bar{\mathbf{g}} + (\lambda + \mu) \bar{\nabla} \text{div} \bar{\mathbf{u}} + \mu \bar{\Delta} \bar{\mathbf{u}} \quad (4.58)$$

ou encore

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} = \rho_0 \bar{\mathbf{g}} + (\lambda + 2\mu) \bar{\nabla} \text{div} \bar{\mathbf{u}} - \mu \bar{\text{rot}}(\bar{\text{rot}} \bar{\mathbf{u}}) . \quad (4.59)$$

Ces deux équations sont deux formes équivalentes de l'*équation de Navier*<sup>17</sup>. Bien entendu il faut aussi prendre en compte les conditions limites du problème.

## 4.4 Méthode des contraintes

Dans cette approche l'*inconnue « primaire »* est le *champ de tenseur des contraintes*  $\bar{\sigma}(\bar{\mathbf{X}}, t)$ . Cette méthode est surtout utilisée pour des problèmes de *statique*, puisqu'alors on n'a pas besoin du champ de déplacements pour expliciter la loi de la quantité de mouvement,

$$\bar{\mathbf{0}} = \rho_0 \bar{\mathbf{g}} + \bar{\text{div}} \bar{\sigma} , \quad (4.60)$$

La démarche utilisée est alors, en général, de résoudre d'abord cette équation ainsi que les conditions limites en contrainte, puis de calculer  $\bar{\epsilon}$  à l'aide de la loi de Hooke (4.27),

$$\bar{\epsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\sigma}) \bar{\mathbf{1}} . \quad (4.61)$$

L'existence d'un champ de déplacements  $\bar{\mathbf{u}}$  tel que

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \left( \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T \right) \quad (4.62)$$

17. Mécanicien français du début du XIX<sup>ème</sup> siècle. Selon les cas la première ou la seconde forme est la plus pratique ; par exemple pour un champ de déplacement irrotationnel on préférera utiliser la seconde forme (4.59).

n'est alors assurée, comme exposé dans la section 3.2.4 du cours de calcul tensoriel, que si les 6 *conditions de compatibilité géométrique*

$$\begin{array}{c}
 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial X_2 \partial X_2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial X_3 \partial X_3} \\
 \text{et les 2 autres éq. obtenues par permutation circulaire des indices} \\
 \\
 \frac{\partial^2 \epsilon_{13}}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial^2 \epsilon_{32}}{\partial X_3 \partial X_1} = \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial X_3 \partial X_3} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial X_2 \partial X_1} \\
 \text{et les 2 autres éq. obtenues par permutation circulaire des indices}
 \end{array}
 \tag{4.63}$$

en repère orthonormé, sont vérifiées. On peut reformuler ces conditions en terme de  $\bar{\sigma}$  grâce à (4.61); on obtient alors les « *équations de Beltrami* »<sup>18</sup>, cf. par exemple les sections VIII.6 de Salençon (1996) ou 9.1 de Forest & Amestoy (2020).

Une fois l'existence de  $\bar{\mathbf{u}}$  assurée, encore faut-il le calculer. Pour cela on intègre les équations (4.62) sachant que leur solution n'est pas unique. En effet la différence entre deux champs  $\bar{\mathbf{u}}_1$  et  $\bar{\mathbf{u}}_2$  solutions de (4.62), soit  $\bar{\mathbf{u}}_3 = \bar{\mathbf{u}}_2 - \bar{\mathbf{u}}_1$ , vérifie

$$\bar{\bar{\epsilon}}(\bar{\mathbf{u}}_3) = \frac{1}{2} \left( \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}_3 + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}_3^T \right) = \bar{\mathbf{0}},$$

c'est donc un champ de déplacements de solide indéformable. D'après l'étude de la section 2.1.8,  $\bar{\mathbf{u}}_3$  est un *champ de moments*

$$\bar{\mathbf{u}}_3 = \bar{\mathbf{u}}_2 - \bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{\mathbf{u}}_0 + \bar{\Omega} \wedge \bar{\mathbf{X}}. \tag{4.64}$$

L'idée pour intégrer (4.62) est donc de *rechercher seulement une solution particulière* de ce problème; *la solution générale s'en déduira par ajout d'un champ de moments (4.64) quelconque*. En pratique on commence par intégrer par rapport à  $X_1$  la composante 11 de (4.62),

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \epsilon_{11} \implies u_1 = \int \epsilon_{11} dX_1 + \varphi_1(X_2, X_3), \tag{4.65}$$

par rapport à  $X_2$  la composante 22 de (4.62),

$$\frac{\partial u_2}{\partial X_2} = \epsilon_{22} \implies u_2 = \int \epsilon_{22} dX_2 + \varphi_2(X_3, X_1), \tag{4.66}$$

par rapport à  $X_3$  la composante 33 de (4.62),

$$\frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \epsilon_{33} \implies u_3 = \int \epsilon_{33} dX_3 + \varphi_3(X_1, X_2), \tag{4.67}$$

puis on essaye de deviner une forme simple des fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  permettant de satisfaire aussi les composantes non diagonales de (4.62),

$$\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} = 2\epsilon_{12}, \tag{4.68}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} = 2\epsilon_{23}, \tag{4.69}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} = 2\epsilon_{31}. \tag{4.70}$$

18. Mathématicien et physicien italien du XIX<sup>ème</sup> siècle.

Ensuite seulement on se préoccupe des conditions limites en déplacement, qui, en général, permettent de déterminer les 6 paramètres du champ de moments libre dans  $\bar{\mathbf{u}}$ , de sorte que la solution en déplacements soit vraiment unique.

## 4.5 Ouverture : tenseur des coefficients élastiques - cas de matériaux anisotropes

Dans le cas de *matériaux solides homogènes* travaillant en *petits déplacements* et *petite transformation, régime élastique linéaire*, mais sans hypothèse d'isotropie, on peut écrire la *loi de Hooke généralisée*

$$\bar{\bar{\bar{\sigma}}} = \bar{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} \quad (4.71)$$

où  $\bar{\bar{\bar{C}}}$  est le *tenseur* d'ordre 4 des *coefficients élastiques* ou *modules d'élasticité*, selon les auteurs (Le Tallec 2009 utilise des notations très proches, Forest & Amestoy 2020 notent  $\Lambda$  au lieu de  $C$ ). Dans le cas d'un *matériau anisotrope* d'axes d'anisotropie donnés par le repère « matériau »  $Ox_1x_2x_3$  de base associée  $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ , le tenseur des coefficients élastiques s'écrit naturellement dans cette base

$$\bar{\bar{\bar{C}}} = C_{ijkl} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j \otimes \bar{\mathbf{e}}_k \otimes \bar{\mathbf{e}}_l, \quad (4.72)$$

puisque'il est « attaché » au matériau. La loi de comportement (4.71) s'écrit alors en composantes

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} = C_{ijkl} \epsilon_{lk}. \quad (4.73)$$

On peut montrer les propriétés de symétrie suivantes

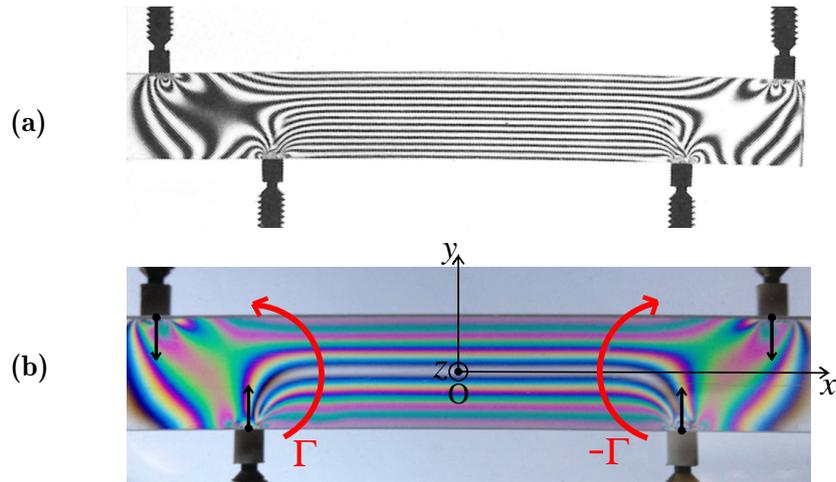
$$C_{ijkl} = C_{jikl}; \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}; \quad C_{ijkl} = C_{klij}. \quad (4.74)$$

En conséquence, on peut montrer que le nombre de constantes élastiques indépendantes permettant de décrire le comportement d'un matériau complètement anisotrope n'est pas  $3^4 = 81$  mais « seulement » 21, contre 2 dans le cas d'un matériau isotrope (à savoir les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ ). L'étude de la forme de  $\bar{\bar{\bar{C}}}$  en fonction des propriétés de symétrie du matériau est esquissée dans Le Tallec (2009); Forest & Amestoy (2020). Plus le matériau possède de symétries, plus on peut réduire la forme du tenseur  $\bar{\bar{\bar{C}}}$ ... pour arriver, dans le cas d'un matériau *isotrope*, à des coefficients  $C_{ijkl}$  souvent nuls<sup>19</sup>, tandis que ceux qui sont non nuls ne dépendent que des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ ...

## 4.6 Problèmes

Nous mettons à votre disposition, dans cette section, huit problèmes de mécanique des solides. Un neuvième problème est présenté à la fin du chapitre 5, ses questions 4.b et 7.b faisant en effet référence à des informations données dans le chapitre 5. Cependant, ces questions permettant une validation ne sont pas cruciales, le problème 5.1 pourrait donc être abordé « indépendamment » de la lecture et assimilation du chapitre 5.

19. Dans ce cas isotrope,  $\bar{\bar{\bar{C}}}$  est représenté dans toute base par les mêmes composantes ou coefficients  $C_{ijkl}$ .



**Fig. 4.3** – **a** : Photographie d'un *barreau parallélépipédique en flexion* dans le système de *photoélasticité Stress-Opticon* de VISHAY MEASUREMENTS GROUP (manuel de l'utilisateur). Le barreau est observé en lumière monochromatique, d'où des franges isochromatiques bien définies. **b (en couleurs dans la version PDF)** : Photographie (augmentée) d'un barreau en flexion, dans le même système, observé en lumière polychromatique, d'où des franges isochromatiques colorées. Au centre, le repère  $Oxyz$  utilisé. Au niveau des 4 appuis, les vecteurs épais représentent les forces appliquées. Considérés « de loin », c'est-à-dire de la partie centrale du barreau, on peut voir l'effet des forces deux à deux opposées, appliquées en des points légèrement décalés, comme des couples représentés par les flèches courbes épaisses.

#### Problème 4.1 Étude d'un barreau parallélépipédique en flexion pure

On veut modéliser une **expérience réalisée en amphi et TD**, présentée sur la figure 4.3. Un barreau parallélépipédique<sup>20</sup> en plexyglass est disposé dans un montage de *photoélasticité*, c'est-à-dire entre polariseur, analyseur et lames quart d'ondes. Ceci permet de visualiser les *franges isochromatiques claires*, lieu des points où  $\tau_{\max}(\bar{\mathbf{X}})$  défini par (3.65) est multiple d'une certaine contrainte  $\sigma_0$  dépendant des propriétés optiques du matériau et de la longueur d'onde moyenne de la lumière,

$$\tau_{\max}(\bar{\mathbf{X}}) = \max_{\bar{\mathbf{n}}} \tau(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{n}}) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \simeq n\sigma_0 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad (4.75)$$

entre lesquelles s'intercalent des *franges isochromatiques sombres*<sup>21</sup>. Ce barreau est en contact avec 4 points d'appuis  $P_i$  situés sur sa frontière. Dans la configuration de référence à forces d'appui nulles, les positions de ces points, dans le repère orthonormé de travail  $Oxyz$ , sont données par

$$\overline{\mathbf{OP}}_1 = -b\bar{\mathbf{e}}_x + h\bar{\mathbf{e}}_y, \quad \overline{\mathbf{OP}}_2 = -a\bar{\mathbf{e}}_x - h\bar{\mathbf{e}}_y, \quad \overline{\mathbf{OP}}_3 = a\bar{\mathbf{e}}_x - h\bar{\mathbf{e}}_y, \quad \overline{\mathbf{OP}}_4 = b\bar{\mathbf{e}}_x + h\bar{\mathbf{e}}_y.$$

Le barreau a une épaisseur  $2e$  dans la direction  $z$ , avec deux surfaces libres situées en  $z = \pm e$ . Lorsque les forces d'appui ont la même intensité  $F \neq 0$ , ces points ne bougent que très légèrement, puisque l'on se place dans les hypothèses standard de petits déplacements et petite transformation. On résout ce problème dans la région centrale du barreau, définie par

$$-a_0 \leq x \leq +a_0 \quad \text{avec} \quad a_0 < a,$$

20. Prototype de « *poutre* », cf. le 3<sup>ème</sup> paragraphe de l'introduction !

21. Le phénomène qui permet la photoélasticimétrie est l'*anisotropie optique* du matériau sous contrainte, que l'on peut supposer directement liée à l'*anisotropie mécanique*, i.e. le fait que les tenseurs des contraintes et des déformations possèdent des valeurs propres distinctes correspondant à des directions propres distinctes. On trouvera des explications détaillées sur la physique de ce phénomène dans l'annexe C.

où les franges sont des segments parallèles aux grands côtés. Dans cette région, « loin » des points d'appuis  $P_i$ , d'après le principe de Saint Venant, on peut caractériser les conditions limites aux bords gauche et droit par des couples appliqués globalement  $\bar{\Gamma}$  et  $-\bar{\Gamma}$ .

**1** En étudiant par exemple l'équilibre de la portion de barreau de droite, située au delà de la coupe virtuelle en  $x = a_0$ , calculez  $\bar{\Gamma}$  en fonction du chargement, i.e., des coordonnées géométriques définissant les points d'application des forces, et de l'intensité  $F$  de ces forces.

**2.1** Écrivez les conditions limites locales en contrainte qu'il faut respecter sur les frontières situées en  $y = \pm h$ ,  $z = \pm e$  dans la région centrale du barreau.

**2.2** Écrivez les conditions limites globales en contrainte qu'il faut respecter sur les coupes virtuelles en  $x = \mp a_0$  de la région centrale du barreau, pour garantir l'application de forces nulles de chaque côté, et des moments  $\bar{\Gamma}$  et  $-\bar{\Gamma}$  introduits à la question 1.

**3** Comment s'écrit l'équation de la quantité de mouvement pour ce problème de statique ?

**4** On cherche une solution en contrainte de ce problème. Pour cela on suppose tout simplement que toutes les composantes de  $\bar{\sigma}$  vérifiant des conditions limites locales de nullité à certains bords sont nulles dans tout le domaine matériel. Montrez qu'alors une seule composante de  $\bar{\sigma}$ ,  $\sigma_{xx}$ , est potentiellement non nulle.

**5** Poursuivez la recherche d'une solution simple en contrainte, en supposant que  $\sigma_{xx}$  est une fonction affine des coordonnées,

$$\bar{\sigma} = (A + BX + CY + DZ) \bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_x . \quad (4.76)$$

**5.1** Que donne l'équation de la quantité de mouvement dans ces conditions ?

**5.2** En annulant éventuellement certains coefficients a priori pour des raisons de symétrie, et avec les conditions limites globales établies à la question 2.2, déterminez les valeurs des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  du modèle (4.76). Vous vérifierez par analyse dimensionnelle la validité de vos résultats.

**6** Diagonalisez le tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$  en tout point de la partie centrale du barreau, et représentez les cercles de Mohr associés. Comment peut-on qualifier l'état de contrainte en général ? dans la zone  $Y > 0$  ? dans la zone  $Y < 0$  ?

**7** Expliquez les observations de photoélasticimétrie de la figure 4.3.

**8** Calculez le champ de tenseur de déformation. Donnez-en une expression intrinsèque.

**9** A t'on a priori existence d'un champ de déplacements  $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}})$  dont ce tenseur de déformation dérive ?

**10** Avec la méthode expliquée dans la section 4.4, intégrez le champ de déformation de ce problème pour en déduire le champ de déplacements. Vous ferez des hypothèses raisonnables concernant les constantes d'intégration de ce calcul, c'est-à-dire le champ de moments libre dans  $\bar{\mathbf{u}}$ . Interprétez physiquement la structure du champ de déplacements ainsi obtenu, que vous représenterez autant que possible.

### Problème 4.2 Étude de contacts rectilignes avec forces de compression

On considère un **solide élastique isotrope** en régime linéaire, petits déplacements et petite transformation. Dans le repère cartésien  $Oxyz$  ce solide occupe le *demi espace infini* défini par  $x > 0$ . On utilise aussi des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  comme représenté sur la figure 4.4. Ce solide est mis en contact avec un objet rigide, sur une ligne de contact dans la partie I (figure 4.4), sur une bande de contact dans la partie II (figure 4.6), cet objet exerçant sur lui des forces de contact de compression. On suppose les « **déplacements plans  $xy$**  » : sous l'effet de ces forces le champ de déplacement

$$\bar{\mathbf{u}} = u_r(r, \theta) \bar{\mathbf{e}}_r + u_\theta(r, \theta) \bar{\mathbf{e}}_\theta \quad (4.77)$$

avec  $\{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\}$  la base locale des coordonnées cylindriques.

#### I Contact rectiligne avec une force de compression localisée (figure 4.4)

Sur l'intersection entre la ligne de contact  $Oz$  et l'intervalle  $z \in [-L_z/2, L_z/2]$ , l'objet rigide applique une force uniformément répartie  $\bar{\mathbf{F}}(L_z) = F' L_z \bar{\mathbf{e}}_x$  avec  $F' > 0$  la *force linéique*. Ceci est valable quelque soit  $L_z$ . En dehors de la ligne de contact la surface  $yOz$  est libre. On suppose que le tenseur des contraintes dans le solide peut être pris sous la forme

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \sigma_{rr} \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + \sigma_{zz} \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z \quad \text{avec} \quad \sigma_{rr} = -A \frac{\cos \theta}{r}, \quad \sigma_{zz} = -B \frac{\cos \theta}{r}, \quad (4.78)$$

$A, B$  des constantes  $> 0$  à préciser.

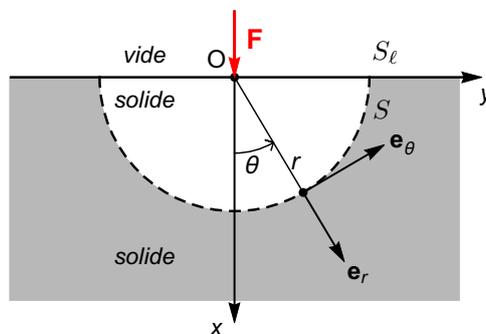
1 Soit la surface  $S_\ell = \{(r, \theta, z) \text{ tels que } r > 0, \theta = \pm\pi/2, z \in \mathbb{R}\}$ . Vérifiez, en calculant le vecteur contrainte sur cette frontière du solide, qu'elle est bien libre.

2 Soit  $r_0 > 0$ . On considère une coupe virtuelle du solide définie par ses frontières

$$S = \{(r, \theta, z) \text{ tels que } r = r_0, \theta \in [-\pi/2, \pi/2], z \in [-L_z/2, L_z/2]\}$$

et  $S_z^\pm = \{(r, \theta, z) \text{ tels que } r \in [0, r_0], \theta \in [-\pi/2, \pi/2], z = \pm L_z/2\}$ ,

séparant une zone « externe » contenant  $O$  (en blanc) d'une zone « interne » loin de  $O$  (en gris figure 4.4). Sur  $S$ , calculez le vecteur contrainte  $\bar{\mathbf{T}}$  exercé par la partie externe sur la partie interne. Représentez ce champ  $\bar{\mathbf{T}}$  sur  $S \cap xOy$ . Commentez : quel type de contrainte exerce la partie externe sur la partie interne ? Est-ce que la situation représentée dans le plan  $z = 0$  dépend de  $z$  ?



**Fig. 4.4** – Situation étudiée dans le problème 4.2 - partie I : *force de compression localisée*, appliquée au niveau de l'axe  $Oz$  sur un solide infini. En gris, le domaine « interne » isolé par coupe virtuelle considéré en question 2.

**3** On considère maintenant la portion de solide virtuellement coupée complémentaire de la précédente i.e. contenant O (en gris figure 4.5a). Expliquez pourquoi la condition d'équilibre global de cette portion s'écrit

$$\bar{\mathbf{F}} + \iint_S -\bar{\mathbf{T}} d^2S = \bar{\mathbf{0}}$$

où  $\bar{\mathbf{T}}$  est le même qu'en question 2. Représentez cet équilibre dans le plan  $xOy$ . Montrez par un calcul que cette condition permet d'obtenir  $A$  en fonction de  $F'$ . Interprétez physiquement cette relation.

**4** On oublie la coupe virtuelle et s'intéresse dorénavant au solide infini. Explicitez les matrices représentant le gradient de déplacement, sa transposée et le tenseur des déformations linéarisé  $\bar{\bar{\epsilon}}$  dans la base  $\{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\}$  en terme des fonctions  $u_r, u_\theta$ , toujours inconnues à ce stade, et de leurs dérivées partielles.

**5** Déduez de la nullité de la composante  $\epsilon_{zz}$  et de la loi de comportement du solide, dans la version où les contraintes donnent les déformations, la relation entre  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{rr}$ ; confirmez que

$$\sigma_{zz} = -B \frac{\cos \theta}{r}$$

en donnant la valeur de  $B$  fonction de  $A$  et d'un coefficient élastique du matériau.

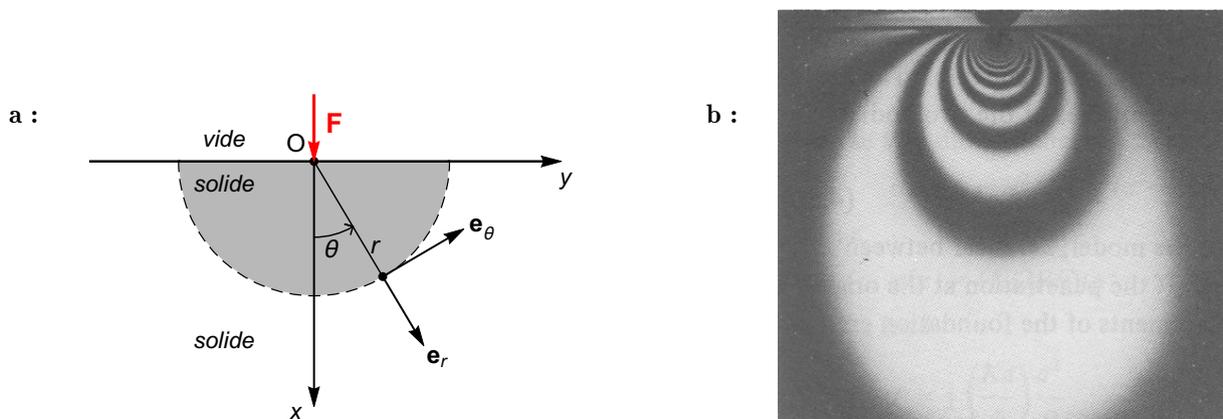
**6.a** Dans l'intérieur du solide, pour  $r > 0, |\theta| < \pi/2$ , déterminez les valeurs propres ordonnées  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  du tenseur des contraintes. Qualifiez par trois adjectifs physiques cet état de contrainte.

**6.b** On admet qu'avec un solide de taille finie dans la direction  $z$  on peut obtenir grosso modo le même état de contrainte, et observer par photoélasticité dans le plan  $xy$  (figure 4.5b) les franges isochromatiques définies par l'équation vue en cours,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = n\sigma_0 \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \sigma_0 > 0.$$

Explicitez par un calcul en coordonnées cartésiennes la géométrie de ces franges, et concluez.

**7** Vérifiez enfin l'équation de l'équilibre local du solide. Concluez sur la pertinence de  $\bar{\bar{\sigma}}$ .



**Fig. 4.5** – Situation étudiée dans le problème 4.2 - partie I. **a** : En gris, le nouveau domaine « interne » isolé par coupe virtuelle considéré en question 3. **b** : Photographie expérimentale d'isochromatiques observées en *photoélasticité* dans le plan  $xy$ , dans cette situation, par Johnson (1985).

8 Explicitez les équations aux dérivées partielles qu'il faudrait résoudre pour calculer le champ de déplacement  $\bar{\mathbf{u}}$ , sans chercher à effectuer cette résolution. Vous garderez  $A$  comme paramètre de chargement, et ferez apparaître les coefficients élastiques  $E$  et  $\nu$  du solide. Ce système d'équations, considéré seul, a-t-il une solution unique ?

9 On admet que ce système portant sur  $u_r$  et  $u_\theta$ , une fois résolu, en faisant quelques hypothèses supplémentaires raisonnables, conduit à un champ de déplacement sur  $S_\ell$  (réexprimé en coordonnées cartésiennes)

$$u_x = -\frac{2}{\pi}(1-\nu^2)\frac{F'}{E}\ln\frac{|y|}{y_0}, \quad (4.79a)$$

$$u_y = +\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2}\frac{F'}{E} \text{ si } y < 0, \quad u_y = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{2}\frac{F'}{E} \text{ si } y > 0, \quad (4.79b)$$

avec  $y_0 > 0$  l'ordonnée d'un point de la surface libre qui resterait immobile.

Vérifiez l'homogénéité dimensionnelle de ces formules.

Représentez sur l'axe  $Oy$ , au voisinage de l'origine, les champs de vecteurs  $u_x\bar{\mathbf{e}}_x$  puis  $u_y\bar{\mathbf{e}}_y$  puis  $\bar{\mathbf{u}}$ . Vous réglerez  $y_0$ , ou, de manière équivalente, les bornes de variation de  $y$  de vos schémas, de sorte que  $u_x > 0$  sur tout le domaine représenté.

Commentez physiquement et concluez.

## II Contact sur une bande avec une force de compression répartie (figure 4.6)

Comme représenté sur la figure 4.6, des forces de pression d'intensité  $p$  sont appliquées sur une bande de contact définie par  $x = 0$ ,  $y \in [-a, a]$ . On admet que, en décomposant ce chargement en chargements élémentaires correspondant à des forces linéiques  $dF' = p dy$ , et en sommant les champs de déplacement obtenus, de la forme (4.79) en décalant l'origine des  $y$ , on obtient finalement sur la surface  $x = 0$  un champ de déplacement

$$u_x = -\frac{2}{\pi}(1-\nu^2)\frac{p}{E}\left((a+y)\ln\frac{|a+y|}{a} + (a-y)\ln\frac{|a-y|}{a}\right) + C, \quad (4.80a)$$

$$u_y = (1-2\nu)(1+\nu)\frac{pa}{E} \quad \text{si } y \leq -a, \quad (4.80b)$$

$$u_y = -(1-2\nu)(1+\nu)\frac{py}{E} \quad \text{si } -a \leq y \leq a, \quad (4.80c)$$

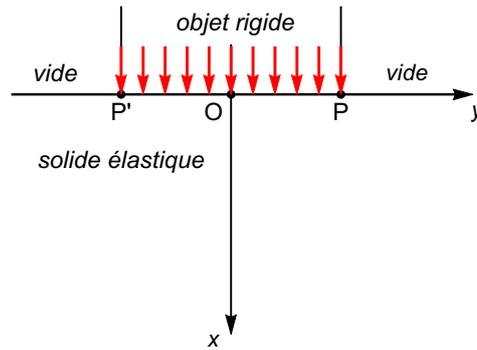
$$u_y = -(1-2\nu)(1+\nu)\frac{pa}{E} \quad \text{si } y \geq a, \quad (4.80d)$$

avec  $C$  une constante qui détermine la valeur absolue des ordonnées des points de la surface  $x = 0$  qui resteraient immobiles.

10 Vérifiez l'homogénéité dimensionnelle des formules (4.80).

Représentez sur l'axe  $Oy$ , sur un voisinage de l'origine contenant le segment  $y \in [-2a, 2a]$ , les champs de vecteurs  $u_x\bar{\mathbf{e}}_x$  puis  $u_y\bar{\mathbf{e}}_y$  puis  $\bar{\mathbf{u}}$ . Vous réglerez  $C$  de sorte que  $u_x > 0$  sur tout le domaine représenté.

Commentez physiquement et concluez.



**Fig. 4.6** – Situation étudiée dans le problème 4.2 - partie II : *forces de pression réparties* sur une bande de contact définie par  $x = 0, y \in [-a, a]$ ; son intersection avec le plan  $xOy$  est le segment compris entre les points  $P'$  et  $P$ .

### Problème 4.3 *Étude d'un système d'accouplement élastique*

Un *système d'accouplement élastique* permet la transmission de couple entre, par exemple, l'arbre de transmission et le volant d'un moteur, ce, avec une certaine flexibilité qui autorise en principe un léger désalignement des deux axes de rotation, ou encore une légère translation des deux systèmes (figure 4.7a). Dans le référentiel de travail, tournant avec la bague extérieure, on considère que l'on a une géométrie égale à celle de l'*expérience de Couette cylindrique* : le manchon élastique formant la liaison est situé entre un cylindre intérieur (l'arbre) rigide de rayon  $a$  et un cylindre extérieur (la bague) rigide de rayon intérieur  $b > a$ , comme représenté sur la figure 4.7b. Le manchon est solidaire des cylindres car collé à ceux-ci. La figure 4.7b montre aussi l'origine  $O$  du repère utilisé, qui est un point de l'axe de révolution  $Oz$  commun aux deux cylindres et au manchon. On utilise les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , le manchon étant toujours situé entre les plans  $z = 0$  et  $z = h$ . Les segments noirs sur la figure b représentent la rotation des cylindres sous l'effet des couples appliqués, par rapport à la configuration de référence sans couples (segment en trait pointillé). Les densités de forces surfaciques tangentielles appliqués au manchon au niveau de ses frontières intérieure ( $r = a$ ) et extérieure ( $r = b$ ) sont symbolisés par les flèches blanches intérieure et extérieure. Ces densités de forces surfaciques sont supposées à symétrie de révolution, i.e.  $\bar{\mathbf{T}} = d^2\bar{\mathbf{f}}/d^2S = \tau\bar{\mathbf{e}}_\theta$  sur la frontière intérieure,  $-\tau'\bar{\mathbf{e}}_\theta$  sur la frontière extérieure. L'angle de la rotation du cylindre intérieur par rapport au cylindre extérieur, dans la configuration actuelle d'équilibre sous l'effet des couples résultants de ces forces surfaciques, est  $\theta_0 > 0$ . Dans la configuration de référence le poids et l'action de l'air ambiant s'appliquent déjà au manchon, on pourra donc les oublier dans cette étude. On néglige les forces d'inertie, considérant que le référentiel lié au cylindre extérieur est galiléen. Enfin, on suppose que le manchon est élastique isotrope, travaillant en régime linéaire, petits déplacements et petite transformation.

#### I *Étude générale de la transmission de couples*

**I.1** Identifiez dans la loi d'évolution du moment cinétique (le « bilan de moment cinétique ») écrite globalement pour tout le manchon les couples vectoriels  $\bar{\mathbf{T}}$  appliqué par l'arbre (le cylindre intérieur) sur le manchon au niveau de leur interface, et  $\bar{\mathbf{T}}'$  appliqué par la bague (le cylindre extérieur) sur le manchon au niveau de leur interface. Donnez leurs expressions intégrales dépendant du vecteur position  $\overline{\mathbf{OM}}$  et des contraintes  $\bar{\mathbf{T}}$  exercées aux frontières du manchon. Montrez ensuite que ces deux couples ne sont pas indépendants, et donnez la relation entre  $\bar{\mathbf{T}}$  et  $\bar{\mathbf{T}}'$ .

**I.2** On suppose que l'arbre est soumis non seulement à l'action du manchon mais aussi à un couple extérieur  $\bar{\Gamma}_a$ . Montrez à partir de la loi d'évolution du moment cinétique écrite globalement pour l'arbre qu'il existe une relation entre  $\bar{\Gamma}$  et  $\bar{\Gamma}_a$ .

**I.3** On suppose que la bague est soumise non seulement à l'action du manchon mais aussi à un couple extérieur  $\bar{\Gamma}_b$ . Montrez à partir de la loi d'évolution du moment cinétique écrite globalement pour la bague qu'il existe une relation entre  $\bar{\Gamma}'$  et  $\bar{\Gamma}_b$ .

**I.4** Concluez.

## II Résolution du problème en petits déplacements et petite transformation

On se place dorénavant dans les hypothèses de petits déplacements et petite transformation entre la configuration de référence sans couple et la configuration actuelle.

**II.1** Expliquez très succinctement pourquoi on peut supposer que le champ de déplacement dans le manchon

$$\bar{\mathbf{u}} = u(r) \bar{\mathbf{e}}_\theta .$$

**II.2** Calculez le tenseur gradient du champ de déplacement. Vous en donnerez une expression intrinsèque.

**II.3** Que peut-on dire de la divergence de  $\bar{\mathbf{u}}$ ? Pourquoi cela? Donnez une conséquence mécanique importante de cette observation.

**II.4** À partir de l'équation de Navier, montrez que la fonction  $u(r)$  vérifie une équation différentielle que vous nommerez très précisément (nature, etc...).

**II.5** Résolvez cette équation en cherchant par exemple des solutions particulières de la forme  $r^\alpha$ . On vous demande de donner une solution ne dépendant plus que de  $\theta_0$  et d'autres paramètres géométriques, et on vous conseille pour cela d'explicitier les conditions limites en déplacement devant être vérifiées sur les frontières  $r = a$  et  $b$  du manchon.

**II.6** Simplifiez l'expression du gradient de déplacement compte tenu de la forme trouvée pour  $\bar{\mathbf{u}}$ , puis calculez le tenseur des déformations linéarisé. On vous demande des expressions intrinsèques.

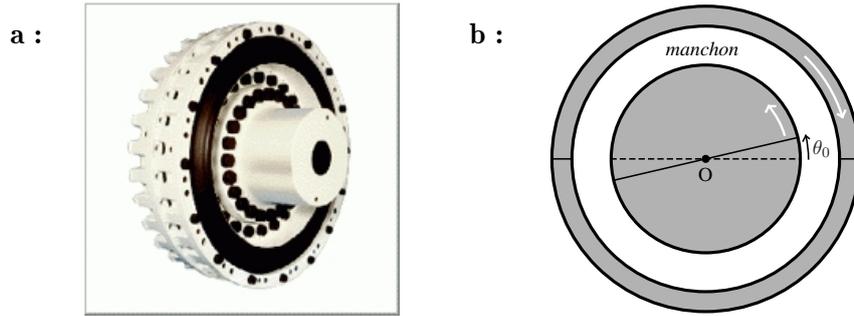
**II.7** Établissez l'expression intrinsèque du tenseur des contraintes de Cauchy dans le manchon.

**II.8** Calculez la contrainte tangentielle  $\tau$  exercée par l'arbre (le cylindre intérieur) sur le manchon au niveau de leur interface. Vérifiez que le signe de  $\tau$  est correct.

**II.9** Calculez le couple  $\bar{\Gamma} = \Gamma \bar{\mathbf{e}}_z$  appliqué par l'arbre (le cylindre intérieur) sur le manchon au niveau de leur interface. Montrez que  $\theta_0$  est proportionnel à  $\Gamma$  et vérifiez l'homogénéité du coefficient de proportionnalité correspondant. Cette relation de proportionnalité est-elle surprenante?

**II.10** Vérifiez par un calcul direct du couple  $\bar{\Gamma}'$  appliqué par la bague (le cylindre extérieur) sur le manchon au niveau de leur interface la relation entre  $\bar{\Gamma}$  et  $\bar{\Gamma}'$  établie en I.1. Commentez ce calcul.

**II.11** Dans le cas où un élastomère chargé en carbone, de module d'Young  $E = 1$  GPa, coefficient de Poisson  $\nu = 0,5$ , constitue le manchon, que vaut l'angle de rotation  $\theta_0$  lorsque le couple  $\Gamma = 1000$  N m, sachant que  $a = 2,5$  cm,  $b = 3$  cm,  $h = 1$  cm? Commentez le résultat obtenu, en revenant en particulier sur les hypothèses que l'on a utilisées pour l'obtenir.



**Fig. 4.7** – **a** : *Système d'accouplement élastique* RATO-DG de l'entreprise VULKAN. **b** : schéma de principe des mouvements qui ont lieu dans le référentiel de travail, sous l'effet des couples appliqués.

**II.12** Représentez le champ de déplacement  $\bar{\mathbf{u}}$  dans un cas similaire à celui de l'application numérique précédente. Commentez.

### III Étude de l'état de contrainte

**III.1** Calculez en tout point du manchon les valeurs propres  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  du tenseur des contraintes, ordonnées par valeurs décroissantes comme dans le cours. Donnez aussi les directions principales correspondantes.

**III.2** Tracez la représentation de Mohr de l'état de contraintes en un point quelconque du manchon.

**III.3** On s'intéresse aux contraintes tangentielles ou de cisaillement  $\tau(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}})$  au point  $\bar{\mathbf{x}}$  pour une direction de normale de surface  $\bar{\mathbf{n}}$ . Calculez

$$\tau_{\max} = \max_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}} \tau(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}),$$

en spécifiant dans quelle région du manchon le cisaillement est maximal.

**III.4** Pour un point  $\bar{\mathbf{x}}$  situé dans cette région, déduisez de la représentation de Mohr les directions de normale de surface  $\bar{\mathbf{n}}_{\pm}$  pour lesquelles le cisaillement est maximal.

**III.5** Calculez la valeur de  $\tau_{\max}$  pour les données de la question II.10. Commentez.

**Problème 4.4 Dimensionnement d'un tuyau contenant un fluide sous pression**

Un tuyau du circuit primaire d'une centrale nucléaire contient, lorsqu'il est en fonctionnement, de l'eau sous haute pression<sup>22</sup>. On veut étudier la réponse élastique linéaire de l'acier, considéré comme un matériau isotrope homogène, constituant ce tuyau, à ces hautes pressions. On travaille en différence entre la configuration de référence où le tuyau est plein d'air à pression atmosphérique et la configuration actuelle où le tuyau est plein d'eau sous haute pression. On considère l'air et l'eau comme des fluides parfaits. Le chargement en contraintes à prendre en compte au niveau de la surface extérieure du tuyau, qui reste toujours en contact avec l'air, peut être considéré comme nul. Par contre, au niveau de la surface intérieure du tuyau, le chargement en contraintes est défini par le vecteur contrainte

$$\bar{\mathbf{T}} = -\delta p \bar{\mathbf{n}}$$

où  $\delta p$  est la différence entre la pression de l'eau dans la configuration actuelle et celle de l'air atmosphérique,  $\bar{\mathbf{n}}$  est la normale unitaire sortant du domaine solide. On néglige tout effet de température et on travaille en petits déplacements et petite transformation. Le tuyau est cylindrique ; sa section est une couronne de rayons intérieur  $a$ , extérieur  $b$ . On utilise un repère cartésien  $Oxyz$  d'axe  $Oz$  de révolution du tuyau, et les coordonnées cylindriques associées  $(r, \theta, z)$ . On néglige tout effet de courbure ou de limite du tuyau dans la direction  $z$ , supposant qu'il est maintenu en position par des supports éloignés de la zone d'étude.

**I Étude élastostatique générale**

**1** Expliquez pourquoi on ne doit pas prendre en compte le poids dans l'équation de la quantité de mouvement qui exprime l'équilibre du tuyau. Donnez trois formes différentes de cette équation, l'une faisant intervenir le tenseur des contraintes, deux faisant intervenir le champ de déplacement, ainsi que les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  de l'acier.

**2** Explicitez les conditions limites en contrainte au niveau des surfaces intérieure et extérieure du tuyau, en terme du tenseur des contraintes, de  $\delta p$  et des vecteurs de la base locale cylindrique.

**3** On rappelle que l'on a établi dans le problème de calcul tensoriel 2.1, sur la base du principe de Curie, la forme

$$\bar{\mathbf{u}} = u(r) \bar{\mathbf{e}}_r$$

du champ de déplacement du tuyau, entre les configurations de référence et actuelle, puis celle de son gradient,

$$\overline{\nabla \mathbf{u}} = u' \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + (u/r) \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta ,$$

et enfin le fait que

$$\overline{\text{rot} \mathbf{u}} = \bar{\mathbf{0}} .$$

Déduisez de cela quelle est la forme de l'équation de l'équilibre écrite question 1 qui est la plus pratique à utiliser. Montrez à partir de cette équation le fait que la divergence du déplacement est constante. Vous noterez  $2A$  cette constante, puis montrerez que la fonction  $u(r)$  est d'une forme simple ne dépendant que de deux coefficients,  $A$  et une autre constante d'intégration  $B$ .

**4.1** Calculez le tenseur des contraintes ; vous en donnerez une expression intrinsèque.

<sup>22</sup>. Cette eau joue principalement le rôle d'un fluide caloporteur ; elle a aussi un rôle physique de ralentissement des neutrons dans le réacteur.

**4.2** À partir des conditions limites en contraintes établies question 2, montrez que les coefficients

$$A = F(a,b) \frac{\delta p}{\lambda + \mu}, \quad B = G(a,b) \frac{\delta p}{\mu},$$

et calculez-les complètement. Vous vérifierez l'homogénéité de ces formules.

## II Étude de dimensionnement

On dimensionne le tuyau en utilisant un critère de limite élastique. Le critère choisi est celui de Tresca (3.68). On suppose que l'acier utilisé a un module d'Young  $E = 210$  GPa, un coefficient de Poisson  $\nu = 0,28$  et une contrainte limite d'élasticité en traction  $\sigma_0 = 170$  MPa.

**5** Dans cette question préliminaire, on vous demande de rappeler la forme du tenseur des contraintes lors d'un essai de traction pure. Déduisez-en, dans le cas de l'acier considéré, la valeur de la contrainte tangentielle maximale à la limite d'élasticité, que vous noterez  $\tau_{\text{lim}}$ .

**6.1** Revenant au tuyau en surpression, étudiez les déformations propres. Montrez qu'on peut les ordonner avec une valeur propre centrale nulle,

$$\epsilon_1 > \epsilon_2 = 0 > \epsilon_3.$$

Interprétez physiquement le signe de chaque valeur, en lien avec la direction propre correspondante.

**6.2** À partir de la loi de Hooke, établissez la relation entre les déformations propres et les contraintes propres, ordonnées suivant

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Calculez les, ainsi que la valeur de la contrainte tangentielle maximale  $\tau_{\text{max}}$  quand on se place au rayon  $r$ .

**6.3** Dans quelle région du tuyau  $\tau_{\text{max}}$  est-elle la plus élevée ? Vous noterez  $\max \tau$  la valeur correspondante, et la calculerez. Vous vérifierez que  $\max \tau$  est toujours supérieure à la surpression  $\delta p$ , et proposerez une interprétation physique de la formule obtenue.

**7.1** Pour des questions de débit volumique, on choisit un rayon intérieur  $a = 35$  cm. On s'intéresse d'autre part à une centrale pour laquelle la pression de l'eau est de 155 bars soit 15,5 MPa. En considérant que la pression atmosphérique est de 1 bar, que vaut la surpression  $\delta p$  ?

**7.2** Représentez la courbe  $\max \tau(b)$  et déduisez du critère de Tresca, appliqué avec une marge de sécurité de 25%,

$$\max \tau(b) \leq \tau_0 = 0,75 \tau_{\text{lim}},$$

la valeur du rayon extérieur  $b$  qu'il faut utiliser pour rester dans cette limite. Vous donnerez une formule littérale pour  $b$  fonction de  $\delta p$ ,  $\tau_0$  et  $a$ , que vous commenterez. Vous donnerez aussi sa valeur numérique, ainsi que celle de l'épaisseur du tuyau,  $e = b - a$ .

### III Analyse physique fine et validation

8 Dans le cas étudié en deuxième partie, calculez les constantes  $A$  et  $B$  qui déterminent le champ de déplacement. Représentez l'allure de ce champ sur un secteur angulaire du tuyau. Quel est le déplacement maximal ? L'hypothèse des petits déplacements est-elle justifiée ?

9 Étudiez la validité de l'hypothèse de petite transformation.

---

#### Problème 4.5 *Étude et dimensionnement de coques sous pression pour un sous-marin*

Le sous-marin *Deepsea Challenger* a été construit pour établir un record de plongée en solitaire. Le fond de la fosse des Mariannes, situé à une distance verticale  $H = 10,9$  km de la surface de la mer, a été atteint en mars 2012. Conçu léger et de petite taille, ce sous-marin est pour une large part constitué d'une mousse composite résistante non pressurisée, le pilote étant, lui, enfermé dans une coque sphérique en acier de rayon intérieur  $a = 55$  cm. On suppose que cet acier travaille en petits déplacements, petite transformation, suivant un comportement élastique linéaire isotrope.



© Thiessen National Geographic

#### I Étude et dimensionnement de la coque sphérique

Dans une première partie, on étudie la résistance à la pression de cette coque sphérique et son dimensionnement, i.e., le choix de son épaisseur  $e$ . Pour simplifier, on considère que la coque est homogène à symétrie de révolution, i.e., on « oublie » le couvercle qui permet au pilote d'y entrer ou d'en sortir (cf. la photo ci-dessus, juste après l'exploit). On utilise les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  d'un repère  $Oxyz$  dont l'origine se trouve au centre de la coque. La configuration de référence de l'étude est celle où la coque est à la surface de l'eau, à pressions intérieure et extérieure atmosphériques, la configuration actuelle est celle où, en plongée à la profondeur  $H$ , elle est soumise à une surpression extérieure  $\delta p$  due à l'eau. Par symétrie sphérique, on suppose qu'entre ces configurations le champ de déplacement

$$\bar{\mathbf{u}} = u(r) \bar{\mathbf{e}}_r \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{e}}_r \text{ le premier vecteur de la base locale des coordonnées sphériques.}$$

1 En faisant l'hypothèse que la pression intérieure est régulée de façon à assurer une situation confortable pour le pilote, et en utilisant par ailleurs une loi de mécanique des fluides pour évaluer la pression extérieure, estimez la surpression  $\delta p$ . Vous donnerez une formule analytique puis une valeur numérique de  $\delta p$  avec deux chiffres significatifs, qui sera toujours utilisée par la suite. Commentez physiquement.

**NB :** cette approximation revenant à surestimer  $\delta p$  est justifiée pour le dimensionnement.

2.a Donnez l'expression matricielle puis l'expression intrinsèque du tenseur gradient de déplacement.

2.b Au vu de cette expression, que peut-on dire a priori de la décomposition de ce tenseur en parties symétrique et antisymétrique, ainsi que du rotationnel du champ de déplacement ?

3.a Explicitez l'équation de l'équilibre de la coque, dans sa configuration actuelle, sous forme locale. Vous montrerez que la divergence du champ de déplacement est uniforme, et noterez  $3A$  sa valeur.

**3.b** Par intégration, établissez que  $u(r)$  est de la forme  $Ar^\alpha + Br^\beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des exposants entiers,  $B$  est une deuxième constante d'intégration.

**4** Calculez le tenseur des déformations linéarisé. Vous en donnerez une expression intrinsèque.

**5** Calculez le tenseur des contraintes, de façon intrinsèque.

**6.a** Puisque l'on travaille en différence entre la configuration de référence et la configuration actuelle, exprimez que la surface intérieure de la coque est libre, tandis que la surface extérieure est soumise à la surpression  $\delta p$ , de façon intrinsèque i.e. faisant intervenir le tenseur des contraintes. Vous noterez pour l'instant  $b = a + e$  le rayon extérieur de la coque.

**6.b** En explicitant ces conditions, calculez  $A$  et  $B$  en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $\delta p$  et des coefficients élastiques de l'acier. Vous vérifierez l'homogénéité dimensionnelle des formules obtenues, et interprétez physiquement le signe de  $A$  et  $B$ .

**7.a** Pour dimensionner la coque, on admet la validité d'un critère de Tresca. Ordonnez les valeurs propres du tenseur des contraintes et calculez la contrainte tangentielle maximale en tout point de la coque. Précisez en quel(s) point(s) de la coque cette contrainte tangentielle maximale atteint sa valeur maximale, que vous noterez  $\max \tau$  et calculerez.

**7.b** On suppose que  $e \ll a$  ou encore que  $\varepsilon = e/a \ll 1$ . Calculez  $\max \tau$  à l'ordre le plus bas en  $\varepsilon$ , puis remplacez dans la formule asymptotique ainsi obtenue  $\varepsilon$  par  $e/a$ . Commentez physiquement cette formule.

**7.c** On admet disposer d'un acier pour lequel la valeur limite de  $\max \tau$ , permettant de rester de façon sûre dans le domaine élastique, est  $\tau_{\text{lim}} = 240$  MPa. Calculez analytiquement puis numériquement l'épaisseur  $e$  de la coque avec ce critère.

**8** Énoncez précisément trois vérifications qu'il faudrait faire pour valider ces calculs.

## II Étude et dimensionnement d'une coque cylindrique

On se pose maintenant la question du choix de la forme de la coque abritant le pilote. Pour cela, on étudie le cas d'une coque cylindrique de rayon intérieur  $a$  identique, et d'épaisseur que l'on note aussi  $e$ , bien qu'elle soit, a priori, différente de l'épaisseur que l'on vient de calculer. On donne la forme générale du tenseur des contraintes dans une coque cylindrique à l'équilibre sans forces de volume<sup>23</sup> : en utilisant des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe  $Oz$  l'axe de révolution de la coque,

$$\bar{\sigma} = (\sigma - \sigma'/r^2) \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + (\sigma + \sigma'/r^2) \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \sigma_{zz} \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z,$$

avec  $\sigma$ ,  $\sigma'$ ,  $\sigma_{zz}$  des constantes à déterminer,  $\bar{\mathbf{e}}_r$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_\theta$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_z$  les vecteurs de la base locale.

**9** Reprenant dans ce nouveau cadre les calculs de la question 6, déterminez  $\sigma$  et  $\sigma'$  en fonction de  $a$ ,  $b = a + e$  et  $\delta p$ . Vous vérifierez l'homogénéité dimensionnelle des formules obtenues.

**10** Afin de protéger le pilote, la coque cylindrique est fermée par des couvercles de forme circulaire, de rayon maximal  $b$ , fixés en  $z = \pm a$ . On admet que ces couvercles transmettent intégralement

<sup>23</sup>. Cette forme se déduit d'une étude du champ de déplacement, similaire à celle que l'on vient d'effectuer dans le cas sphérique.

les forces de surpression qu'ils subissent,  $F = \pi b^2 \delta p$  en norme, au niveau de leur fixation sur la coque, i.e., sur les couronnes définies par  $r \in [a, b]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z = \pm a$ . On suppose que les contraintes exercées par les couvercles sur la coque se répartissent uniformément sur chaque couronne. Représentez schématiquement cette situation, en dessinant la géométrie du système, les forces globales  $\bar{\mathbf{F}}$  et  $-\bar{\mathbf{F}}$  subies par les couvercles de la part de l'eau extérieure, et l'allure du champ de vecteur contrainte sur les deux couronnes. Déduisez-en les conditions limites à imposer sur ces couronnes, puis la valeur de  $\sigma_{zz}$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\delta p$ .

**11** Reprenez les calculs de la question 7 pour cette coque cylindrique. Vous noterez au final  $e_c$  son épaisseur, calculée à la fois analytiquement et numériquement. En comparant au cas de la coque sphérique, concluez physiquement. On attend un argumentaire précis et semi-quantitatif.

### III Comparaison analytique des deux géométries dans la limite de coques très minces

Pour analyser la différence de comportement observée entre les coques sphérique et cylindrique, on considère deux telles coques de même épaisseur  $e$  très petite. On note toujours  $\varepsilon = e/a$  avec  $a$  le rayon intérieur. On pose de plus  $r = a + \varepsilon r^* = a + \varepsilon a r^*$  avec  $r^* \in [0, 1]$  un rayon, sphérique ou cylindrique, adimensionné.

**12.a** En supposant que  $r^*$  est d'ordre 1,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , donnez un équivalent asymptotique de toutes les composantes non nulles du tenseur des contraintes dans la coque sphérique, à l'ordre dominant en puissance de  $\varepsilon$ .

Donnez alors le tenseur des contraintes à l'ordre dominant, et sa représentation de Mohr.

**12.b** Même question, mais dans le cas de la coque cylindrique.

**13.a** Dans le cas de la coque cylindrique, représentez et étudiez l'équilibre dans le plan  $xOy$ , à l'ordre dominant en  $\varepsilon$ , d'un petit élément de coque d'extension angulaire  $2\theta$ , axiale  $z$ , infinitésimales. Mettez en évidence un « *effet d'arche* ».

**13.b** Expliquez comment cet effet d'arche est modifié dans la coque sphérique, et concluez.

### Problème 4.6 Équilibre d'un disque en rotation rapide

De nombreux systèmes mécaniques contiennent des machines tournantes, qui elles mêmes comportent des pièces dont la forme est approximativement celle d'un disque : arbres de moteur ou de turbines, aubes de turbines, volants d'inertie, etc... On s'intéresse à l'influence des forces d'inertie sur l'équilibre d'un disque en rotation rapide. Pour simplifier on fait abstraction de la façon dont le disque est fixé et mis en rotation, et on ne considère pas l'influence de son poids ni celle de l'atmosphère. On travaille dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié à la machine tournante, dans lequel on utilise un repère  $Oxyz$  avec  $Oz$  l'axe de rotation de la machine, axe de révolution du disque. Les faces « inférieure » et « supérieure » du disque, situées en  $z = \pm h$ , sont libres. Le rayon extérieur du disque est  $a$ . La surface latérale définie en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  par  $r = a$  est aussi une frontière libre. Cette situation est schématisée sur la figure 4.8.

Dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  galiléen du laboratoire, le référentiel  $\mathcal{R}$  a un mouvement de rotation caractérisé par le vecteur vitesse de rotation instantanée

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \bar{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} = \omega \bar{\mathbf{e}}_z \quad \text{avec} \quad \omega \text{ la fréquence angulaire de rotation, non nulle, constante.}$$

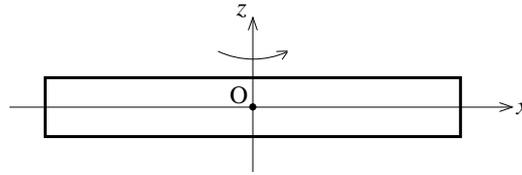


Fig. 4.8 – Coupe d'un *disque en rotation rapide*.

La configuration de référence, imaginaire, est celle où le disque tourne, mais où les forces d'inertie sont supposées nulles, ce qui reviendrait en fait à un disque non tournant. La configuration actuelle est celle où ces forces d'inertie sont prises en compte. À l'équilibre dans  $\mathcal{R}$ , seul agit le champ de force volumique d'inertie d'entraînement  $\bar{\mathbf{f}}_e(\bar{\mathbf{X}}) = -\rho \bar{\gamma}_e(\bar{\mathbf{X}})$  avec  $\rho$  la masse volumique du disque,  $\bar{\gamma}_e$  l'accélération d'entraînement, cf. l'exercice A.1. Le matériau du disque est élastique isotrope linéaire, et on fait l'hypothèse de petits déplacements,  $\bar{\mathbf{x}} \simeq \bar{\mathbf{X}} = r\bar{\mathbf{e}}_r + z\bar{\mathbf{e}}_z$ , et petite transformation. On travaille bien sûr en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

### Première partie : généralités et forme des champs

**1** Simplifiez l'expression de  $\bar{\mathbf{f}}_e$ . Montrez que  $\|\bar{\mathbf{f}}_e\| = \alpha r$  avec  $\alpha$  un coefficient que vous calculerez et que l'on utilisera par la suite sans l'expliciter (sauf dans la dernière question 19). Donnez le nom et l'interprétation physiques de cette force volumique.

**2.1** Justifiez succinctement qu'il est raisonnable de considérer que les champs de tenseur des contraintes  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  et de déplacement  $\bar{\mathbf{u}}$  ne dépendent que de  $r$  et  $z$ .

**2.2** Justifiez succinctement qu'il est raisonnable de considérer que la composante azimutale du déplacement  $u_\theta = 0$ .

**3** On suppose que toutes les composantes de la matrice  $[\sigma]$  représentant le tenseur des contraintes sur la base locale  $\{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\}$  qui s'annulent sur les faces libres  $z = \pm h$  s'annulent partout. En explicitant ces conditions de frontières libres, montrez la nullité d'une composante diagonale et quatre composantes non diagonales de  $[\sigma]$ .

**4.1** En partant de la forme générale du champ de déplacement

$$\bar{\mathbf{u}} = u_r(r, z) \bar{\mathbf{e}}_r + u_z(r, z) \bar{\mathbf{e}}_z ,$$

et en utilisant une formule du cours de calcul tensoriel, calculez la matrice  $[G]$  représentant le gradient du champ de déplacement sur la base locale  $\{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\}$ .

**4.2** Calculez la matrice  $[\epsilon]$  représentant le tenseur des déformations linéarisé sur cette même base.

**4.3** Grâce à la loi de comportement du matériau, complétez le résultat de la question 3 pour montrer que toutes les composantes non diagonales de  $[\sigma]$  sont nulles. Déduisez-en la forme intrinsèque générale de  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ , sans plus faire référence aux déplacements.

### Deuxième partie : réduction de la forme des contraintes

**5** Écrivez l'équation d'équilibre local du disque dans  $\mathcal{R}$ , de façon intrinsèque puis en composantes. Montrez qu'une seule composante de cette équation est non triviale, et prend la forme d'une équation faisant intervenir les deux composantes non nulles de  $[\sigma]$ .

Quelle est la nature mathématique précise de cette équation ?

**6** On admet que les équations de compatibilité géométrique des déformations ainsi que la loi de comportement du matériau conduisent, compte tenu aussi de la forme des champs étudiée ici, à l'équation

$$r \left( \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial r} - \nu \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \right) = (1 + \nu)(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \quad (4.81)$$

avec  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau. À l'aide de cette équation et de celle établie en question 5, montrez que  $\sigma_{rr}$  satisfait une équation de la forme

$$r \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + n \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \beta r = 0, \quad (4.82)$$

avec  $n > 0$  un entier,  $\beta > 0$  un réel, que vous calculerez.

**7** À  $z$  fixé, on considère la fonction  $f(r) = \sigma_{rr}(r, z)$ . Résolvez l'équation différentielle ordinaire vérifiée par  $f(r)$ . Déduisez-en que  $\sigma_{rr}$  est de la forme

$$\sigma_{rr} = \gamma r^2 + A(z) r^{-m} + B(z),$$

avec  $\gamma < 0$  un réel,  $m > 0$  un entier, que vous calculerez.

**8** Grâce à un argument très simple, montrez que  $A(z) = 0$ .

**9** Montrez que  $\sigma_{\theta\theta}$  est de la forme

$$\sigma_{\theta\theta} = \delta r^2 + B(z),$$

avec  $\delta < 0$  un réel que vous calculerez.

### Troisième partie : réduction de la forme des déplacements

**10** Déduisez de ce qui précède l'expression du tenseur des déformations linéarisé. Montrez que seules les composantes diagonales de sa matrice représentative  $[\epsilon]$  sont non nulles, et exprimez les en fonction de  $\alpha$ ,  $r$ ,  $B(z)$ ,  $\nu$  et  $E$  le module d'Young du matériau.

**11** En reconsidérant l'expression des composantes diagonales de  $[\epsilon]$  en fonction du déplacement établies question 4.2, montrez que l'on a accès à  $u_r$  sans plus de calcul.

**12** En intégrant une autre composante diagonale de  $[\epsilon]$ , établissez l'expression de  $u_z$  en fonction de  $\alpha$ ,  $r$ ,  $\nu$ ,  $E$ ,  $B_1(z)$  une primitive de  $B(z)$ , et d'une nouvelle fonction  $C(r)$ .

**13.1** Montrez que la condition  $\epsilon_{rz} = 0$  est une relation ( $\dagger$ ) entre  $\alpha$ ,  $r$ ,  $\nu$ ,  $E$ ,  $B'(z)$  et  $C'(r)$ . En dérivant cette équation par rapport à  $z$ , montrez que  $B(z)$  est un polynôme de degré 2 dont le coefficient de degré 2 est connu, les coefficients  $b_1$  de degré 1 et  $b_0$  de degré 0 restent à déterminer. Calculez alors  $B_1(z)$ , en introduisant une constante d'intégration  $b_{-1}$ .

**13.2** En revenant à la relation ( $\dagger$ ), calculez  $C(r)$  à une constante  $c_0$  près.

**14** Établissez en conséquence l'expression générale de  $u_z$ . Avec, de plus, l'hypothèse de symétrie dans le plan médian « horizontal »

$$\forall r \in [0, a], \quad u_z(r, z = 0) = 0,$$

montrez que  $b_1 = 0$ ,  $B(z)$  ne dépend plus que d'un seul paramètre inconnu, à savoir  $b_0$ .

**Quatrième partie : détermination complète des contraintes**

**15** Montrez que  $\sigma_{rr}$  aussi est connue au coefficient  $b_0$  près,

$$\sigma_{rr} = -\frac{3+\nu}{8}\alpha r^2 + \frac{\nu(1+\nu)}{2(\nu-1)}\alpha z^2 + b_0.$$

**16** Au vu de cette équation, il est clair que l'on ne pourra satisfaire la condition de frontière latérale libre en  $r = a$  quelque soit  $z$ . Supposant  $h \ll a$ , on va satisfaire cette condition en moyenne par rapport à  $z$  seulement.

**16.1** Comment pourrait-on justifier cette approche ?

**16.2** En écrivant qu'en moyenne par rapport à  $z$ , la frontière  $r = a$  est libre, calculez  $b_0$ , et déterminez complètement  $\sigma_{rr}$ .

**17** Déterminez enfin complètement  $\sigma_{\theta\theta}$ .

**Dernière partie : analyse du cas d'un disque plat**

**18** Montrez que dans le cas d'un disque plat  $h \ll a$ , on a en bonne approximation à l'« intérieur » du disque, i.e. ni trop près de l'axe ni trop près du bord latéral,

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{3+\nu}{8}\alpha (a^2 - r^2) \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + \frac{\alpha}{8}[(3+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2] \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta. \quad (4.83)$$

**19** On propose pour terminer une étude de limite élastique, supposant pour simplifier que l'on peut considérer l'équation précédente valable dans tout le disque, et un matériau de coefficient de Poisson  $\nu = 1/4$ .

**19.1** Simplifiez en conséquence l'expression de  $\bar{\bar{\sigma}}/\alpha$ , et étudiez les fonctions  $\sigma_{rr}/\alpha$  et  $\sigma_{\theta\theta}/\alpha$  dans le domaine solide. Représentez l'allure des graphes de ces fonctions.

**19.2** On utilise le critère de Tresca pour modéliser la limite d'élasticité du matériau. Calculez la contrainte tangentielle maximale  $\tau_{\max}$  en fonction de  $r$  et déterminez le lieu des points, dans ce modèle, où elle est maximale. Notant  $\tau_{\lim}$  la limite d'élasticité, montrez que ce critère conduit à limiter la fréquence de rotation du disque  $\omega$ , et calculez la valeur  $\omega_{\lim}$  correspondante. Commentez physiquement la dépendance de  $\omega_{\lim}$  par rapport à tous les paramètres.

**19.3** Calculez  $\omega_{\lim}$  pour un disque de diamètre 40 cm d'un superalliage de masse volumique  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$  et de limite élastique  $\tau_{\lim} = 400 \text{ MPa}$ . Vous calculerez  $\omega_{\lim}$  en radians par seconde puis en tours par minute.

**Problème 4.7 Poutres cylindriques fragiles sollicitées en traction-torsion**

On considère des poutres cylindriques à section circulaire de rayon  $a$ , soumises à des sollicitations de traction-torsion. La modélisation sera faite en élasticité linéaire isotrope, en petits déplacements et petite transformation. On utilise un repère  $Oxyz$  avec  $Oz$  l'axe de révolution de la poutre. On note indifféremment  $(r, \theta, z)$  et  $(R, \Theta, Z)$  les coordonnées cylindriques d'un point matériel  $\bar{\mathbf{x}} \simeq \bar{\mathbf{X}}$ . La base locale des coordonnées cylindriques est notée  $\{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\}$ .

**I Modèle élastique général d'une poutre cylindrique en torsion**

La poutre est solidaire d'un matériau très rigide à l'une de ses extrémités. On considère qu'elle est encastree dans ce matériau, et on travaille dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié à ce matériau. Dans ce référentiel galiléen,  $Oxy$  est le « plan d'encastrement » dans lequel on peut considérer que les particules matérielles de la poutre sont fixes. Dans l'intervalle  $z \in [0, L_1]$ , avec  $L_1 \geq 5a$ , la poutre est à l'air libre, et au niveau de l'extrémité  $z = L_2$ , avec  $L_2$  de l'ordre de  $L_1 + 2a$ , un **couple de torsion**  $\bar{\mathbf{\Gamma}} = \Gamma \bar{\mathbf{e}}_z$  peut être appliqué à la poutre. Cette situation est schématisée sur la figure 4.9. La configuration de référence est celle où  $\Gamma = 0$ , le poids et l'air ambiant agissant déjà sur la poutre. Dans la configuration actuelle,  $\Gamma > 0$ .

**I.1** On propose de rechercher une solution avec, dans le domaine  $z \in [0, L_1]$ , un champ de déplacement de la forme

$$\bar{\mathbf{u}} = \alpha z \bar{\mathbf{e}}_z \wedge \bar{\mathbf{X}} = \alpha r z \bar{\mathbf{e}}_\theta .$$

Représentez ce champ de déplacement dans les sections  $z = L_1/2$  et  $z = L_1$  de la poutre. Quel mouvement décrit-il ? Quel est a priori le signe de  $\alpha$  ? Quelle est sa dimension ? Justifiez que cette forme de champ de déplacement est pertinente.

Dans ce qui suit, jusqu'à la question I.8 comprise, on travaille dans le domaine  $z \in [0, L_1]$ .

**I.2** Traduisez l'hypothèse de petits déplacements par une relation du type  $A \ll B$ , qu'il conviendra de vérifier a posteriori.

**I.3** Calculez le gradient de déplacement, et donnez-en une expression intrinsèque.

**I.4** Traduisez l'hypothèse de petite transformation par des relations du type  $A' \ll B'$ , et comparez la à l'hypothèse de petits déplacements.

**I.5** Écrivez l'équation d'évolution de la quantité de mouvement, sous forme locale, exprimée en terme de déplacements. Rappeler le nom de cette équation, sa forme utile dans le cas présent, et montrez que cette équation est vérifiée.

**I.6** Calculez le tenseur des déformations linéarisé ; on demande son expression intrinsèque.

**I.7** En faisant l'hypothèse que la poutre est constituée d'un matériau isotrope élastique travaillant en régime linéaire, calculez l'expression intrinsèque du tenseur des contraintes de Cauchy.

**I.8** Expliquez pourquoi, sur la périphérie de la poutre, en  $r = a$ , on doit écrire une condition de frontière libre sur le vecteur contrainte. Explicitez cette condition et montrez qu'elle est vérifiée.

**I.9** Quel est le principe qui permet de ne pas se préoccuper de la façon exacte avec laquelle le couple de torsion  $\bar{\mathbf{\Gamma}}$  est appliqué au niveau  $z \simeq L_2$ , mais d'écrire seulement des conditions limites

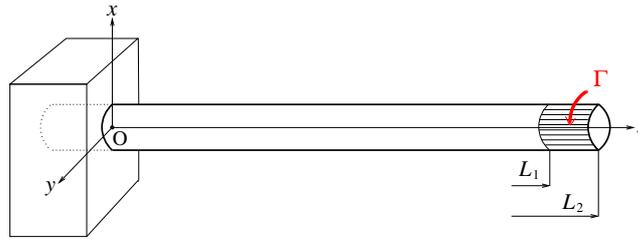


Fig. 4.9 – Poutre sollicitée en torsion.

globales en  $z = L_1$ , exprimant que le reste de la poutre, pour  $z \in [L_1, L_2]$ , transmet une force nulle et le couple  $\bar{\Gamma}$  ?

**I.10** Explicitez ces deux conditions sous une forme intégrale générale faisant intervenir le tenseur des contraintes, les intégrales étant effectuées sur une « coupe virtuelle » de la poutre définie par

$$r \in [0, a], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z = L_1.$$

**I.11** Montrez que ces conditions sont satisfaites par le tenseur des contraintes calculé en I.7, à condition que  $\alpha$  soit proportionnel à  $\Gamma$ , suivant une relation que vous établirez et commenterez. Bien entendu vous validerez cette relation par analyse dimensionnelle.

**I.12** On considère l'arbre d'entrée de la boîte de vitesse d'un moteur, qui travaille essentiellement en torsion. Son rayon  $a = 8$  mm, sa longueur libre  $L_1 = 200$  mm. Son matériau est un acier de module d'Young 210 GPa et de coefficient de Poisson 0,28. Calculez le paramètre  $\alpha$  correspondant à un couple  $\Gamma = 120$  N m. Commentez. Vérifiez les hypothèses de petits déplacements et petite transformation.

**I.13** Calculez les valeurs et vecteurs propres du tenseur des déformations linéarisé. Faites une analyse fine de la décomposition en déformation et rotation infinitésimales des variations de déplacements projetées dans le plan  $\theta z$  : notant  $\bar{\bar{\mathbf{P}}} = \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z$  le projecteur dans le plan  $\theta z$ ,

$$d\bar{\mathbf{x}}_{2D} = \bar{\bar{\mathbf{P}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} = r \bar{\mathbf{e}}_\theta d\theta + \bar{\mathbf{e}}_z dz,$$

vous plaçant autour d'un point  $\bar{\mathbf{x}}$  de coordonnées cylindriques  $(a, 0, L_0)$ , avec  $L_0 \simeq L_1/2$ , calculez et représentez au voisinage de  $\bar{\mathbf{x}}$  les champs

$$\bar{\mathbf{u}}_{2D} = \bar{\bar{\mathbf{P}}} \cdot \bar{\mathbf{u}}, \quad d\bar{\mathbf{u}}_{2D} = \bar{\bar{\mathbf{P}}} \cdot \bar{\bar{\nabla}} \bar{\mathbf{u}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}_{2D}, \quad d\bar{\mathbf{u}}_{2D\text{déf}} = \bar{\bar{\mathbf{P}}} \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}_{2D}, \quad d\bar{\mathbf{u}}_{2D\text{rot}} = \bar{\bar{\mathbf{P}}} \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\Omega}}} \wedge d\bar{\mathbf{x}}_{2D}$$

avec les notations de la section 2.1.9. Commentez la structure et les liens entre ces champs. Mettez aussi en évidence des directions d'étirement et de contraction.

Dorénavant les poutres que l'on considère sont constituées d'un matériau « *fragile* » (fonte, métal froid, craie, béton...) au sens où le régime élastique linéaire est suivi quasi-immédiatement, à « contraintes plus élevées », d'une rupture. Dans les essais de traction-torsion considérés, cette rupture se fait lorsque la *contrainte normale positive maximale* dépasse une valeur limite, i.e., ces matériaux sont surtout sensibles à la traction.

## II Modèle de la rupture en torsion d'une poutre fragile

**II.1** Montrez que le tenseur des contraintes calculé en I.10 admet des valeurs propres 0 et  $\pm\tau_0$ , en calculant  $\tau_0$ , qui est une quantité positive. Calculez aussi les directions propres correspondantes.

**II.2** Tracez la représentation de Mohr de cet état de contrainte. Quelle est la valeur maximale  $\sigma_t$  de la contrainte normale positive ? Pour quelle valeur de la normale  $\bar{\mathbf{n}}$  d'une coupe virtuelle, soit  $\bar{\mathbf{n}}_t$ , est-elle atteinte ? Faites le lien avec l'étude de la question I.16.

**II.3** Montrez que la région où les contraintes  $\sigma_t$  sont maximales est la périphérie de la poutre, définie par  $r = a$ .

**II.4** On admet que la rupture s'initie sur une courbe inscrite sur la périphérie de la poutre, partout tangente aux coupes virtuelles subissant la traction maximale. En conséquence, un vecteur petit déplacement sur cette courbe

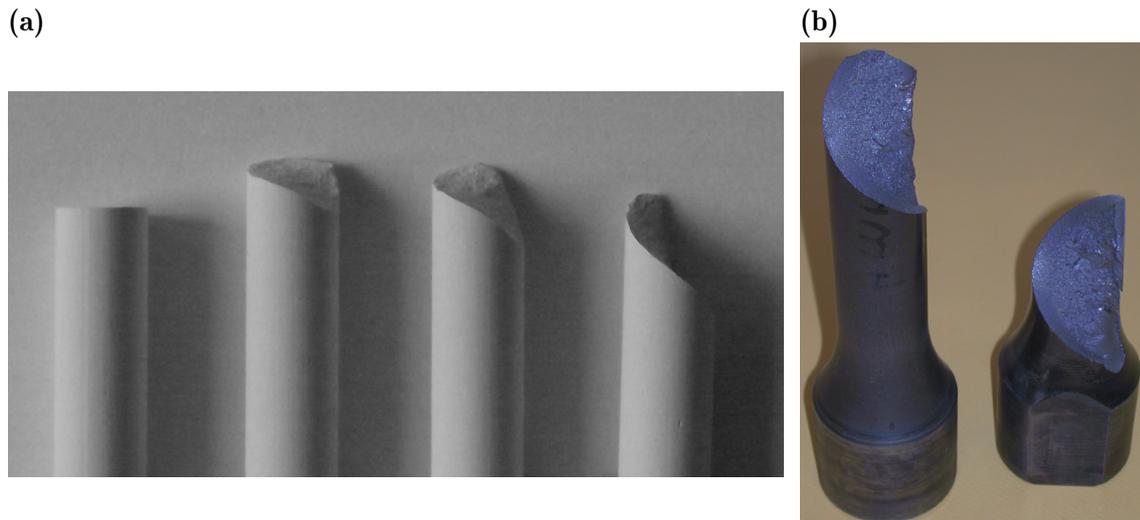
$$d\bar{\mathbf{x}} = a \bar{\mathbf{e}}_\theta d\theta + \bar{\mathbf{e}}_z dz$$

doit être orthogonal à  $\bar{\mathbf{n}}_t$ . En explicitant cette condition, et en l'intégrant, établissez l'équation de la courbe de rupture. Quelle est sa géométrie ? Vous comparerez le résultat de ce modèle aux expériences de la figure 4.10.

### III Modèle de la rupture en traction-torsion d'une poutre fragile

**III.1** On considère un essai de traction pure dans la direction  $z$  d'une poutre fragile. Rappelez quel est le tenseur des contraintes associé, dans la zone centrale. Montrez que ses valeurs propres sont 0 comptée deux fois et  $\sigma_0$  dont vous donnerez l'expression en fonction de la force de traction  $F$  et de l'aire  $A$  d'une section droite. Tracez la représentation de Mohr correspondante. En utilisant le même modèle de rupture fragile qu'en II, prédisez la forme de la courbe de rupture. Commentez.

**III.2** On considère enfin un essai de traction-torsion, dans lequel la poutre est soumise, près de son extrémité, à une force  $\bar{\mathbf{F}} = F\bar{\mathbf{e}}_z$  et un couple  $\bar{\mathbf{\Gamma}} = \Gamma\bar{\mathbf{e}}_z$ . Expliquez pourquoi le tenseur des contraintes de cet essai peut s'écrire comme la somme de celui calculé en I et celui rappelé en III.1. Calculez les valeurs propres de ce tenseur somme, et, en utilisant le même modèle de rupture fragile qu'en II, prédisez la forme de la courbe de rupture. Discutez de son évolution lorsque les efforts de torsion augmentent par rapport aux efforts de traction. Vous aurez intérêt à introduire un pas (ou demi-pas) caractéristique de la courbe. Commentez, en faisant le lien avec la figure 4.10.



**Fig. 4.10** – **a** : Craies soumises jusqu'à la rupture à des essais de *traction pure* (à gauche), *traction - torsion* en augmentant la torsion (en allant vers la droite), *torsion pure* (à droite). **b** : Éprouvette en fonte soumise jusqu'à la rupture à un essai de *torsion pure* (Centre des Matériaux de Mines ParisTech, source [Forest & Amestoy 2020](#)).

#### Problème 4.8 Ondes propagatives dans un solide élastique

**1** On considère un milieu continu solide isotrope occupant un domaine volumique  $D$  réputé « infini ». On étudie la propagation d'*ondes de déplacements de petite amplitude* dans ce milieu. Quelle(s) hypothèse(s) raisonnable(s) peut-on faire concernant l'étude de ce problème, et la loi de comportement du matériau solide isotrope ? Comment peut-on alors qualifier ce problème ?

**2** On s'intéresse à une *onde plane* se propageant dans la direction  $x$  avec un *nombre d'onde*  $k$  (réel strictement positif) et une *fréquence angulaire*  $\omega$  (réelle). Son champ de déplacement est supposé de la forme

$$\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = (u\bar{\mathbf{e}}_x + v\bar{\mathbf{e}}_y + w\bar{\mathbf{e}}_z) \cos(kx - \omega t), \quad (4.84)$$

avec  $u$ ,  $v$  et  $w$  des constantes réelles. Quels sont les plans de phase de l'onde étudiée ? Redémontrez la formule générale donnant la vitesse de phase ou *célérité*  $c$  d'une onde, c'est-à-dire la vitesse de propagation de ses plans de phase, en fonction de  $k$  et  $\omega$ .

**3.1** Dans une première approche, on utilise l'*analyse dimensionnelle* (cf. le chapitre 5) pour étudier ce problème. Montrez que l'on peut considérer que ce problème est à trois grandeurs fondamentales et paramètres de contrôle dimensionnels, dont  $\omega$  ou (au choix)  $k$  et deux paramètres « matériau », plus un paramètre de contrôle « matériau » adimensionnel, la grandeur dépendante étant d'autre part la célérité  $c$ . À l'aide de la méthodologie de Vaschy et Buckingham, réduisez la forme analytique de la célérité  $c$  en fonction des paramètres de contrôle.

**3.2** À l'aide d'une hypothèse simple, estimez numériquement  $c$  dans le cas d'un acier.

**4** Écrivez l'équation qui régit l'évolution spatio-temporelle du champ (4.84). Vous expliquerez comment on peut se ramener à une équation qui ne contient que des termes dépendant linéairement du champ de déplacement.

5 Explicitez les trois composantes de cette équation aux dérivées partielles, et déduisez-en un système algébrique de la forme

$$\rho\omega^2[U] = [L] \cdot [U] \quad (4.85)$$

avec  $\rho$  la masse volumique du solide,  $[U]$  le vecteur colonne

$$[U] = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix},$$

$[L]$  une matrice que vous calculerez.

6 Reformulez le système (4.85) en remplaçant  $\omega$  par son expression en terme de  $c$  et  $k$ . Quelle est la nature mathématique du système ainsi obtenu, i.e., comment apparaissent  $c^2$  et  $[U]$  ?

Montrez par la résolution de ce système et par une analyse physique des solutions obtenues, reposant notamment sur deux représentations spatiales du champ  $\bar{\mathbf{u}}$  à  $t$  fixé, l'existence de deux types d'ondes :

- des *ondes longitudinales de contraction-dilatation*, se propageant à la vitesse  $c_1$  ;
- des *ondes transversales de cisaillement*, se propageant à la vitesse  $c_2$ .

Vous calculerez les vitesses  $c_1$  et  $c_2$ , et comparerez au résultat de la question 2.a.

7 Calculez, pour chacun des deux types d'ondes que vous venez de mettre en évidence, la loi donnant l'expression de la densité locale  $\rho(\bar{\mathbf{x}}, t)$ , lorsque l'on écrit celle-ci à l'ordre  $U^1$  et non plus  $U^0$ ,  $U$  désignant l'ordre de grandeur du vecteur  $[U]$  introduit à la question 4. Pour éviter toute collision au niveau des notations, vous noterez, dans cette question seulement,  $\rho_0$  la densité à l'ordre  $U^0$ .

Commentez les résultats obtenus et montrez qu'ils permettent de confirmer la terminologie utilisée pour désigner les deux types d'ondes.

8 Toutes ces ondes sont-elles dispersives ou non ? De quelles ondes se propageant dans les fluides sont-elles analogues ?

### 9 Application au cas d'un acier :

Quelles sont les valeurs typiques des vitesses de phase  $c_1$  et  $c_2$  dans le cas d'un acier ? Comparez ces valeurs à celle estimée question 2.b.

### 10 Application aux ondes sismiques :

10.1 Dans le manteau terrestre considéré sur des temps courts, la masse volumique est de l'ordre de

$$\rho = 4000 \text{ kg/m}^3,$$

tandis que les modules d'Young et le coefficient de Poisson sont de l'ordre de

$$E = 380 \text{ GPa}, \quad \nu = 0,3.$$

Calculez alors les vitesses  $c_1$  et  $c_2$ .

**10.2** Au bout de combien de temps environ un sismographe placé à Nancy recevra un signal associé à un tremblement de terre ayant lieu en Californie ? Expliquez au passage pourquoi les sismologues distinguent en général des ondes « P », « Primaires », et des ondes « S », « Secondaires ». Qui est qui ?

*Données :*

Les coordonnées géographiques de Nancy sont

$$\Phi = \text{latitude} = 48^\circ \text{ Nord}, \quad \Lambda = \text{longitude} = 6^\circ \text{ Est};$$

celles de Los-Angeles sont

$$\Phi = 34^\circ \text{ Nord}, \quad \Lambda = 118^\circ \text{ Ouest};$$

on rappelle que le rayon de la Terre est 6400 km.

## 4.7 Notes personnelles



# Chapitre 5

## Analyse dimensionnelle appliquée à la mécanique des solides

L'*analyse dimensionnelle* est une méthode qui permet de mettre en place de façon très efficace des *modèles physiques en général*. Comme elle a beaucoup d'applications en mécanique des fluides, il est néanmoins justifié de l'introduire dans ce cours et à ce niveau. Nous allons exposer les principes de l'analyse dimensionnelle, qui conduisent notamment au théorème  $\pi$  de Vaschy-Buckingham<sup>1</sup>, puis deux applications possibles de celle-ci à la *mécanique des solides*, en décrivant par exemple comment elle permet de dégager des règles de *similitude* qui autorisent des études sur des maquettes, etc...

### 5.1 Principes de l'analyse dimensionnelle

#### 5.1.1 Dimensions physiques

Toutes les *grandeurs physiques* rencontrées en mécanique<sup>2</sup> ont une *dimension physique* qui peut s'exprimer comme un produit de puissances des *dimensions physiques fondamentales* que sont

- la *masse*  $m$ ,
- la *longueur*  $\ell$ ,
- le *temps*  $t$ ,
- la *température*  $\theta$ ,
- et, éventuellement, la *charge électrique*  $q_e$ .

Pour ne pas alourdir l'exposé, on ne considérera pas ici de phénomènes thermiques ni électromécaniques, donc on n'inclura ni la température ni la charge électrique dans les dimensions physiques fondamentales. On pourrait cependant étendre sans difficulté tout ce qui va suivre à des cas où la température ou la charge électrique intervient<sup>3</sup>.

---

1. Vaschy, mathématicien et physicien français de la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, établit ce théorème ; Buckingham, physicien américain actif au début du XX<sup>ème</sup> siècle, le redécouvrit, sans doute de façon totalement indépendante, et le fit connaître.

2. En mécanique quantique on parlerait d'« *observables* » au lieu de « *grandeurs physiques* » ; l'analyse dimensionnelle a beaucoup d'applications en mécanique quantique, cependant par « mécanique » on sous-entend ici, bien entendu, la mécanique *classique*.

3. Pour un exposé plus général que celui que l'on va donner de l'analyse dimensionnelle, voir par exemple le chapitre V de [Huerre \(1998\)](#).

L'énoncé précédent veut dire qu'une grandeur physique  $\phi$  a une dimension physique

$$m^\alpha \ell^\beta t^\gamma ,$$

ce que l'on note

$$\boxed{\phi \equiv m^\alpha \ell^\beta t^\gamma} , \quad (5.1)$$

et qui se lit

$$\begin{aligned} \ll \phi \text{ est homogène au produit d'une masse à la puissance } \alpha \\ \text{par une longueur à la puissance } \beta \\ \text{par un temps à la puissance } \gamma \gg. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Les *exposants des dimensions*  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont en général des entiers rationnels. La « *fonction de dimensions* » (5.1) n'est absolument pas arbitraire, mais se déduit de la définition physique de la grandeur considérée à partir de grandeurs plus fondamentales. Par exemple l'équation (1.21) définissant une vitesse (eulérienne),

$$\bar{v}(\bar{x}, t) = \frac{d\bar{x}}{dt} ,$$

montre que

$$v \equiv \frac{\ell}{t} \equiv \ell t^{-1} . \quad (5.3)$$

De même la définition (eulérienne) de l'accélération

$$\bar{\gamma} = \frac{d\bar{v}}{dt} ,$$

montre que

$$\gamma \equiv \frac{v}{t} \equiv \ell t^{-2} . \quad (5.4)$$

### 5.1.2 Mesure des grandeurs physiques - Systèmes d'unités

Ce que l'on vient d'énoncer peut paraître un peu abstrait, et doit être concrétisé par une réflexion sur la notion de *mesure d'une grandeur physique* par *choix d'un système d'unités*. Ce choix consiste exactement à se donner

- un *étalon de mesure de masse*  $M$ ,
- un *étalon de mesure de longueur*  $L$ ,
- un *étalon de mesure de temps*  $T$ .

En supposant des capacités de *comparaison* entre grandeurs du même type<sup>4</sup>, et de *subdivision-multiplication* des grandeurs<sup>5</sup>, on peut alors définir la *mesure* d'une grandeur fondamentale dans ce système d'unités (à une certaine précision près ; il faudrait peut-être remplacer les signes = dans ce qui suit par des signes  $\simeq$ ) :

- la mesure d'une masse  $m$  est le quotient

$$\text{mes}(m) = m/M ; \quad (5.5)$$

4. Un objet est plus lourd qu'un autre si le plateau de la balance penche vers celui-ci et non celui-là ; un segment est plus long qu'un autre si, lorsqu'ils sont mis côte à côte, celui-ci dépasse celui-là...

5. Être capable de définir les propriétés « être 10 fois moins lourd que », « être 10 fois plus long que », etc...

- la mesure d'une longueur  $\ell$  est le quotient

$$\text{mes}(\ell) = \ell/L ; \quad (5.6)$$

- la mesure d'un temps  $t$  est le quotient

$$\text{mes}(t) = t/T . \quad (5.7)$$

On peut ensuite définir des unités dérivées pour des grandeurs non fondamentales, en posant que l'étalon de mesure d'une quantité  $\phi$  dont la fonction de dimensions est (5.1) est

$$\Phi = M^\alpha L^\beta T^\gamma ; \quad (5.8)$$

la mesure de  $\phi$  dans ce système d'unités est donc le quotient

$$\text{mes}(\phi) = \phi/\Phi = \phi/(M^\alpha L^\beta T^\gamma) . \quad (5.9)$$

### 5.1.3 Nécessaire « homogénéité dimensionnelle » d'une équation physique

Une équation de la physique (ou de la mécanique) est une relation de la forme

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3 , \quad (5.10)$$

avec éventuellement plus ou moins de termes dans le membre de droite. Une telle relation, établie typiquement lors d'une modélisation, doit absolument être *invariante par changement de système d'unités*. En effet la physique ne connaît pas de frontières (!), donc l'ingénieur français utilisant par exemple le système d'unités international (SI) et son homologue anglais utilisant le système d'unités « impérial » doivent tous deux être capables de mesurer les quantités  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  dans leur système d'unités, lors d'une expérience (reproductible) dans des conditions données, et pouvoir tester et valider (avec une certaine précision, forcément finie), la relation (5.10). Plus généralement tout scientifique peut utiliser le système d'unités qu'il veut pour tester la validité (ou non) de (5.10). Examinons donc ce qui se passe si on change d'unités pour tester une équation de la physique encore plus simple

$$\phi_1 = \phi_2 . \quad (5.11)$$

Supposons que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  aient des fonctions de dimensions différentes,

$$\phi_1 \equiv m^{\alpha_1} \ell^{\beta_1} t^{\gamma_1} \quad \text{et} \quad \phi_2 \equiv m^{\alpha_2} \ell^{\beta_2} t^{\gamma_2} \quad \text{avec} \quad (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \neq (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) ,$$

par exemple, pour fixer les idées,  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ; on dit alors que l'équation (5.11) est « inhomogène dimensionnellement ». Supposons que l'on teste l'égalité (5.11) dans un premier système d'unités reposant sur des étalons  $M$ ,  $L$  et  $T$  de masse, longueur et temps. On valide alors cette équation en observant que

$$\text{mes}(\phi_1) = \frac{\phi_1}{M^{\alpha_1} L^{\beta_1} T^{\gamma_1}} \simeq \text{mes}(\phi_2) = \frac{\phi_2}{M^{\alpha_2} L^{\beta_2} T^{\gamma_2}} . \quad (5.12)$$

On peut très bien décider d'utiliser un autre système d'unités, dit « prime », dans lequel les étalons de longueur et temps sont inchangés, mais l'étalon de masse est dix fois plus grand,

$$M' = 10M .$$

Si la loi (5.11) est vraiment physique, on doit retrouver l'égalité  $\phi_1 = \phi_2$  dans ce nouveau système d'unités, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\text{mes}'(\phi_1) = \frac{\phi_1}{(10M)^{\alpha_1} L^{\beta_1} T^{\gamma_1}} \simeq \text{mes}'(\phi_2) = \frac{\phi_2}{(10M)^{\alpha_2} L^{\beta_2} T^{\gamma_2}}. \quad (5.13)$$

En faisant le quotient des relations (5.12) et (5.13) on voit qu'il faut avoir

$$10^{\alpha_1} \simeq 10^{\alpha_2},$$

ce qui n'est pas possible puisque  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ; dans le cas où  $\alpha_1$  serait proche de  $\alpha_2$  on peut reprendre le même raisonnement en remplaçant le facteur 10 entre les étalons  $M'$  et  $M$  par un facteur 1000 par exemple, d'où l'impossibilité d'avoir

$$1000^{\alpha_1} \simeq 1000^{\alpha_2}.$$

Ainsi une conséquence de l'invariance des lois de la physique par choix d'unités est le fait que *toute équation de la physique doit être « homogène dimensionnellement »*, au sens où *tous les termes d'une égalité doivent avoir la même fonction de dimensions*. Cette propriété peut être utilisée pour *détecter des erreurs de modélisation*. En effet si un raisonnement ou calcul conduit par exemple à une relation de la forme

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3$$

avec des fonctions de dimensions différentes pour  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$ , alors il ne peut s'agir d'une équation de la physique, i.e. le raisonnement ou calcul comporte *forcément* une faute. Un élève-ingénieur ou ingénieur se doit donc de *toujours tester l'homogénéité dimensionnelle des formules analytiques* qu'il établit, pour éliminer au maximum erreurs de raisonnement ou fautes de calcul<sup>6</sup>.

#### 5.1.4 Retour sur le choix d'un système d'unités - Privilégier l'international!

D'un point de vue plus pratique, il convient aussi de s'assurer, lorsque l'on fait des *mesures sur un système* ou que l'on *automatise un système*, que le *choix des unités fait n'est pas ambigu et est bien connu de toutes les parties impliquées* pour « agir » sur ce système. Je donnerai un exemple dramatique de ce que peut donner une négligence à ce niveau lors du cours d'amphi. En attendant il importe de bien définir le *système d'unités international* avec ses unités fondamentales et ses unités dérivées; ceci est fait dans la table 5.1. La mise au point de ce système a été longue et laborieuse; voir par exemple sur ce sujet d'« histoire des sciences » très intéressant Guedj (2000) ou Jedrzejewski (2002). On se contente ci-dessous de rappeler les définitions historiques et récentes de chaque étalon de mesure fondamental. On remarque que les définitions physiques récentes de ces trois étalons font chacune appel à une sous-branche de la science mécanique.

- L'*étalon de mesure du temps* est la *seconde*, définie de façon peu précise comme la durée d'un jour terrestre divisé par 86400, et plus précisément<sup>7</sup> comme la « durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de Césium 133 ». La constance (ou « universalité ») de cette durée résulte des lois de la mécanique quantique.

6. Comme indiqué dans l'annexe B, une formule « inhomogène dimensionnellement » dans une rédaction ou copie de test sera signalée par l'annotation « INHD », que nous souhaitons utiliser le moins possible!..

7. Mieux vaut avoir une horloge atomique sous la main pour mettre en œuvre cette définition!...

Grandeur	Notation - Définition	Fonction de dimensions	Unité SI
Masse	$m$	$m^1$	kilogramme, kg
Longueur	$\ell$	$\ell^1$	mètre, m
Temps	$t$	$t^1$	seconde, s
Masse volumique	$\rho = d^3m/d^3x$	$m^1 \ell^{-3}$	kg/m <sup>3</sup>
Vitesse	$v = dx/dt$	$\ell^1 t^{-1}$	m/s
Accélération	$\gamma = dv/dt$	$\ell^1 t^{-2}$	m/s <sup>2</sup>
Force	$F = m\gamma$	$m^1 \ell^1 t^{-2}$	Newton, N = kg m/s <sup>2</sup>
Couple	$\Gamma = F\ell$	$m^1 \ell^2 t^{-2}$	N m = kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Pression, Contrainte	$p, \sigma = F/S$	$m^1 \ell^{-1} t^{-2}$	Pascal, Pa = kg/(m s <sup>2</sup> )
Énergie	$E = \frac{1}{2}mv^2$	$m^1 \ell^2 t^{-2}$	Joule, J = kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Puissance	$P = dE/dt$	$m^1 \ell^2 t^{-3}$	Watt, W = J/s
Déformation	$\epsilon = \partial x/\partial X$	1	
Module d'Young	$E = \sigma/\epsilon$	$m^1 \ell^{-1} t^{-2}$	Pascal, Pa = kg/(m s <sup>2</sup> )
Taux de déformation	$D = \partial v/\partial x$	$t^{-1}$	s <sup>-1</sup>
Viscosité dynamique	$\eta = \sigma/D$	$m^1 \ell^{-1} t^{-1}$	kg/(m s) = Pa s
Viscosité cinématique	$\nu = \eta/\rho$	$\ell^2 t^{-1} \equiv \nu \ell$	m <sup>2</sup> /s
Débit volumique	$q = vS$	$\ell^3 t^{-1}$	m <sup>3</sup> /s
Débit massique	$\dot{m} = \rho q$	$m^1 t^{-1}$	kg/s

**Tab. 5.1** – *Fonctions de dimensions et unités dans le système international* (SI) des principales grandeurs rencontrées en mécanique des milieux continus. Les quatre dernières lignes relèvent de la mécanique des fluides, les grandeurs listées seront introduites dans le chapitre 7.

- *L'étalon de mesure de longueur* a été défini une première fois par une loi française de 1795 : « le *mètre* est la dix millionième partie de l'arc de méridien terrestre entre le pôle boréal et l'équateur »<sup>8</sup>. Plus récemment on a posé que « le mètre est la longueur parcourue dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299792458 de seconde ». La constance de la vitesse de la lumière dans le vide résulte des lois de la mécanique relativiste.
- *L'étalon de mesure de masse*, le *kilogramme*, a été défini par une loi française de 1799 comme la masse d'un décimètre cube (c'est-à-dire un litre!) d'eau pure à son maximum de densité i.e. 4°C. Pour des mesures très précises on se réfère maintenant plutôt à des étalons du kilogramme soigneusement contrôlés. La définition à partir d'un volume d'eau, elle, relève de la mécanique des milieux continus.

8. Ainsi cet arc mesure 10000 km, donnée à retenir pour des applications géophysiques de la mécanique. On en déduit en particulier le rayon terrestre  $r_T$  puisque  $\frac{1}{4}2\pi r_T = 10000 \text{ km} \iff r_T = \frac{2}{\pi} 10000 \text{ km} \simeq 6370 \text{ km}$ .

### 5.1.5 Théorème $\pi$ de Vaschy-Buckingham

#### Cas général avec trois grandeurs fondamentales

En revenant du côté de la modélisation, l'analyse dimensionnelle permet non seulement d'éliminer des formules non physiques, mais mieux d'écrire a priori<sup>9</sup> des formules physiques sous une forme « *adimensionnelle* » présentant donc une certaine « *universalité* ». Pour cela on considère un certain phénomène physique que l'on veut modéliser, et on commence par *recenser toutes les grandeurs physiques pertinentes*  $\phi, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ , les grandeurs  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  étant considérées comme les « *paramètres de contrôle* », deux à deux indépendants, du système, la grandeur  $\phi$  comme une *grandeur « dépendante »*. Le but du modèle à développer sera donc d'établir une relation fonctionnelle de la forme

$$\phi = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) . \quad (5.14)$$

Introduisons les fonctions de dimensions de toutes ces grandeurs :

$$\begin{aligned} \phi &\equiv m^\alpha \ell^\beta t^\gamma \\ \phi_1 &\equiv m^{\alpha_1} \ell^{\beta_1} t^{\gamma_1} \\ &\vdots \\ \phi_n &\equiv m^{\alpha_n} \ell^{\beta_n} t^{\gamma_n} . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Vaschy et Buckingham ont proposé de *choisir parmi les grandeurs*  $\phi_1, \dots, \phi_n$  *le maximum de « grandeurs fondamentales » ou « grandeurs dimensionnellement indépendantes »*  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  au sens où

$$\phi_1^{\lambda_1} \phi_2^{\lambda_2} \phi_3^{\lambda_3} \equiv 1 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 . \quad (5.16)$$

Ces grandeurs fondamentales sont typiquement au nombre de trois, sauf dans le cas de modèles particulièrement « simples »; on reviendra sur le cas de tels modèles simples où il y a moins de trois grandeurs fondamentales à la fin de cette section. Pour une étude plus générale voir par exemple le chapitre V de [Huerre \(1998\)](#). Enfin, le fait que les grandeurs fondamentales soient les trois premières peut être assuré par un éventuel remaniement d'indices.

D'après (5.16) on ne peut exprimer la fonction de dimensions de l'une des grandeurs en fonction des autres, car si on le pouvait il existerait par exemple  $\mu_1, \mu_2$  tels que

$$\phi_3 \equiv \phi_1^{\mu_1} \phi_2^{\mu_2} \iff \phi_1^{\mu_1} \phi_2^{\mu_2} \phi_3^{-1} \equiv 1 . \quad (5.17)$$

Compte tenu de (5.15), l'équation exprimant une liaison éventuelle entre les grandeurs

$$\phi_1^{\lambda_1} \phi_2^{\lambda_2} \phi_3^{\lambda_3} \equiv 1 \quad (5.18)$$

s'écrit

$$m^{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3} \ell^{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \beta_3 \lambda_3} t^{\gamma_1 \lambda_1 + \gamma_2 \lambda_2 + \gamma_3 \lambda_3} \equiv 1 . \quad (5.19)$$

Si elle a lieu, cette relation doit être vérifiée dans n'importe quel système d'unités, i.e. on peut l'expliciter sous la forme d'une *égalité* en remplaçant  $m, \ell$  et  $t$  par des valeurs étalons *quelconques*  $M, L$  et  $T$ . Il vient donc

$$\forall M, L, T, \quad M^{\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3} L^{\beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \beta_3 \lambda_3} T^{\gamma_1 \lambda_1 + \gamma_2 \lambda_2 + \gamma_3 \lambda_3} = 1 .$$

9. Sans développer complètement un modèle.

Ceci n'est possible que si

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 = 0 \\ \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \beta_3 \lambda_3 = 0 \\ \gamma_1 \lambda_1 + \gamma_2 \lambda_2 + \gamma_3 \lambda_3 = 0 \end{cases} . \quad (5.20)$$

Ainsi l'équivalence (5.16) peut se récrire

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 = 0 \\ \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 + \beta_3 \lambda_3 = 0 \\ \gamma_1 \lambda_1 + \gamma_2 \lambda_2 + \gamma_3 \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 . \quad (5.21)$$

D'après le cours d'algèbre linéaire de classes préparatoires, ceci est si et seulement si la **matrice des exposants des dimensions**

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

est de rang 3 i.e. inversible. Ce critère permettant de déterminer quelles sont les grandeurs dimensionnellement indépendantes s'applique pratiquement comme suit : on construit à partir des fonctions de dimensions (5.15) la matrice des exposants des dimensions comme le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|cccc} & \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \\ \hline m & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \hline \ell & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \hline t & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \end{array} . \quad (5.23)$$

On choisit alors dans ce tableau 3 colonnes formant une sous-matrice  $3 \times 3$  inversible : les grandeurs correspondantes sont alors les « **grandeurs fondamentales** ». Au besoin on renumérote les grandeurs de sorte que ces grandeurs soient bien  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$ . Comme les autres grandeurs sont dépendantes dimensionnellement de celles-ci, on peut les exprimer dimensionnellement en fonctions de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$ . Considérons en effet un indice  $k$  parmi  $4, \dots, n$ . On doit pouvoir déterminer trois exposants  $a_k$ ,  $b_k$  et  $c_k$  de sorte que

$$\phi_k \equiv \phi_1^{a_k} \phi_2^{b_k} \phi_3^{c_k} . \quad (5.24)$$

Ceci se prouve et se fait pratiquement en utilisant les fonctions de dimensions (5.15) : la relation (5.24) s'écrit

$$m^{\alpha_k} \ell^{\beta_k} t^{\gamma_k} \equiv m^{\alpha_1 a_k + \alpha_2 b_k + \alpha_3 c_k} \ell^{\beta_1 a_k + \beta_2 b_k + \beta_3 c_k} t^{\gamma_1 a_k + \gamma_2 b_k + \gamma_3 c_k} . \quad (5.25)$$

En refaisant le raisonnement qui a conduit de l'équation (5.19) au système (5.20), on déduit de l'équation (5.25) le système

$$\begin{cases} \alpha_1 a_k + \alpha_2 b_k + \alpha_3 c_k = \alpha_k \\ \beta_1 a_k + \beta_2 b_k + \beta_3 c_k = \beta_k \\ \gamma_1 a_k + \gamma_2 b_k + \gamma_3 c_k = \gamma_k \end{cases} . \quad (5.26)$$

Ce système linéaire inhomogène portant sur les inconnues  $(a_k, b_k, c_k)$  a une solution unique puisque la matrice (5.22) est inversible. On peut donc introduire la **variable adimensionnelle** ou « **groupement**  $\pi$  »

$$\boxed{\pi_k = \frac{\phi_k}{\phi_1^{a_k} \phi_2^{b_k} \phi_3^{c_k}}} . \quad (5.27)$$

De même on peut déterminer trois exposants  $a_0$ ,  $b_0$  et  $c_0$  de sorte que

$$\phi \equiv \phi_1^{a_0} \phi_2^{b_0} \phi_3^{c_0} . \quad (5.28)$$

On peut donc introduire une autre *variable adimensionnelle* ou *groupement*  $\pi$

$$\boxed{\pi_0 = \frac{\phi}{\phi_1^{a_0} \phi_2^{b_0} \phi_3^{c_0}}} . \quad (5.29)$$

La relation fonctionnelle (5.14) se réécrit en conséquence

$$\pi_0 = \frac{1}{\phi_1^{a_0} \phi_2^{b_0} \phi_3^{c_0}} f(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_1^{a_4} \phi_2^{b_4} \phi_3^{c_4} \pi_4, \dots, \phi_1^{a_n} \phi_2^{b_n} \phi_3^{c_n} \pi_n) ,$$

soit, par changement de fonction,

$$\pi_0 = F(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \pi_4, \dots, \pi_n) .$$

Cette relation ne peut prendre une forme quantitative qu'une fois choisi un système d'unités. Comme les grandeurs  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  sont dimensionnellement indépendantes on peut définir ce système d'unités directement à l'aide d'étalons de mesure  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  de ces grandeurs. En pratique on aura donc pour des conditions réelles données

$$\begin{aligned} \pi_0 &= F(\text{mes}(\phi_1), \text{mes}(\phi_2), \text{mes}(\phi_3), \pi_4, \dots, \pi_n) \\ \pi_0 &= F\left(\frac{\phi_1}{\Phi_1}, \frac{\phi_2}{\Phi_2}, \frac{\phi_3}{\Phi_3}, \pi_4, \dots, \pi_n\right) . \end{aligned} \quad (5.30)$$

En multipliant l'étalon de mesure  $\Phi_1$  par 10, on en déduit que  $F$  ne doit pas dépendre de son premier argument. De même elle ne peut dépendre de son deuxième ou de son troisième argument, eux-aussi dimensionnels. Au bilan  $F$  ne peut dépendre que de ses arguments adimensionnels. On peut donc énoncer le *théorème  $\pi$  de Vaschy-Buckingham* : une *relation fonctionnelle* (5.14)

$$\phi = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \quad (5.31)$$

entre grandeurs physiques doit pouvoir, si  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\phi_3$  sont dimensionnellement indépendantes, *se réécrire sous la forme adimensionnelle plus simple*

$$\boxed{\pi_0 = \mathcal{F}(\pi_4, \dots, \pi_n)} \quad (5.32)$$

en introduisant les *groupements*  $\pi$  (5.29) et (5.27). Si le nombre de paramètres de contrôle est  $n = 3$  seulement, il vient

$$\boxed{\pi_0 = \text{constante}} . \quad (5.33)$$

### Cas avec deux grandeurs fondamentales et paramètres de contrôle seulement

Certains modèles « simples » n'impliquent que deux grandeurs fondamentales  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , qui sont aussi les deux seuls paramètres de contrôle du système. En procédant comme ci-dessus on peut introduire le groupement

$$\pi_0 = \frac{\phi}{\phi_1^{a_0} \phi_2^{b_0}} \quad (5.34)$$

pour adimensionner la variable dépendante d'intérêt  $\phi$ . A priori

$$\pi_0 = F(\phi_1, \phi_2) = F(\text{mes}(\phi_1), \text{mes}(\phi_2)) = F\left(\frac{\phi_1}{\Phi_1}, \frac{\phi_2}{\Phi_2}\right)$$

ne peut dépendre d'aucun de ses arguments, donc

$$\pi_0 = \text{constante} \iff \boxed{\phi = \pi_0 \phi_1^{a_0} \phi_2^{b_0}}. \quad (5.35)$$

### Cas avec une grandeur fondamentale et paramètre de contrôle seulement

Certains modèles « très simples » n'impliquent qu'une grandeur fondamentale et paramètre de contrôle  $\phi_1$ , qui doit forcément être homogène à la variable dépendante d'intérêt  $\phi$ . Le groupement qui permet de l'adimensionner est alors, tout simplement,

$$\pi_0 = \frac{\phi}{\phi_1}. \quad (5.36)$$

En raisonnant comme ci-dessus mais avec  $F$  fonction d'une seule variable on montre que, dans un tel modèle,

$$\pi_0 = \text{constante} \iff \boxed{\phi = \pi_0 \phi_1}. \quad (5.37)$$

### Autres cas particuliers

On peut envisager divers autres cas particuliers, par exemple, avec deux grandeurs fondamentales mais trois paramètres de contrôle, une grandeur fondamentale et deux paramètres de contrôle, etc... Le lecteur est invité à résoudre ces cas particuliers par lui-même, avec la méthodologie développée ci-dessus, que l'on peut attribuer à Vaschy et Buckingham. De tels cas particuliers sont abordés dans la question 2 du problème 4.8 ainsi que dans la section 5.3 ci-après.

Nous allons maintenant, dans les deux sections qui suivent, appliquer la méthodologie de Vaschy et Buckingham à deux problèmes assez différents.

## 5.2 Application : modélisation d'un problème d'impact élastique

Dans cette section inspirée de [Sonin \(2001\)](#), on étudie à l'aide de l'analyse dimensionnelle un problème mécanique complexe, à savoir, celui de *l'impact d'une boule élastique lancée sur une surface plane*. Le phénomène étudié est représenté sur la figure 5.1. Une boule de diamètre  $D$  constituée d'un matériau élastique homogène est enduite de peinture fraîche, et lancée à la vitesse  $V$  sur une surface plane très rigide. Elle s'« écrase » sur cette surface en y laissant, par déformation, une trace circulaire de diamètre  $d$ , avant de rebondir. On se pose la question de la loi qui donne  $d$  en fonction de tous les paramètres du contrôle du problème.

### 5.2.1 Mise en place du modèle : recensement des grandeurs physiques

En se restreignant au cas où la boule est lancée perpendiculairement à la surface plane, d'un point de vue « *inertie* » les seules grandeurs pertinentes sont la vitesse  $V$  de la boule avant son impact, et sa masse  $m$ . Cette dernière

$$m = \frac{1}{6}\pi\rho D^3 \quad (5.38)$$

n'est pas indépendante de la masse volumique  $\rho$  du matériau qui constitue la boule, et de son diamètre  $D$ . De plus l'*élasticité* de la boule joue un rôle, puisque, si elle était parfaitement rigide, l'impact serait ponctuel. Comme on l'a vu dans le chapitre 4, en faisant l'hypothèse simple que le matériau de la boule est isotrope et travaille en réponse linéaire, on peut caractériser son élasticité par son module d'Young  $E$  et son coefficient de Poisson  $\nu$ . À cause de la relation (5.38), on peut décider de choisir comme *paramètres de contrôle* de ce problème  $D$ ,  $\rho$ ,  $V$ ,  $E$  et  $\nu$ . La *grandeur dépendante* est bien sûr le diamètre de la zone d'impact  $d$ .

### 5.2.2 Commentaire général

Il faut réaliser que cette phase qui consiste à recenser les paramètres de contrôle du problème, et, dans une moindre mesure, la grandeur dépendante, est très délicate car elle nécessite une bonne connaissance de la physique du problème. En effet, si cette phase est mal menée elle conduit à une liste de paramètres de contrôle soit trop longue<sup>10</sup> soit trop courte<sup>11</sup>. Dans ces deux cas, liste trop longue ou trop courte, l'analyse dimensionnelle sera condamnée à donner des résultats peu pertinents, voire, aucun résultat pertinent...

### 5.2.3 Étude et réduction des paramètres de contrôle

Construisons la matrice des exposants des dimensions des paramètres de contrôle :

	$D$	$\rho$	$V$	$E$	$\nu$
$m$	0	1	0	1	0
$\ell$	1	-3	1	-1	0
$t$	0	0	-1	-2	0

On voit que l'on est dans la situation « standard » où les trois premières grandeurs sont dimensionnellement indépendantes, la matrice formée par les trois premières colonnes étant de déterminant 1, donc inversible. Le groupement  $\pi_4$  permettant d'adimensionner  $E$  se construit en calculant les exposants  $a_4$ ,  $b_4$ ,  $c_4$  tels que

$$E \equiv D^{a_4} \rho^{b_4} V^{c_4} .$$

En extrayant les exposants de  $m$ ,  $\ell$  et  $t$  dans cette équation aux dimensions, de façon analogue à ce qui a été fait pour passer des équations (5.24) à (5.26) lorsque l'on a établi le théorème  $\pi$ , il vient

$$\begin{cases} 0 + b_4 + 0 = 1 \\ a_4 - 3b_4 + c_4 = -1 \\ 0 + 0 - c_4 = -2 \end{cases} . \quad (5.39)$$

Ce système se résout pour donner  $a_4 = 0$ ,  $b_4 = 1$ ,  $c_4 = 2$ , d'où

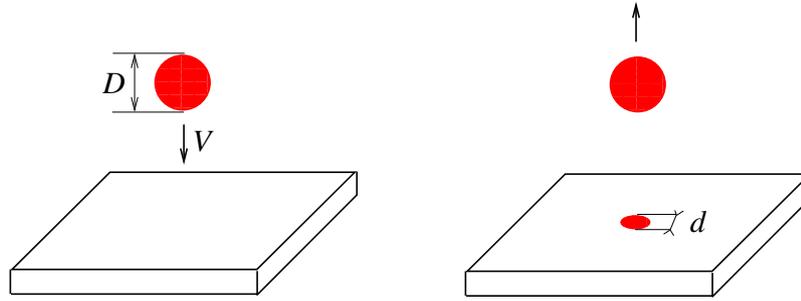
$$\pi_4 = \frac{E}{\rho V^2} . \quad (5.40)$$

Le groupement  $\pi_5$  permettant d'adimensionner  $\nu$  est, trivialement,

$$\pi_5 = \nu . \quad (5.41)$$

10. Ce serait le cas ici si on avait rajouté l'accélération de la pesanteur  $g$ , ou la viscosité de l'air  $\eta$  dans les paramètres de contrôle. Si le lancer de la boule se fait suffisamment près de la surface, et avec une vitesse  $V$  pas trop petite, la pesanteur ne jouera pas, et les frottements visqueux de l'air ambiant non plus...

11. Ce serait le cas ici si on avait oublié la masse volumique  $\rho$  par exemple.



**Fig. 5.1** – Phénomène d'*impact élastique*. **Gauche** : situation initiale, lancer de la boule enduite de peinture à une vitesse  $V$  contrôlée en direction de la surface plane rigide. **Droite** : après impact et rebond, une tache de peinture de diamètre  $d$  est laissée sur cette surface.

### 5.2.4 Conséquence : propriétés de *similitude*

De façon directe<sup>12</sup> le groupement adimensionnel associé à la grandeur dépendante  $d$  est

$$\pi_0 = \frac{d}{D}.$$

La relation générale

$$d = f(D, \rho, V, E, \nu) \quad (5.42)$$

peut donc, d'après le théorème  $\pi$ , être mise sous la forme réduite

$$\frac{d}{D} = \mathcal{F}\left(\frac{E}{\rho V^2}, \nu\right). \quad (5.43)$$

D'un point de vue physique, la relation (5.43) s'interprète ainsi :

- le diamètre de la zone d'impact  $d$  doit toujours être comparé au diamètre de la boule  $D$  ;
- d'autre part, cet impact élastique n'est pas contrôlé de façon indépendante par l'élasticité et l'inertie, mais par la combinaison  $\pi_4 = E/(\rho V^2)$  des paramètres qui caractérisent ces phénomènes ; ce rapport  $\pi_4$  mesure précisément leur compétition.

Ainsi, on peut déclarer « *similaires* » ou « *se correspondant par similitude* » des expériences qui se feraient l'une avec une boule de diamètre  $D_1$ , masse volumique  $\rho_1$ , lancée à la vitesse  $V_1$ , l'autre avec une boule de diamètre  $D_2$ , masse volumique  $\rho_2$ , lancée à la vitesse  $V_2$ , pourvu que les *paramètres de contrôle adimensionnels* soient les mêmes entre les deux expériences, i.e. pourvu que

$$\pi_4 = \frac{E_1}{\rho_1 V_1^2} = \frac{E_2}{\rho_2 V_2^2}, \quad (5.44)$$

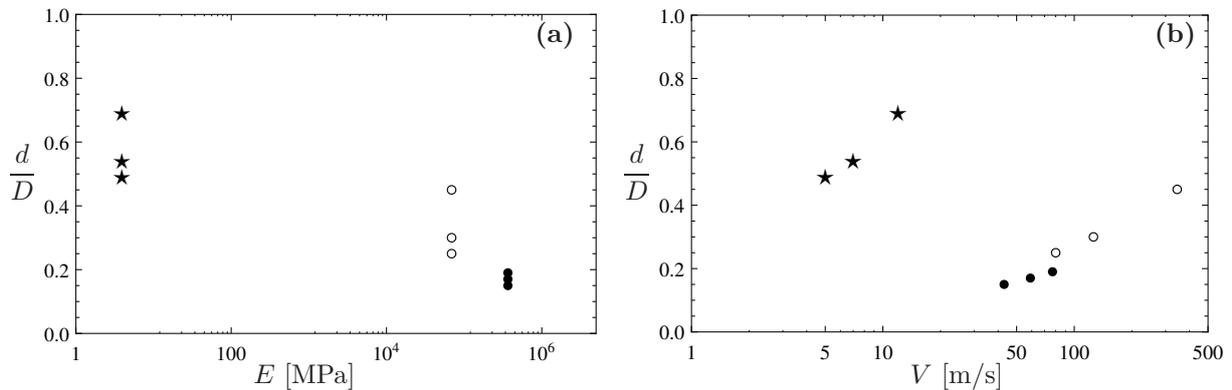
et que les boules aient le même coefficient de Poisson  $\nu$ . Ceci permet d'envisager, pour étudier le cas d'une grosse boule, de diamètre  $D_1$ , une expérience analogique, à l'aide d'une boule beaucoup plus petite, de diamètre  $D_2$  ; si les conditions de similitude énoncées ci-dessus sont vérifiées, on peut prédire que

$$d_1 = d_2 \frac{D_1}{D_2}.$$

12. On pourrait aussi, manquant d'intuition, écrire un système du type (5.39).

Matériaux	$E$ [MPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$V$ [m/s]	$\nu$	$E/(\rho V^2)$	$d/D$	Symbole
Alumine	366000	3960	43	0,22	50133	0,15	●
	366000	3960	59	0,22	26937	0,17	●
	366000	3960	77	0,22	15511	0,19	●
Aluminium	69000	2705	80	0,33	3973	0,25	○
	69000	2705	126	0,33	1608	0,30	○
	69000	2705	345	0,33	215	0,45	○
Caoutchouc	3,93	1060	5	0,47	127	0,50	★
	3,93	1060	7	0,47	79	0,55	★
	3,93	1060	12	0,47	24	0,70	★

**Tab. 5.2** – Table tirée de [Sonin \(2001\)](#), présentant des expériences numériques d'*impact élastique*, ainsi que les symboles correspondant sur les figures 5.2 et 5.3.



**Fig. 5.2** – *Impact élastique* : étude de l'influence du module d'Young (a) ou de la vitesse d'impact (b) sur la taille réduite de la zone impactée, à partir des données de la table 5.2.

### 5.2.5 Vérification à l'aide d'expériences numériques - Courbe maîtresse

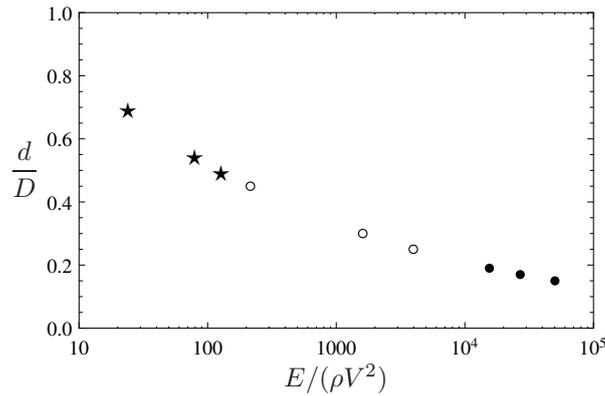
Des *expériences numériques* à l'aide d'un code éléments finis, réalisées par Bathe<sup>13</sup> en 2001, et rapportées par [Sonin \(2001\)](#), conduisent à la table 5.2. De grandes gammes de valeurs sont explorées, et il est clair que, sans l'analyse dimensionnelle, qui a conduit à l'insertion des dernières colonnes montrant  $E/(\rho V^2)$  et  $d/D$ , on aurait du mal à dégager des lois générales quantitatives. De fait, si on veut, ignorant l'analyse dimensionnelle, étudier l'influence de  $E$  ou  $V$  sur  $d$ , on aboutit aux figures 5.2, qui présentent des tendances que l'on peut expliquer physiquement, mais, aussi, une grande dispersion.

En appliquant l'analyse dimensionnelle, on est poussé à représenter le graphe de  $d/D$  en fonction de  $\pi_4 = E/(\rho V^2)$ , ce qui aboutit à la figure 5.3. Tous les points dispersés des figures 5.2 s'alignent sur une courbe unique que l'on appelle en général, en analyse dimensionnelle, « *courbe maîtresse* ». Ce fait prouve que le coefficient de Poisson, pourvu qu'il reste dans l'intervalle  $[0,22, 0,47]$ , a une influence négligeable : grâce à ces expériences on peut affiner le résultat (5.43) de l'analyse dimensionnelle et affirmer que, pour  $\nu \in [0,22, 0,47]$ ,

$$\boxed{\frac{d}{D} = f\left(\frac{E}{\rho V^2}\right)}, \quad (5.45)$$

fonction visible sur la figure 5.3, pour laquelle on pourrait proposer une formule quantitative par

13. Ingénieur-docteur américain travaillant au MIT.



**Fig. 5.3** – Étude du problème de l'*impact élastique* et des données de la table 5.2 en utilisant l'analyse dimensionnelle pour identifier le paramètre de contrôle pertinent, en abscisse.

ajustement numérique. Le lecteur est invité à expliquer physiquement pourquoi la fonction  $f$  est décroissante.

### 5.3 Application : étude du flambement d'une poutre cylindrique

On s'intéresse à une poutre d'un matériau homogène élastique isotrope, de forme cylindrique à section circulaire. De diamètre  $d$  et longueur  $h \gg d$ , elle est initialement verticale et à l'équilibre entre deux liaisons rotules alignées verticalement sur un axe  $Az$ , comme représenté sur la figure 5.4. Ces liaisons rotules permettent une rotation libre autour des points centraux correspondants, A et B. De plus, le système portant la liaison rotule supérieure centrée sur B est libre de se déplacer dans la direction verticale, i.e., une liaison glissière maintient ce système sur l'axe  $Az$ . Si on applique une force verticale  $\bar{\mathbf{F}}$  au niveau de la liaison rotule « supérieure », en B, on observe que, tant que  $F = \|\bar{\mathbf{F}}\|$  reste inférieure à une valeur critique  $F_c$ , la poutre reste droite, i.e., rectiligne et cylindrique. Elle se déforme seulement en compression : sa longueur  $h$  diminue légèrement, son diamètre  $d$  augmente légèrement. Par contre, si  $F$  dépasse  $F_c$ , la poutre se déforme brutalement en flexion, sa fibre moyenne, nouveau lieu des points matériels du segment AB dans la configuration initiale, devenant gauche. La nouvelle configuration d'équilibre atteinte est représentée sur la figure 5.4b. Cette *instabilité élastique* est dite « *instabilité de flambement* »<sup>14</sup>. On se propose de l'étudier par analyse dimensionnelle.

#### 5.3.1 Mise en place du modèle : recensement des grandeurs physiques

Le diamètre  $d$  et la longueur initiale  $h$  de la poutre sont les paramètres de contrôle géométriques de ce système. Comme des configurations d'équilibre sont toujours atteintes, quelque soit  $F$ , l'inertie de la poutre n'importe pas : la masse volumique  $\rho$  du matériau n'est pas un paramètre de contrôle. Enfin, concernant l'élasticité, faisant l'hypothèse que le matériau travaille en élasticité linéaire, et inspiré par les conclusions de l'étude de la section 5.2, on va supposer qu'en première approximation le seul paramètre de contrôle élastique est le module d'Young  $E$  du matériau. Le coefficient de Poisson est supposé rester dans l'intervalle « classique »  $\nu \in [0,2, 0,49]$ , et n'avoir que très peu d'influence. Pour étayer cette hypothèse, on peut remarquer que l'on ne s'intéresse ici qu'au mouvement de la fibre moyenne, et exploiter l'étude menée dans le problème 4.1. Cette étude,

14. Certaines personnes parlent plutôt d'« *instabilité de flambage* ». En anglais flambement se dit 'buckling'.

qui concernait aussi une « poutre » en flexion (même si elle n'est pas cylindrique, et si les efforts appliqués sont plus contrôlés), avait conduit à un déplacement de la fibre moyenne (définie par  $y = z = 0$ ) de la forme

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_0 - \frac{3}{8} \frac{\Gamma}{eh^3E} x^2 \bar{\mathbf{e}}_y, \quad (5.46)$$

qui ne faisait pas intervenir le coefficient de Poisson du matériau.

Nous supposons donc que les paramètres de contrôle sont  $d$ ,  $h$  et  $E$ .

La grandeur dépendante est la valeur critique  $F_c$  de la force  $F$ , i.e. le « seuil de flambement ».

### 5.3.2 Étude et réduction des paramètres de contrôle

Il est clair que  $d$  et  $h$  ne sont pas des grandeurs dimensionnellement indépendantes, on est donc dans le cas où on a seulement deux grandeurs fondamentales,  $d$  et  $E$ , parmi les trois paramètres de contrôle  $d$ ,  $E$  et  $h$ . Suivant la méthodologie de Vaschy et Buckingham, on adimensionne le troisième paramètre de contrôle  $h$  en introduisant le groupement

$$\pi_3 = \frac{h}{d}. \quad (5.47)$$

### 5.3.3 Conséquence : propriétés de *similitude*

On adimensionne la grandeur dépendante en réglant les exposants  $a_0$  et  $b_0$  de sorte que

$$\pi_0 = \frac{F_c}{d^{a_0} E^{b_0}}$$

soit sans dimension. On trouve  $a_0 = 2$ ,  $b_0 = 1$ , i.e.

$$\pi_0 = \frac{F_c}{E d^2}. \quad (5.48)$$

Suivant la méthode de Vaschy et Buckingham, la loi physique

$$F_c = f(d, E, h)$$

peut aussi s'écrire

$$\pi_0 = \frac{F_c}{E d^2} = \mathcal{F}(d, E, \pi_3) = \mathcal{F}\left(\frac{d}{L}, \frac{E}{P}, \frac{h}{d}\right),$$

où l'on a introduit les étalons de mesure  $L$  des longueurs et  $P$  des pressions, donc des modules d'Young. Ces étalons pouvant varier de façon arbitraire, il est clair que  $\mathcal{F}$  ne peut dépendre de ses deux premiers arguments. L'analyse dimensionnelle montre donc que

$$\frac{F_c}{E d^2} = \mathcal{G}\left(\frac{h}{d}\right). \quad (5.49)$$

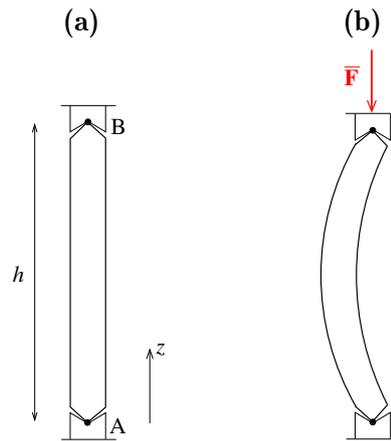
### 5.3.4 Obtention d'une loi de seuil de flambement

En faisant des *expériences* avec des poutres de diamètre  $d$  et longueur  $h$  variables, on s'aperçoit que la dépendance de  $F_c$  par rapport à  $d$  et  $h$  se fait par des lois de puissance :

$$F_c \propto d^4, \quad F_c \propto h^{-2}; \quad (5.50)$$

le fait que l'exposant de  $d$  soit positif et celui de  $h$  négatif peut s'interpréter mécaniquement (faites-le!). On peut alors raisonnablement supposer que la fonction  $\mathcal{G}$  de l'équation (5.49) est elle-même une loi de puissance, de la forme

$$\mathcal{G}\left(\frac{h}{d}\right) = G_0 \left(\frac{h}{d}\right)^\alpha, \quad (5.51)$$



**Fig. 5.4** – **a** : vue schématique, en coupe, d'une poutre cylindrique verticale, située entre deux liaisons rotules aux points A et B. **b** : si on applique une force verticale  $\bar{\mathbf{F}}$  de norme suffisante, on observe un phénomène de « *flambement* », la poutre se déforme en flexion dans une certaine direction.

avec  $G_0$  une constante sans dimension à déterminer expérimentalement ou par le calcul. Ceci donne, par injection dans (5.49),

$$F_c = G_0 E d^{2-\alpha} h^\alpha, \quad (5.52)$$

d'où, par identification avec (5.50),

$$\alpha = -2 \implies \boxed{F_c = G_0 \frac{E d^4}{h^2}}. \quad (5.53)$$

### 5.3.5 Compléments

Des expériences fines, ou, alternativement, un modèle, permettent de déterminer complètement cette loi, en montrant que<sup>15</sup>

$$G_0 = \pi^3/64 \simeq 0,48. \quad (5.54)$$

Le modèle, dû originellement à Euler, et reposant sur la fameuse *équation d'Euler - Bernoulli* (5.62), est présenté dans le problème 5.1. Il utilise diverses hypothèses, notamment, l'hypothèse  $d \ll h$  de poutre « élancée ». Ce problème s'inscrit ainsi dans la suite des problèmes 4.1, 5.1 et 8.2 évoquée dans l'introduction page 9...

Le phénomène étudié ici est bien d'une « *instabilité* » liée à une « *bifurcation* » : lorsque  $F > F_c$ , une configuration droite verticale de la poutre reste possible, mais cette configuration est instable vis-à-vis de perturbations infinitésimales, qui selon leur « orientation » vont faire flamber la poutre dans telle ou telle direction...

Un exemple de flambement de structures tri-dimensionnelles est présenté sur la figure D.5, dans le cadre de commentaires liés au problème 4.5, qui ne figurent que dans la version PDF de ce document.

15. On peut remarquer que l'estimation la plus triviale,  $G_0 = 1$ , que l'on aurait pu poser à la fin de l'analyse dimensionnelle, est pertinente!..

## 5.4 Problème

### Problème 5.1 *Étude de poutres en flexion plane - Modèle d'Euler - Bernoulli*

On étudie des *poutres élancées*, constituées d'un *matériau homogène élastique isotrope sollicité en régime linéaire*, de module d'Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ . Dans la configuration de référence, ces poutres sont droites : dans le repère cartésien  $Oxyz$ , leur fibre moyenne est définie par le segment

$$\{ M(x,0,0) \quad \text{avec} \quad x \in [0,L] \} . \quad (5.55)$$

Cette fibre moyenne est au *centre* des *sections droites* qui sont toutes identiques, i.e., se déduisent par translations dans la direction  $x$  de la section droite  $\Sigma_0$  située dans le plan  $x = 0$ . Par exemple, pour une poutre parallélépipédique

$$\Sigma_0 = \{ M(0,y,z) \quad \text{avec} \quad (y,z) \in [-h,h] \times [-e,e] \} , \quad (5.56)$$

et pour une poutre cylindrique à section circulaire

$$\Sigma_0 = \{ M(0,y,z) \quad \text{avec} \quad y^2 + z^2 \leq a^2 \} . \quad (5.57)$$

Plus généralement, on suppose toujours la propriété de symétrie

$$\iint_{\Sigma_0} yz \, dy \, dz = 0 . \quad (5.58)$$

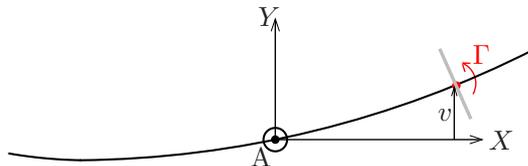
Notant  $R$  la valeur maximale de  $\|\overline{\mathbf{OM}}\|$  sur  $\Sigma_0$ , le caractère élancé de la poutre est défini par le fait que  $R \ll L$ . On néglige l'effet du poids propre de la poutre, que l'on peut considérer comme inclus dans la configuration de référence. On s'intéresse à la *statique* de telles poutres soumises à un *couple de flexion* perpendiculaire au plan  $xOy$ , et à d'éventuelles forces, en faisant l'hypothèse que les déplacements et déformations sont principalement dus au couple de flexion. Le couple appliqué sur une coupe virtuelle située en  $x = x_0$ , de la part de la partie avale de la poutre ( $x > x_0$ ), est donc

$$\overline{\mathbf{\Gamma}} = \Gamma \overline{\mathbf{e}}_z , \quad (5.59)$$

où  $\Gamma$  peut dépendre de  $x$ , mais de façon « lente » seulement, i.e., sur l'échelle  $L \gg R$ . Dans ce cadre, on peut faire une *étude locale* considérant  $\Gamma$  « uniforme » (partie I). On appliquera ensuite le modèle obtenu au *problème d'une poutre supportant une charge* (partie II) puis à celui du *flambement* (partie III).

#### I Étude locale d'une portion de poutre en flexion

On étudie une portion de longueur  $\ell$  dans la direction  $x$ , avec  $R \ll \ell \ll L$ , dans un nouveau repère  $AXYZ$  centré sur cette région, d'axes supposés, pour simplifier, parallèles aux axes  $xyz$ . La configuration de référence utilisée correspond à une fibre moyenne de la portion occupant le segment  $\{ A' = A + X\overline{\mathbf{e}}_x \quad \text{avec} \quad X \in [-\ell/2, \ell/2] \}$ . Dans cette portion, on peut considérer la poutre soumise à un couple  $\overline{\mathbf{\Gamma}} = \Gamma \overline{\mathbf{e}}_z$  uniforme, et repérer la fibre moyenne déformée par l'équation  $Y = v(X)$  où  $v$  est la « flèche locale », comme schématisé ci-dessous :



On a représenté la fibre moyenne et une section droite  $\Sigma$  centrée en  $A' = A + X\bar{\mathbf{e}}_x$ . La taille de cette section droite, son déplacement et sa rotation ont été exagérés. En  $\Sigma$ , on considère une coupe virtuelle de la poutre. On travaille en *petits déplacements, petite transformation*, donc, petite rotation, par rapport à la configuration de référence. La section  $\Sigma$  peut ainsi être considérée comme le résultat d'une translation appliquée à  $\Sigma_0$ .

**1** On veut vérifier qu'un tenseur des contraintes de la forme  $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \sigma_{xx}\bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_x = CY\bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_x$ , avec  $C$  une constante, permet de satisfaire les conditions globales au niveau de la coupe virtuelle, à condition d'ajuster la valeur de la constante  $C$ .

**1.a** Montrez que la force  $\bar{\mathbf{F}}$  appliquée au niveau de  $\Sigma$  par l'aval ( $X' > X$ ) sur l'amont, exprimée via une intégrale de surface impliquant ce tenseur des contraintes  $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$ , est effectivement nulle.

**1.b** Exprimez le couple  $\bar{\mathbf{\Gamma}}(A')$  appliqué au centre de  $\Sigma$  par l'aval ( $X' > X$ ) sur l'amont, par une intégrale de surface impliquant  $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$ . Montrez que  $\bar{\mathbf{\Gamma}}(A') = \Gamma \bar{\mathbf{e}}_z$  si et seulement si  $C = -\Gamma/I$  où  $I$  est un « *moment quadratique* » défini par une intégrale sur la surface  $\Sigma_0$ , toujours positive.

**1.c** Vérifiez l'homogénéité dimensionnelle de la formule intégrale obtenue pour  $I$ , par rapport à la relation  $I = -\Gamma/C$ .

**1.d** Calculez le moment quadratique  $I$  d'une poutre parallélépipédique de section définie par (5.56).

**1.e** Calculez le moment quadratique  $I$  d'une poutre cylindrique à section circulaire définie par (5.57).

**2** En utilisant les hypothèses faites sur le matériau, établissez l'expression intrinsèque du tenseur des déformations linéarisé dans cette portion de poutre.

**3** Montrez qu'un champ de déplacement de la forme

$$\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}) = \alpha XY \bar{\mathbf{e}}_x + (\beta X^2 + \gamma Y^2 + \delta Z^2) \bar{\mathbf{e}}_y + \epsilon YZ \bar{\mathbf{e}}_z \quad (5.60)$$

conduit au champ de déformations linéarisé précédent, à condition que les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et  $\epsilon$  prennent des valeurs précises, fonctions de  $C, E$  et  $\nu$ , que vous calculerez.

**4.a** Admettant qu'il n'est pas pertinent de rajouter un champ de moments à la solution (5.60), déduisez-en l'expression de la flèche  $v(X)$  mesurant le déplacement dans la direction  $Y$  de la fibre moyenne définie par  $Y = Z = 0$ . Vous montrerez que  $v$  ne dépend que de  $X, \Gamma, E$  et  $I$ .

**4.b** Dans le cas d'une poutre parallélépipédique, on a affaire à un problème très similaire à celui traité dans le problème 4.1, pour lequel des éléments de solution ont été donnés dans ce chapitre 5. Validez, par comparaison, la formule que vous avez établie pour la flèche  $v$ .

**4.c** En dérivant deux fois la formule établie en 4.a, afin d'obtenir une formule plus intrinsèque<sup>16</sup>, montrez l'*équation d'Euler - Bernoulli*

$$\frac{d^2v}{dX^2} = \frac{\Gamma}{K}, \quad (5.61)$$

avec  $K$  le *coefficient de rigidité en flexion*, fonction simple de  $E$  et  $I$  que vous explicitez. Interprétez physiquement cette équation, notamment, l'influence de chaque variable.

16. Indépendante d'une rotation éventuelle des axes  $XYZ$  par rapport aux axes  $xyz$ , qui pourrait exister en réalité.

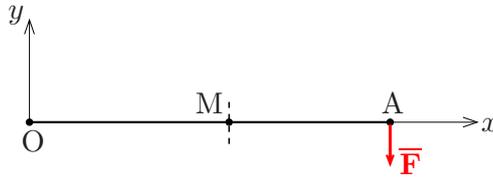
Quand on passe de cette étude locale à une *étude globale*, en remplaçant la coordonnée locale  $X$  par la coordonnée globale  $x$ , en définissant une flèche globale encore notée  $v$  de sorte que toute la fibre moyenne soit définie par  $y = v(x)$ , et en tolérant éventuellement un couple  $\Gamma$  lentement variable, on admet que l'*équation d'Euler - Bernoulli* reste valable :

$$\boxed{\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\Gamma(x)}{K}}. \quad (5.62)$$

En effet, en général, des translations et rotations permettent de passer de  $Oxyz$  à  $AXYZ$ , donc de  $v_{\text{globale}}$  à  $v_{\text{locale}}$ , et de telles transformations d'espace laissent invariante la dérivée seconde  $d^2v/dx^2$  qui s'apparente à la courbure de la poutre.

## II Étude globale d'une poutre supportant une charge

On étudie une poutre élancée, encastrée à son origine  $O$ , soumise à son extrémité  $A$  à une force  $\overline{\mathbf{F}} = -F\overline{\mathbf{e}}_y$  avec  $F > 0$ . La configuration de référence, dans laquelle  $\overline{\mathbf{OA}} = L\overline{\mathbf{e}}_x$ , est représentée ci-dessous, en figurant aussi  $\overline{\mathbf{F}}$ , même si elle n'est pas appliquée dans cette configuration :



On a représenté une coupe virtuelle en un point  $M$ , cf. infra. On admet que les déplacements, déformations et contraintes sont essentiellement dus à l'effet du couple de flexion  $\overline{\mathbf{\Gamma}}$  créé par  $\overline{\mathbf{F}}$ , calculé dans la configuration de référence. Ainsi, l'effet direct de  $\overline{\mathbf{F}}$ , en dehors de la création du couple  $\overline{\mathbf{\Gamma}}$ , est négligé.

**5** On imagine une coupe virtuelle de la poutre le long de la section droite centrée en  $M = O + x\overline{\mathbf{e}}_x$ . Calculez le couple  $\overline{\mathbf{\Gamma}}$  exercé en  $M$  par l'aval de la poutre sur l'amont, sachant que les efforts à prendre en compte sont la force  $\overline{\mathbf{F}}$  appliquée en  $A$  et un couple nul en  $A$ . Montrez que  $\overline{\mathbf{\Gamma}}$  dépend de façon affine de  $x$ ,  $\overline{\mathbf{\Gamma}} = \overline{\mathbf{\Gamma}}(x) = \Gamma(x)\overline{\mathbf{e}}_z$ . Représentez par des flèches courbes l'allure des couples  $\overline{\mathbf{\Gamma}}(x)$  le long de la fibre moyenne, dans le plan  $xOy$ , et commentez physiquement.

**6** Explicitez l'équation qui contrôle la flèche  $v(x)$ , et précisez sa nature mathématique. Résolvez la analytiquement compte tenu des conditions d'encastrement à l'origine.

**7** Calculez analytiquement la flèche maximale en valeur absolue  $v_{\text{max}}$ . Commentez physiquement.

**8.1** On considère le cas où la poutre est une *planche de plongeur* de longueur  $L = 3$  m, module d'Young  $E = 2,4$  GPa, et de section parallélépipédique de côtés  $h = 2,5$  cm,  $e = 40$  cm avec les notations de l'équation (5.56). Calculez numériquement le moment quadratique  $I$  et coefficient de rigidité en flexion  $K$ .

**8.2** Lorsque, de plus,  $F = 1$  kN, calculez numériquement la flèche maximale en valeur absolue  $v_{\text{max}}$ .

**8.3** Représentez soigneusement à l'échelle 1/20ème sur votre copie la fibre moyenne déformée et le champ de déplacement de celle-ci. Commentez physiquement.

**9** Donnez l'expression analytique du tenseur des contraintes puis du vecteur contrainte sur la coupe virtuelle considérée en question 5. Représentez ce dernier champ, sur la coupe virtuelle, et commentez physiquement.

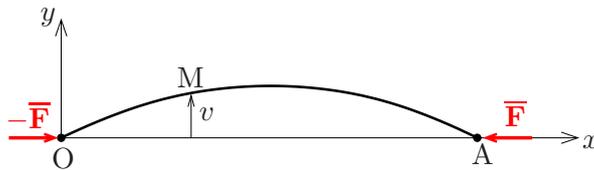
**10** On admet que le matériau polymère utilisé pour la planche de plongeur est élastique tant que, d'après le critère de Tresca, la contrainte tangentielle maximale

$$\tau_{\max} < \sigma_0 = 15 \text{ MPa} . \quad (5.63)$$

Déterminez analytiquement le lieu des points de la poutre - plongeur où la contrainte tangentielle est maximale, et donnez l'expression analytique de  $\tau_{\max}$ . Faites l'application numérique et concluez.

### III Étude globale d'une poutre en flambement : théorie d'Euler

On étudie une poutre positionnée entre une liaison rotule en O et une autre liaison rotule en A, la 1<sup>ère</sup> étant fixe, la 2<sup>ème</sup> solidaire d'une liaison glissière d'axe Ox, i.e., susceptible de se déplacer le long de cet axe. Une poutre de fibre moyenne initialement définie par l'équation (5.55), soumise à une force  $\bar{\mathbf{F}} = -F\bar{\mathbf{e}}_x$  en A (et à  $-\bar{\mathbf{F}}$  en O), peut « flamber » en adoptant par exemple la configuration représentée ci-dessous, où la flèche  $v(x)$  est positive :



On admet qu'en 1<sup>ère</sup> approximation la position de A est quasiment inchangée par rapport à la configuration de référence, i.e.  $A \simeq O + L\bar{\mathbf{e}}_x$ , et que le flambement est essentiellement dû au couple de flexion dû à la force  $\bar{\mathbf{F}}$ , estimé dans la configuration actuelle, sans considérer  $v$  infinitésimal.

**11** Calculez ce couple, soit  $\bar{\Gamma}$ , ramené au point  $M = O + x\bar{\mathbf{e}}_x + v\bar{\mathbf{e}}_y$  où l'on imagine une coupe virtuelle, sachant que les efforts à prendre en compte, exercés par l'aval ( $x' > x$ ) sur l'amont sont la force  $\bar{\mathbf{F}}$  appliquée en A et un couple nul en A,  $\bar{\Gamma}(A) = \bar{\mathbf{0}}$ .

**12.a** On admet que l'équation d'Euler - Bernoulli (5.62) est valable. Explicitez la et précisez sa nature mathématique.

**12.b** Montrez que cette équation ne peut admettre des solutions non nulles compatibles avec les conditions limites  $v(0) = 0$  et  $v(L) = 0$  que pour un ensemble de valeurs de  $F$  de la forme  $\{ F_n = n^2 F_1 \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \}$ , et calculez  $F_1$ . Proposez sur la base de ce modèle une expression analytique pour le seuil de flambement  $F_c$ , plus petite valeur de  $F$  à partir de laquelle ce flambement est possible.

**12.c** Dans le cas d'une poutre cylindrique à section circulaire définie par (5.57), établissez l'expression de  $F_c$  en fonction de  $E$ ,  $L^2$  et du diamètre  $d = 2a$  d'une section. Vérifiez la cohérence de cette expression avec celle donnée dans ce chapitre.

**13** Sur une coupe virtuelle effectuée au milieu ( $x = L/2$ ) d'une poutre « flambée » comme ci-dessus, représentez le champ de vecteurs contraintes exercés par l'aval sur l'amont. Expliquez la physique.

## 5.5 Notes personnelles

## Chapitre 6

# Bilan d'énergie cinétique - Cas des solides élastiques

Le but de la première section de ce chapitre est d'établir la forme générale du *bilan global d'énergie cinétique* dans un milieu continu. Dans la deuxième section on examine la forme prise par ce bilan, et sa signification physique, dans le cas de *solides élastiques*. Enfin un problème d'application et un problème d'ouverture sont présentés.

### 6.1 Bilan global d'énergie cinétique

On adopte ici une approche eulerienne, en partant de la loi locale d'évolution de la quantité de mouvement (3.41),

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} + \overline{\text{div } \bar{\boldsymbol{\sigma}}} . \quad (6.1)$$

Multiplions cette équation scalairement par le vecteur vitesse  $\bar{\mathbf{v}}$ . Il vient

$$\rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\rho}{2} \frac{d\bar{\mathbf{v}}^2}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + (\overline{\text{div } \bar{\boldsymbol{\sigma}}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} , \quad (6.2)$$

la démonstration de la première égalité faisant l'objet de l'exercice de calcul tensoriel 2.11. Introduisons la *densité massique d'énergie cinétique*

$$\boxed{e_c = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}^2} . \quad (6.3)$$

L'équation (6.2) s'écrit

$$\rho \frac{de_c}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + (\overline{\text{div } \bar{\boldsymbol{\sigma}}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} . \quad (6.4)$$

Intégrons cette équation sur un domaine matériel volumique  $\Omega_t$  sous-partie quelconque du milieu continu considéré. Il vient, en vertu de la formule globale impliquant une densité massique (3.17),

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{de_c}{dt} d^3x = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho e_c d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x + \iiint_{\Omega_t} (\overline{\text{div } \bar{\boldsymbol{\sigma}}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x ,$$

soit, en introduisant l'*énergie cinétique totale*

$$\boxed{E_c = \iiint_{\Omega_t} \rho e_c d^3x} , \quad (6.5)$$

l'équation

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x + \iiint_{\Omega_t} (\overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x . \quad (6.6)$$

Le premier terme dans le membre de droite de cette équation est la **puissance développée par les forces volumiques de pesanteur**. Le second terme peut, grâce à l'exercice de calcul tensoriel 2.7, être réécrit sous la forme

$$\iiint_{\Omega_t} (\overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \text{div}(\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) d^3x - \iiint_{\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\nabla} \bar{\mathbf{v}} d^3x . \quad (6.7)$$

En vertu de la formule intégrale de la divergence, on a

$$\iiint_{\Omega_t} \text{div}(\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) d^3x = \iint_{\partial\Omega_t} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S = \iint_{\partial\Omega_t} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d^2S = \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^2S \quad (6.8)$$

puisque  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  est symétrique, ce qui permet de faire apparaître le vecteur contrainte  $\bar{\mathbf{T}}$ . Ce terme est la **puissance développée par les forces surfaciques de contact** qui s'appliquent à la frontière  $\partial\Omega_t$  du domaine matériel  $\Omega_t$ . Au bilan on a donc, d'après (6.6),

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}} \quad (6.9)$$

où la **puissance développée par les efforts extérieurs**

$$\boxed{P_{\text{ext}} = \underbrace{\iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x}_{\text{puissance des forces de pesanteur}} + \underbrace{\iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^2S}_{\text{puissance des forces de contact}}}, \quad (6.10)$$

et la **puissance développée par les efforts intérieurs**

$$P_{\text{int}} = - \iiint_{\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\nabla} \bar{\mathbf{v}} d^3x . \quad (6.11)$$

Cette puissance peut se simplifier en utilisant la décomposition de  $\overline{\nabla} \bar{\mathbf{v}}$  en partie symétrique  $\overline{\mathbf{D}}$  (correspondant à la déformation instantanée) et antisymétrique  $\overline{\boldsymbol{\omega}}$  (correspondant à la rotation instantanée), suivant ce qui a déjà été évoqué dans la section 2.1.9,

$$\overline{\nabla} \bar{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{D}} + \overline{\boldsymbol{\omega}} . \quad (6.12)$$

Comme  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  est symétrique tandis que  $\overline{\boldsymbol{\omega}}$  est antisymétrique, on a en composantes dans une base

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\omega}} = \sigma_{ij} \omega_{ji} = \sigma_{ji} \omega_{ij} = -\sigma_{ij} \omega_{ji} .$$

Un nombre égal à son opposé est nul, donc

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\omega}} = 0 . \quad (6.13)$$

Ainsi la puissance développée par les efforts intérieurs

$$\boxed{P_{\text{int}} = - \iiint_{\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\mathbf{D}} d^3x} . \quad (6.14)$$

## 6.2 Cas d'un milieu continu solide

### 6.2.1 Bilan d'énergie cinétique en petits déplacements et petite transformation

Considérons un *milieu continu solide* dans l'hypothèse de *petits déplacements* et *petite transformation*. Ceci permet de confondre en première approximation les positions initiale  $\bar{\mathbf{X}}$  et actuelle  $\bar{\mathbf{x}}$  des points matériels constituant le milieu<sup>1</sup>, les éléments de volume  $d^3X$  et  $d^3x$ , de surface  $d^2S$  initial et actuel, enfin les positions initiale  $\Omega_0$  et actuelle  $\Omega_t$  du domaine matériel. Notons donc simplement  $\Omega$  ce domaine matériel. D'après les résultats de la section précédente on a

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}} \quad (6.15)$$

avec la *puissance développée par les efforts extérieurs*

$$\boxed{P_{\text{ext}} = \underbrace{\iiint_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3X}_{\text{puissance des forces de pesanteur}} + \underbrace{\iint_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^2S}_{\text{puissance des forces de contact}}}, \quad (6.16)$$

et la *puissance développée par les efforts intérieurs*

$$P_{\text{int}} = - \iiint_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\mathbf{D}}_L d^3X. \quad (6.17)$$

Dans cette expression on a remplacé le tenseur eulerien

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \left( \bar{\nabla}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{v}} + \bar{\nabla}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{v}}^T \right)$$

impliqué dans (6.14) par son expression lagrangienne équivalente à cause des hypothèses de petits déplacements et petite transformation,

$$\bar{\mathbf{D}}_L = \frac{1}{2} \left( \bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{V}} + \bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{V}}^T \right). \quad (6.18)$$

Cette équivalence résulte de celle entre  $\bar{\nabla}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{v}}$  et  $\bar{\nabla}_{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{V}}$ , qui a été établie dans la section 2.1.7. Or, d'après la cinématique lagrangienne<sup>2</sup>, en faisant des hypothèses de régularité raisonnables qui permettent de faire commuter les dérivées spatiales et temporelle, on a

$$\bar{\nabla}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{v}} = \bar{\nabla}_{\mathbf{x}} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla}_{\mathbf{x}} \bar{\Phi} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{F}}.$$

À l'aide de l'équation cinématique (2.37), on obtient

$$\bar{\nabla}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{u}},$$

d'où, par injection dans (6.18),

$$\bar{\mathbf{D}}_L = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{\nabla}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla}_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{u}}^T \right) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \text{ noté aussi } \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}. \quad (6.19)$$

Cette formule pourrait aussi se déduire de la formule (2.85).

Finalement on obtient, par insertion de (6.19) dans (6.17), que la puissance des efforts intérieurs

$$\boxed{P_{\text{int}} = - \iiint_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} d^3X}. \quad (6.20)$$

1. Sans pour autant considérer que le champ de déplacement  $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{x}}$  est nul.

2. Plus précisément on peut citer les équations (1.19) et (2.3).

### 6.2.2 Cas d'un solide isotrope élastique en régime linéaire

Si le solide étudié est *isotrope élastique en régime linéaire*, on peut utiliser la loi de Hooke (4.37) pour évaluer l'intégrand dans l'expression (6.20) de la puissance des efforts intérieurs. Il vient

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} = \lambda (\text{tr} \overline{\boldsymbol{\epsilon}}) \overline{\mathbf{1}} : \dot{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} + 2\mu \overline{\boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} = \lambda (\text{tr} \overline{\boldsymbol{\epsilon}}) (\text{tr} \dot{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}}) + 2\mu \overline{\boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\epsilon}} \right) \quad (6.21)$$

puisque

$$\boxed{\frac{1}{2} \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\lambda}{2} (\text{tr} \overline{\boldsymbol{\epsilon}})^2 + \mu \overline{\boldsymbol{\epsilon}} : \overline{\boldsymbol{\epsilon}}}. \quad (6.22)$$

Cette dernière quantité, qui vaut en composantes dans une base

$$\frac{1}{2} \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\lambda}{2} (\epsilon_{ii})^2 + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ji} = \frac{\lambda}{2} (\epsilon_{ii})^2 + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}, \quad (6.23)$$

est toujours positive<sup>3</sup>. Elle peut être vue comme une *densité volumique d'énergie potentielle élastique*. En effet, si on introduit l'*énergie potentielle élastique totale*

$$\boxed{E_p = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\epsilon}} d^3X}, \quad (6.24)$$

il vient que la puissance des efforts intérieurs

$$P_{\text{int}} = - \iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\epsilon}} \right) d^3X = - \frac{dE_p}{dt} \quad (6.25)$$

compte tenu de l'hypothèse des petits déplacements, qui permet de considérer que  $\Omega$  est fixe, donc de sortir la dérivée temporelle devant l'intégrale. Notez aussi qu'à cause de l'intégration spatiale, la quantité globale  $E_p$  n'est fonction que du temps<sup>4</sup>, la dérivée partielle par rapport au temps correspond bien à une dérivée totale par rapport au temps. La loi générale (6.15) devient alors une *loi d'évolution de l'énergie totale*

$$\boxed{E_{\text{tot}} = E_c + E_p}, \quad (6.26)$$

à savoir

$$\boxed{\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = P_{\text{ext}}}. \quad (6.27)$$

Dans le cas d'un système isolé, sur lequel on n'applique aucun effort extérieur, cette loi d'évolution devient une loi de *conservation*,

$$P_{\text{ext}} = 0 \implies \frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = 0 \iff E_{\text{tot}} \text{ ne dépend pas du temps.} \quad (6.28)$$

Pour cette raison on dit que les solides élastiques constituent des *systèmes conservatifs*. Cette propriété est liée au caractère *réversible* de la dynamique des solides élastiques en régime linéaire, déjà mentionné en section 4.1.1. Une conséquence physique de la loi (6.28) est l'existence de *mouvements oscillants* dans un solide élastique isolé, mouvements dans lesquels on a, de

3. Puisque  $\lambda$  et  $\mu$  sont strictement positifs, et les facteurs de  $\lambda/2$  et  $\mu$  sont respectivement un carré et une somme de carrés.

4. Ce n'est pas un « champ » contrairement à  $\overline{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$  qui est un champ scalaire !

façon périodique dans le temps, transformation d'énergie cinétique en énergie potentielle, puis d'énergie potentielle en énergie cinétique, etc... Un prototype de tels mouvements oscillants a déjà été rencontré en classes préparatoires : il s'agit des mouvements oscillants d'un ressort linéaire. Un exemple plus sophistiqué est donné par celui des *ondes élastiques*, étudié dans le problème 4.8. Plus généralement, étant donné une structure solide élastique, on montre en général l'existence de *modes de vibrations* de cette structure. C'est l'objet de la « *dynamique des structures* » que

- de développer des méthodes de calcul de ces modes de vibrations, afin de les contrôler (au sens large) et de s'assurer qu'ils sont sans danger ;
- de développer des méthodes de caractérisation de ces modes de vibrations, afin d'être capable de les « mesurer ».

En élasticité pure, ces mouvements oscillants durent « éternellement ». En pratique, dans tout système réel, existent de légers phénomènes *dissipatifs*, qui modifient le bilan (6.27) en rajoutant justement un terme de dissipation strictement négatif,

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = P_{\text{ext}} - P_{\text{diss}} \quad \text{avec} \quad P_{\text{diss}} > 0 . \quad (6.29)$$

En conséquence dans un système isolé l'énergie totale décroît au cours du temps, ce qui signifie que les mouvements oscillants sont amortis et finissent par disparaître. On verra dans le chapitre qui suit un exemple simple de phénomènes dissipatifs dans le cas de milieux continus *fluides*. Décrire les phénomènes dissipatifs « réels » que l'on vient d'évoquer dans un milieu réputé « solide » est par contre assez ardu, puisque cela nécessite typiquement de développer la *théorie des milieux viscoélastiques*, qui dépasse largement le cadre de ce cours.

### 6.2.3 Remarques de conclusion

Il conviendrait d'étendre ces bilans d'énergie cinétique en introduisant l'*énergie interne* (ou chaleur), ainsi que l'*énergie totale*, somme des énergies cinétique et interne, et en écrivant les bilans correspondant. Cette extension, qui déborde largement le cadre de ce cours, est néanmoins partiellement abordée dans le problème 6.2. Voyez aussi le cours de Barrat (2012) ; on pourra enfin se reporter, par exemple, aux chapitres 8 et 9 de Forest & Amestoy (2020).

Enfin, le lecteur doit être conscient que l'approche « énergétique » esquissée ici peut être considérablement étendue, pour donner lieu à des approches de type « puissances virtuelles » qui trouvent de nombreuses applications en mécanique des solides théorique et numérique. Ce type d'approche est par exemple présenté dans Salençon (1996).

## 6.3 Problèmes

Le problème 6.1, assez élémentaire jusqu'à la question 1.7, est l'occasion de réfléchir à un *essai de compression d'un matériau solide élastique*, puis d'ouvrir sur de la *géomécanique*. Le problème 6.2, comme évoqué ci-dessus, propose une introduction très partielle aux *comportements thermoélastiques*.

**Problème 6.1** *Étude d'un lopin cylindrique en compression dans un conteneur rigide*

On considère un lopin cylindrique constitué d'un matériau solide isotrope élastique. Il est déposé dans un conteneur réputé indéformable, comme présenté sur la figure 6.1. Les parois de ce conteneur sont parfaitement lisses de sorte qu'elles n'introduisent pas de forces de frottement sur le matériau. Dans le repère  $Oxyz$ , et les coordonnées cylindriques associées  $(r, \theta, z)$ , le conteneur possède une extension latérale définie par le rayon cylindrique  $a$ . Un plateau supérieur situé en  $z = h$ , réputé indéformable, est solidaire d'une presse; il vient écraser le lopin.

**1** Dans cette partie on considère le début d'un essai de compression. À  $t = 0$ , on a  $a = \text{rayon}$ ,  $h = h_0 = \text{hauteur du lopin supportant seulement le poids du plateau supérieur}$ , sur lequel aucune autre force n'est appliquée. On choisit cette configuration initiale comme la configuration de référence. On commence alors à faire descendre le plateau supérieur, grâce à la presse, à la vitesse de descente constante  $V > 0$ .

**1.1** Donnez, d'après l'hypothèse cinématique précédente, l'expression au cours du temps de la position verticale du plateau supérieur,

$$z = h(t) = ?$$

**1.2** On cherche une solution en déplacement de ce problème. On fait l'hypothèse très simple que le champ de déplacement est de la forme

$$\bar{\mathbf{u}} = (A + BZ)\bar{\mathbf{e}}_z .$$

Comment pourrait-on justifier cette hypothèse? Que valent  $A$  et  $B$ ?

**1.3** À quelle condition est-on en petit déplacements? On se place désormais dans cette hypothèse.

**1.4** Calculez le gradient du champ de déplacement; vous en donnerez une expression intrinsèque. Que peut-on dire de la transformation associée à ce mouvement?

**1.5** Grâce à une hypothèse physique raisonnable, calculez le tenseur des contraintes. Vous en donnerez une expression intrinsèque, et tracerez la représentation de Mohr correspondante. Comment s'interprète t'elle physiquement? À quoi pourrait-elle servir?

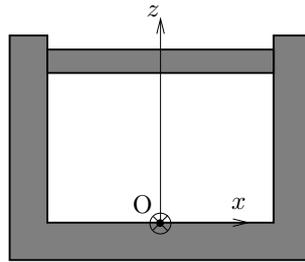
**1.6** Quelle force faut-il exercer sur la presse pour la faire descendre?

**1.7** Quelle est l'énergie potentielle élastique stockée entre l'instant initial et l'instant actuel  $t$ ? Vérifiez la loi d'évolution de l'énergie totale (6.27).

**2** On imagine maintenant qu'à  $t = t_1$  petit on interrompt brutalement la compression en remontant très rapidement le plateau supérieur. Ainsi la surface supérieur du lopin se retrouve à  $t = t_1$  en contact avec l'atmosphère. Décrivez qualitativement le mouvement du lopin pour  $t > t_1$ .

**Complément**

D'un point de vue *géométrique*, l'essai du problème 6.1 ressemble à des essais dits *œdométriques* utilisés en *mécanique des sols*, pour des matériaux peu cohésifs ne pouvant donc pas être disposés dans une machine de traction. Ce type d'essai représenté sur la figure 6.2 permet notamment de caractériser le *tassement* des sols, c'est-à-dire leur déformation verticale, sous l'effet

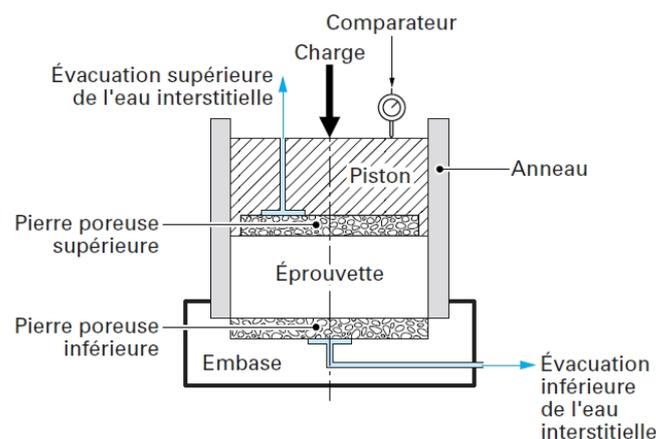


**Fig. 6.1** – Schéma géométrique en coupe d'un système d'*essai de compression dans un conteneur rigide*. Le conteneur et le plateau-presse supérieur sont représentés en grisé; le lopin est contenu dans la zone rectangle branche centrale.

d'une surcharge, par exemple lors de la construction d'un bâtiment ou d'un ouvrage d'art, lors de l'édification d'un remblai pour la construction d'une route, etc... Les sols étant généralement granulaires (c'est-à-dire composés de grains plus ou moins « solidaires » les uns des autres) et saturés en eau, leur tassement est dû au réarrangement des grains (qui se réorganisent selon une configuration plus dense) et à l'expulsion de l'eau interstitielle. Souvent, l'eau ne peut sortir que très lentement et le tassement se fait sur des durées pouvant être extrêmement longues, jusqu'à plusieurs années. Pour le géotechnicien, il est essentiel de pouvoir prévoir à la fois l'amplitude du tassement (de combien un bâtiment va-t-il « s'enfoncer » dans le sol sur lequel il est construit?) et sa durée (combien de temps faudra-t-il attendre avant que « l'enfoncement » se stabilise?).

D'un point de vue *mécanique*, l'essai œdométrique diffère grandement de l'essai de compression décrit dans le problème 6.1 puisque le tassement des sols n'est pas élastique, mais au contraire *irréversible* et *dépendant du temps* : on parle alors de *comportement visco-plastique*.

Ces problèmes de mécanique des sols seront abordés dans le département Géoingénierie en général, et plus particulièrement dans le module *Sols et Formations superficielles*, donné par Yann Gunzburger.



**Fig. 6.2** – Schéma de principe d'un *essai œdométrique* (Magnan 2000). Afin de permettre l'expulsion de l'eau contenue dans l'échantillon de sol, les bases supérieure et inférieure sont poreuses. Le comparateur mesure le déplacement vers le bas de la plaque supérieure sous l'effet de la charge appliquée. La présence de l'anneau latéral rigide rend compte du fait que les mouvements sont essentiellement verticaux dans la nature, les déplacements horizontaux étant fortement limités par la présence de sol autour de la zone étudiée.

**Problème 6.2**

*Thermoélasticité - Application à un tuyau sous pression et chargement thermique*

**Première partie : Thermoélasticité générale**

On s'intéresse dans tout ce problème à des matériaux *solides élastiques isotropes*, en *petits déplacements* et *petite transformation*. On néglige les effets de la pesanteur ou les suppose inclus dans la configuration de référence initiale. Cette configuration initiale est supposée *isotherme*, i.e., le champ de *température*  $T$  est uniforme,  $T = T_0$ . Au contraire, la configuration actuelle, supposée *à l'équilibre* elle aussi, est en général *anisotherme*, caractérisée par des *écarts de température*

$$\delta T(\bar{\mathbf{x}}) = T(\bar{\mathbf{x}}) - T_0$$

non uniformément nuls, avec  $\bar{\mathbf{x}}$  la position actuelle, approximativement confondue avec la position initiale  $\bar{\mathbf{X}}$ .

On admet que la *loi de comportement thermoélastique* s'écrit en additionnant aux expressions élastiques des tenseurs des termes sphériques proportionnels à  $\delta T$ , ce qui donne, pour le *tenseur des déformations linéarisé*

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}) \bar{\bar{\mathbf{1}}} + \alpha \delta T \bar{\bar{\mathbf{1}}}, \quad (6.30)$$

et pour le *tenseur des contraintes de Cauchy*

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \lambda (\text{tr} \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}) \bar{\bar{\mathbf{1}}} + 2\mu \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} - k \delta T \bar{\bar{\mathbf{1}}}, \quad (6.31)$$

avec les coefficients caractéristiques du matériau suivants, tous positifs, dont les 4 premiers sont déjà connus et reliés entre eux comme dans le cours :  $\nu$  le *coefficient de Poisson*,  $E$  le *module d'Young*,  $\lambda$  et  $\mu$  les *coefficients de Lamé*,  $\alpha$  le *coefficient de dilatation thermique*,  $k$  le *module thermoélastique*.

**1** On imagine une situation où un *solide libre* de toute contrainte, tel que  $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \bar{\bar{\mathbf{0}}}$  dans les configurations initiale et actuelle, est *chauffé* de façon *uniforme* : on passe de  $\delta T = 0$  dans la configuration initiale à  $\delta T > 0$  dans la configuration actuelle.

**1.1** À partir, notamment, de formules tirées du cours de cinématique, montrez que l'on a bien une dilatation thermique de segments et volumes de taille infinitésimale, respectivement  $dX$  et  $d^3X$ , que vous quantifierez précisément. Pour cela, calculez les dilatations réduites, respectivement  $(dx - dX)/dX$  et  $(d^3x - d^3X)/d^3X$ , avec  $dx$  et  $d^3x$  les tailles finales, en fonction des données du problème. Commentez succinctement le nom donné au coefficient  $\alpha$ .

**1.2** Déterminez le *champ de déplacement*  $\bar{\mathbf{u}}$ , de façon idéalement (ou en tout cas finalement) intrinsèque, à un champ de moments prêt. Montrez que si ce dernier champ est bien choisi, le mouvement associé, i.e., la fonction  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{X}})$ , a une interprétation géométrique très simple. Déduisez-en que les dilatations réduites de segments et volumes de taille finie sont identiques à celles de segments et volumes de taille infinitésimale. Commentez succinctement.

**1.3** En exploitant l'hypothèse de contraintes nulles, reliez le module thermoélastique  $k$  aux coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\alpha$ .

Commentez succinctement cette relation, valable généralement en thermoélasticité, et ce qu'elle signifie pour les contraintes d'origine thermique en  $k \delta T$  dans l'équation (6.31).

2 On revient maintenant à un cas plus *général* comme décrit avant la question 1. Notamment, les champs  $T$  et  $\delta T$  sont dans la configuration actuelle *non uniformes*. En utilisant des résultats du cours, sans refaire les calculs pour ce qui est des termes liés au déplacement, donnez la nouvelle forme de l'*équation de Navier*, ici, l'équation d'équilibre local du solide, faisant intervenir  $\overline{\text{rot}}\mathbf{u}$  et  $\delta T$  ou  $T$ .

Interprétez physiquement le nouveau terme d'origine thermique, dépendant linéairement de  $T$ , de cette équation.

## §

**Deuxième partie : Tuyau sous pression et chargement thermique**

On revisite au moins dans ses principes l'étude de dimensionnement d'un *tuyau du circuit primaire d'une centrale nucléaire* réalisée dans le problème 4.4. Ce tuyau long, de rayon intérieur  $a$ , extérieur  $b$ , est constitué d'un acier travaillant dans toutes les conditions posées dans la première partie du sujet. On utilise un repère cartésien  $Oxyz$  avec  $Oz$  l'axe de révolution du tuyau ; dans ce repère les coordonnées cylindriques sont notées  $(r, \theta, z)$ , la base locale associée  $\{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\}$ . Dans le problème 4.4, posé *sans aucun effet thermique*, le tuyau était soumis à la seule *surpression*  $\delta p$  due à l'eau. On rappelle ses principaux résultats : dans le tuyau, le *champ de déplacement* était

$$\bar{\mathbf{u}} = u(r) \bar{\mathbf{e}}_r \quad (6.32)$$

avec

$$u(r) = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{\delta p}{\lambda + \mu} r + \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{\delta p}{\mu} \frac{1}{r} ; \quad (6.33)$$

la *contrainte tangentielle maximale* au rayon  $r$  était

$$\tau_{\max}(r) = \frac{a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2} \delta p ; \quad (6.34)$$

le *critère de dimensionnement*

$$\forall r, \quad \tau_{\max}(r) < \tau_0 \quad (6.35)$$

conduisait à la *valeur minimale du rayon extérieur*

$$b = \frac{a}{\sqrt{1 - \delta p / \tau_0}} ; \quad (6.36)$$

une application numérique avec  $a = 35$  cm,  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0,28$ ,  $\tau_0 = 63,75$  MPa avait enfin donné  $b = 40,2$  cm.

On veut maintenant prendre en compte les *effets thermiques* : entre la configuration initiale du réacteur à l'arrêt où l'eau intérieure au tuyau et l'air ambiant étaient à pression  $p_0 = 1$  bar, température  $T_0 = 30^\circ\text{C}$ , et la configuration actuelle en fonctionnement, l'eau est non seulement passée à  $p = 155$  bars mais a aussi été *chauffée*<sup>5</sup> à  $T = 290^\circ\text{C}$ , tandis que l'air extérieur dans le bâtiment réacteur est resté à  $p_0, T_0$ .

---

5. Par les réactions nucléaires !

**3.1** Afin de préparer l'étude du nouvel état d'équilibre thermoélastique du tuyau, représentez schématiquement dans le plan  $xOy$  ses configurations initiale et actuelle, en coupe, ainsi que les conditions limites concernant les pressions, vecteurs contraintes et températures. On vous demande d'écrire les valeurs des couples (pression, température) dans les milieux environnant le tuyau, et une représentation schématique du champ de vecteurs contraintes sur les frontières du tuyau.

Comme on travaille en différence entre ces deux configurations, représentez aussi, sur des schémas similaires, les configurations initiale non chargée et actuelle chargée suivant cette approche, ainsi que les conditions limites concernant les écarts de pressions, vecteurs contraintes et écarts de températures.

Précisez les valeurs numériques de la *surpression*  $\delta p$  et de l'*écart de température intérieur final*  $\delta T_i$ .

**3.2** Compte tenu de l'interprétation donnée plus haut du nouveau terme thermique dans l'équation de Navier, conjecturez les conséquences physiques de la prise en compte du chargement thermique en plus du chargement mécanique.

**4** On suppose que le *champ d'écart de température* qui résulte de l'équilibre thermique du système complet est, dans le tuyau, de la forme  $\delta T(r) = \beta - \gamma r$ . Calculez  $\beta$  et  $\gamma$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\delta T_i$ . Représentez schématiquement la fonction  $\delta T(r)$ .

**5.1** On suppose que le *champ de déplacement*  $\bar{\mathbf{u}}$  dans le tuyau est toujours de la forme (6.32), mais avec une fonction  $u(r)$  à recalculer. Rappelez l'expression intrinsèque de  $\overline{\nabla \bar{\mathbf{u}}}$  et expliquez, sans faire plus de calcul, pourquoi  $\overline{\text{rot} \bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{0}}$ .

**5.2** Explicitez l'*équation de Navier* qui exprime la condition locale d'*équilibre thermoélastique du tuyau*. Montrez que la fonction  $u(r)$  est de la forme

$$u(r) = Ar + B/r - Cr^n \quad (6.37)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes pour l'instant inconnues, tandis que la constante  $C$  d'origine thermique est connue,  $n$  est un exposant entier dont vous préciserez la valeur.

Donnez l'expression analytique la plus explicite possible de  $C$ , faisant intervenir  $\alpha$  et  $\delta T_i$ . Vérifiez l'homogénéité dimensionnelle de  $C$ , en notant  $T$  la fonction de dimension d'une température.

**6.1** Donnez l'expression intrinsèque de  $\overline{\nabla \bar{\mathbf{u}}}$  puis du *tenseur des déformations linéarisé*  $\bar{\bar{\epsilon}}$  en fonction des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et de  $r$ . Donnez aussi la matrice  $[\epsilon] = \text{Mat}(\bar{\bar{\epsilon}}, \{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\})$ .

**6.2** Calculez  $\text{tr} \bar{\bar{\epsilon}}$ . La valeur trouvée, pas encore totalement déterminée puisqu'elle implique l'inconnue  $A$ , est elle surprenante, au vu des calculs effectués au niveau de la question 5.2?

**7** Donnez la forme de la matrice  $[\sigma] = \text{Mat}(\bar{\bar{\sigma}}, \{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\})$  du *tenseur des contraintes de Cauchy*  $\bar{\bar{\sigma}}$  dans le tuyau : montrez que plusieurs de ses composantes sont nulles a priori. Calculez précisément ses composantes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$  en fonction des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , des variables thermiques  $\beta$ ,  $\gamma$ , des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ , du module thermoélastique  $k$  et de  $r$ .

**8** Rappelez ce qu'il faudrait faire pour déterminer  $A$  et  $B$ , sans toutefois faire ce calcul.

On rappelle que dans le *cas isotherme* les valeurs de  $A$  et  $B$ , notées alors  $A_{\text{iso}}$  et  $B_{\text{iso}}$ , ont été calculées en TD,

$$A_{\text{iso}} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{\delta p}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad B_{\text{iso}} = \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{\delta p}{\mu}. \quad (6.38)$$

**9.1** Pour estimer l'importance des *effets thermiques*, on sépare, dans l'expression générale de  $\sigma_{\theta\theta}$  établie en question 7, une somme  $\sigma_{\text{élast}}$  d'origine élastique, contenant des termes proportionnels à  $A$  et  $B$ , d'une autre somme  $\sigma_{\text{therm}}$  ne contenant que des termes d'origine thermique. Identifiez  $\sigma_{\text{élast}}$  et  $\sigma_{\text{therm}}$ . Montrez que  $\sigma_{\text{therm}}$  est d'un signe uniforme.

**9.2** Dans le cas correspondant aux valeurs données après l'équation (6.36), sachant aussi que l'acier utilisé a un coefficient de dilatation thermique  $\alpha = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , estimez l'ordre de grandeur maximal de  $\sigma_{\text{élast}}$  et  $\sigma_{\text{therm}}$  lorsque  $r$  varie dans  $[a, b]$ . Pour ce qui est de  $\sigma_{\text{élast}}$ , on admet que l'on peut remplacer  $A$  et  $B$  par  $A_{\text{iso}}$  et  $B_{\text{iso}}$ . Discriminez finalement entre ces deux possibilités :

- la 1<sup>ère</sup> : les effets thermiques sont négligeables et n'ont pas à être considérés pour le dimensionnement ;
- la 2<sup>ème</sup> : les effets thermiques sont importants et doivent être considérés pour le dimensionnement.

## 6.4 Notes personnelles



# Chapitre 7

## Fluides newtoniens

Considérons un *fluide* en mouvement, en *description eulerienne* parce qu'elle est plus naturelle<sup>1</sup>. En effet, si on considère par exemple l'écoulement d'une rivière autour des piles d'un pont<sup>2</sup>, il semble difficile de pouvoir définir une configuration de référence initiale et surtout de suivre le mouvement des particules fluides tout au long du temps : cela impliquerait de constamment remonter par la pensée de plus en plus loin en amont du pont pour « attraper » à l'instant de référence  $t_0$  les particules fluides qui vont se trouver à l'instant  $t$  au niveau du pont. Si on considère un écoulement d'air dans une soufflerie, le peu de pertinence de l'approche lagrangienne devient encore plus évident : quel serait l'intérêt d'aller imaginer à un instant  $t_0$  lointain des particules fluides situées dans la pièce contenant la ventilation d'entrée de la soufflerie, avant qu'elles ne soient aspirées par cette ventilation ?...

Dans la section 7.1, après un bref retour en arrière sur la cinématique des fluides, nous allons reprendre les bilans de masse et de quantité de mouvement en description eulerienne pour un fluide. La loi de comportement des *fluides newtoniens* sera établie dans la section 7.2. On en déduira la forme prise par l'équation locale d'évolution de la quantité de mouvement dans la section 7.3. La loi de la statique des fluides (7.52) sera vue comme un cas particulier de cette loi ; en amphi on la présentera d'une autre manière, plus directe<sup>3</sup>. Les propriétés des équilibres et écoulements de *fluides parfaits*, fluides newtoniens de viscosité nulle, seront établies dans la section 7.4. Quelques propriétés des écoulements des *fluides newtoniens* seront ensuite décrites dans la section 7.5, avant de conclure et proposer exercices et problèmes.

### 7.1 Bilans de masse et de quantité de mouvement

#### 7.1.1 Retour sur la formule de transport d'une quantité extensive

On revient ici sur la formule cinématique de transport d'une quantité extensive  $C$  définie par une densité volumique  $c = c(\bar{\mathbf{x}}, t)$ ,

$$C(t) = \iiint_{\Omega_t} c \, d^3x, \quad (7.1)$$

---

1. Comme on l'a déjà mentionné en section 1.2.

2. Le même raisonnement peut être fait pour un écoulement d'air autour d'un gratte-ciel ou d'un avion.

3. Voyez aussi la discussion autour de l'équation (7.30).

avec  $\Omega_t$  le domaine fluide considéré, souvent, une sous-partie du domaine fluide total, que l'on appelle « volume de contrôle »<sup>4</sup>. On rappelle ici cette formule (3.9),

$$\boxed{\frac{dC}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c\bar{\mathbf{v}}) \right] d^3x = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} c \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S}, \quad (7.2)$$

avec  $\bar{\mathbf{n}}$  est le vecteur unitaire normal sortant de  $\Omega_t$ . Afin de préciser l'interprétation physique de la formule (7.2), que nous avons seulement esquissée à la fin de la section 3.1.1, considérons le cas, courant en mécanique des fluides, d'un domaine  $\Omega_t$  **tube de courant** tel que sa frontière  $\partial\Omega_t$  se décompose en

- une surface d'entrée  $S_e$  sur laquelle  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} < 0$ ,
- une surface de sortie  $S_s$  sur laquelle  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} > 0$ ,
- une surface latérale (par exemple une paroi solide)  $S_\ell$  sur laquelle  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$ ,

Une telle situation est représentée sur la figure 7.1. On peut alors récrire le bilan (7.2) sous la forme

$$\boxed{\tau_{\text{évolution}} = \frac{dC}{dt} = \tau_{\text{accumulation}} + \tau_{\text{gain en sortie}} - \tau_{\text{perte en entrée}}}, \quad (7.3)$$

avec le *taux d'accumulation* (s'il est positif, sinon, c'est un *taux de diminution*)

$$\tau_{\text{accumulation}} = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x, \quad (7.4)$$

le *taux de gain en sortie* (en supposant que  $c$  est une quantité positive)

$$\tau_{\text{gain en sortie}} = \iint_{S_s} c \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S \quad (7.5)$$

et le *taux de perte en entrée*

$$\tau_{\text{perte en entrée}} = \iint_{S_e} c (-\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S. \quad (7.6)$$

Ces taux se simplifient dans le cas où on suppose que  $c$  est uniforme en entrée et sortie,

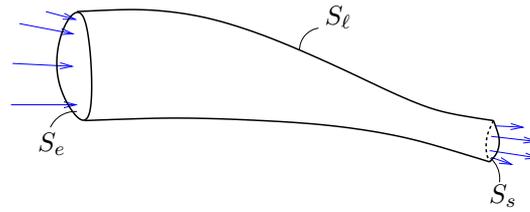
$$\tau_{\text{gain en sortie}} = c_s q_s \quad \text{avec} \quad q_s = \iint_{S_s} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S = \text{débit volumique sortant}, \quad (7.7)$$

$$\tau_{\text{perte en entrée}} = c_e q_e \quad \text{avec} \quad q_e = \iint_{S_e} (-\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S = \text{débit volumique entrant}. \quad (7.8)$$

Le bilan (7.3) s'interprète ainsi : le taux temporel global d'évolution de la quantité  $C$  du fluide contenu dans  $\Omega_t$ , en suivant ce fluide dans son mouvement, soit  $\tau_{\text{évolution}}$ , est la somme

- du taux temporel de variation de  $C$  dans  $\Omega_t$  dû à d'éventuelles instationnarités ( $c$  dépend effectivement du temps), soit  $\tau_{\text{accumulation}}$ ,

4. Ce volume « dépend du temps », d'où l'indice  $t$ , car pour calculer  $dC/dt$  on tient compte du transport de  $\Omega_t$  dans l'écoulement, mais d'un autre point de vue il est « fixe » au sens où à tout instant  $t$  on définit  $C(t)$  par la formule (7.1) avec toujours le même  $\Omega_t$ , et sa dérivée par le terme de droite de la formule (7.2) avec toujours les mêmes  $\Omega_t$  et  $\partial\Omega_t$ . Autrement dit, on « actualise » à tout instant la matière contenue dans  $\Omega_t$  ... de même qu'en description eulerienne on « actualise » à tout instant la matière contenue dans le « point matériel » situé en un point  $\bar{\mathbf{x}}$  de l'espace, pour calculer la vitesse  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = d\bar{\mathbf{x}}/dt$ .



**Fig. 7.1** – Représentation schématique d'un domaine matériel constituant un « *tube de courant* ». Les flèches représentent des vecteurs vitesses.

- du taux temporel de gain de  $C$  en sortie, puisque dans l'écoulement on gagne du volume en sortie, soit  $\tau_{\text{gain}}$  en sortie ,
- de l'opposé du taux temporel de perte de  $C$  en entrée, puisque dans l'écoulement on perd du volume en entrée, soit  $\tau_{\text{perte}}$  en entrée .

La valeur du taux d'évolution de la quantité  $C$ , que la cinématique nous permet d'explicitier avec la formule (7.3), sera finalement donnée par la physique. Par exemple, si  $C$  est la masse, par conservation de la masse,

$$\tau_{\text{évolution}} = \frac{dm}{dt} = 0 ,$$

si  $C$  est la quantité de mouvement, par la loi de Newton,

$$\bar{\tau}_{\text{évolution}} = \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \bar{\mathbf{R}}_{\text{ext}} = \text{somme des forces extérieures appliquées.}$$

Il est donc temps de passer de la cinématique à la physique des fluides !..

### 7.1.2 Transport de masse : notions de débits - incompressibilité

Une première forme de la *loi de conservation de la masse* est donnée par un bilan global effectué sur un domaine matériel volumique  $\Omega_t$ . Suivant la formule (7.2), le fait que la masse de ce domaine matériel reste constante s'écrit

$$\iiint_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S = 0 . \quad (7.9)$$

Dans le cas d'*écoulements permanents* ou *stationnaires*, définis par le fait que tous les champs eulériens sont indépendants du temps, en particulier

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} = 0 , \quad (7.10)$$

il vient

$$\iint_{\partial\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S = 0 . \quad (7.11)$$

Considérons un domaine  $\Omega_t$  *tube de courant* (figure 7.1). Alors l'équation (7.11) exprime la *conservation du débit massique*<sup>5</sup> entre les surfaces d'entrée et de sortie,

$$\boxed{\dot{m} = - \iint_{S_e} \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S = \iint_{S_s} \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S} , \quad (7.12)$$

5. En anglais, le débit massique est le '*mass flow rate*', le débit volumique le '*volume flow rate*'.

qu'il est intéressant de retrouver et interpréter à l'aide de la formule (7.3). Le bilan local de transport de masse a lui aussi été établi dans le chapitre 3, il prend deux formes équivalentes (3.11) et (3.12),

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{\mathbf{v}}) = 0} . \quad (7.13)$$

On fera la plupart du temps l'hypothèse que les fluides que l'on considère sont *incompressibles*, c'est-à-dire qu'en première approximation

$$\rho(\bar{\mathbf{x}}, t) = \rho_0 \text{ indépendante de } \bar{\mathbf{x}} \text{ et } t . \quad (7.14)$$

D'un point de vue thermodynamique, cette hypothèse est cohérente avec celle d'*isothermalité*,

$$T(\bar{\mathbf{x}}, t) = T_0 \text{ indépendante de } \bar{\mathbf{x}} \text{ et } t . \quad (7.15)$$

On reviendra sur ces hypothèses en section 7.2.2. Si on insère l'hypothèse (7.14) dans la loi de conservation du débit massique (7.12), on obtient la loi de *conservation du débit volumique*<sup>5</sup>

$$\boxed{q = \frac{\dot{m}}{\rho} = - \iint_{S_e} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2 S = \iint_{S_s} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2 S} . \quad (7.16)$$

En pratique, on définit souvent les aires des sections d'entrée et de sortie du tube de courant

$$A_e = \iint_{S_e} d^2 S \quad \text{et} \quad A_s = \iint_{S_s} d^2 S , \quad (7.17)$$

et à partir de cela des vitesses moyennes ou « *vitesses débitantes* »

$$\boxed{V_e = \frac{q}{A_e} \quad \text{et} \quad V_s = \frac{q}{A_s}} . \quad (7.18)$$

D'un point de vue local, la loi (7.13) donne enfin en fluide incompressible, la condition

$$\boxed{\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0} . \quad (7.19)$$

Par analogie avec le champ magnétique<sup>6</sup>, on dit que le champ de vitesse d'un fluide incompressible est « *solénoïdal* ».

### 7.1.3 Transport de quantité de mouvement

On rappelle la forme globale de la *loi d'évolution de la quantité de mouvement*  $\bar{\mathbf{p}}$  du domaine  $\Omega_t$ , résultant des études effectuées au chapitre 3,

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} &= \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} d^3 x + \iint_{\partial\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2 S \\ &= \bar{\mathbf{R}} \text{ somme des forces extérieures appliquées} \\ \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} &= \underbrace{\iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3 x}_{\text{résultante du poids}} + \underbrace{\iint_{\partial\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2 S}_{\text{résultante des forces de surface}} \end{aligned}} , \quad (7.20)$$

6. Qui lui vérifie toujours l'équation de Maxwell  $\operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} = 0$ , sans qu'il soit nécessaire de poser la moindre approximation... Et qui est souvent « créé » par des bobinages solénoïdaux dans lesquels circulent un courant  $\bar{\mathbf{J}}$ , en vertu de l'équation de Maxwell  $\operatorname{rot} \bar{\mathbf{B}} = \mu_0 \bar{\mathbf{J}}$  (en régime quasi statique).

la première égalité étant la *formule de transport d'Euler*. La forme locale de cette loi d'évolution a été donnée dans l'équation (3.41),

$$\boxed{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left( \overline{\nabla_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = \rho \bar{\mathbf{g}} + \overline{\mathbf{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}}} \quad (7.21)$$

en faisant usage de (2.71) pour expliciter l'accélération en description eulerienne.

## 7.2 Loi de comportement des fluides newtoniens incompressibles

### 7.2.1 Établissement à partir de faits expérimentaux

De façon similaire à ce que nous avons fait dans le chapitre 4 pour les solides élastiques, nous adoptons une démarche de physicien appliqué pour introduire la loi de comportement des fluides newtoniens. Le lecteur intéressé par une approche de physicien théoricien se reportera par exemple au chapitre 11 de [Forest & Amestoy \(2020\)](#). Reconsidérons l'*expérience de Couette cylindrique* déjà présentée schématiquement sur la figure 1.1, une réalisation pratique étant montrée sur la figure 7.2a. On peut remarquer que, dans le cas où l'inter-rayon  $\ell = b - a$ , avec  $a$  le rayon extérieur du cylindre intérieur,  $b$  le rayon intérieur du cylindre extérieur, est très petit, ce système approxime celui du cisaillement pur entre deux plans<sup>7</sup>, comme cela est schématisé sur la figure 7.2b. Ce système est aussi appelé, dans le cas de fluides, *expérience de Couette plane*. Si, partant d'un état de repos, on met brutalement en rotation le cylindre intérieur dans une expérience de Couette cylindrique, ou brutalement en translation la plaque supérieure dans une expérience de Couette plane, on constate expérimentalement un *phénomène de diffusion de la quantité de mouvement*, analogue à celui étudié dans le problème 1.2 dans le cas de la diffusion de concentration. Dans le cas plan par exemple, on observe l'établissement d'un champ de vitesse unidirectionnel

$$\bar{\mathbf{v}} = v(y,t) \bar{\mathbf{e}}_x \quad (7.22)$$

avec  $x$  la direction parallèle aux parois,  $y$  la direction orthogonale, et l'existence d'une loi d'échelle ne dépendant que d'un temps réduit,

$$v(y,t) = V v_{\text{réduit}}(y/\ell, t/t_{\text{visqueux}}) . \quad (7.23)$$

Dans cette loi « universelle »  $V$  est la vitesse imposée à la paroi mobile, située à la distance  $\ell$  de la paroi fixe, et

$$t_{\text{visqueux}} = \frac{\ell^2}{\nu} \quad (7.24)$$

est le *temps de diffusion visqueuse*, avec  $\ell$  l'espace entre la plaque inférieure fixe et la plaque supérieure mobile,  $\nu$  la *viscosité cinématique* du fluide. Les courbes réduites correspondantes sont présentées sur la figure 7.2c. Elles suggèrent l'existence de contraintes tangentielles de « *frottements visqueux* » entre les diverses couches de fluides, par lesquelles les couches supérieures entraînent progressivement les couches inférieures. Au bout d'un temps de l'ordre du temps de diffusion visqueuse  $t_{\text{visqueux}}$ , on atteint un régime d'écoulement permanent,

$$v_{\text{réduit}} = \frac{y}{\ell} \iff v = V \frac{y}{\ell} . \quad (7.25)$$

7. Étudié dans le problème 2.1.

On peut alors mesurer la force exercée par le fluide sur la paroi mobile (qui doit être compensée par une force motrice égale et opposée pour assurer la constance de la vitesse  $V$  de cette paroi), et on trouve une force par unité de surface

$$-\bar{\mathbf{T}} = p\bar{\mathbf{e}}_y - \tau\bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{avec } p \text{ une } \mathbf{pression} \quad \text{et } \tau = \eta \frac{V}{\ell} \text{ une } \mathbf{contrainte tangentielle}, \quad (7.26)$$

$$\eta = \rho\nu \text{ étant la } \mathbf{viscosité dynamique} \text{ du fluide.} \quad (7.27)$$

Par le principe d'action-réaction la contrainte exercée par la paroi mobile sur le fluide est donc

$$\bar{\mathbf{T}} = -p\bar{\mathbf{e}}_y + \tau\bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{avec } \tau = \eta \frac{V}{\ell}. \quad (7.28)$$

L'existence d'une pression et d'une **relation linéaire entre la contrainte tangentielle et la vitesse** est vérifiée dans de nombreux fluides **isotropes** dits **newtoniens** : l'eau, la plupart des huiles, des alcools, mais aussi des gaz comme l'air, etc... Des valeurs typiques des viscosités  $\nu$  et  $\eta$  sont présentées sur la table 7.1 ; quelques informations sur les effets physiques qui contrôlent la valeur de la viscosité sont donnés par exemple le chapitre 1 de Plaut (2021b). Ces viscosités mesurent d'une certaine façon la résistance à l'écoulement, puisque

$$\frac{V}{\ell} = \text{ordre de grandeur des gradients de vitesse obtenus} = \frac{\tau \text{ force surfacique motrice}}{\eta}.$$

L'équation (7.28) suggère l'existence de **contraintes normales** même en l'absence d'écoulement. Ceci est confirmé par de nombreuses expériences, qui montrent qu'en « **hydrostatique** »<sup>8</sup>, l'intensité de ces contraintes normales est la même quelle que soit la direction normale  $\bar{\mathbf{n}}$  considérée, et donnée par une quantité que l'on appelle la **pression**  $p$ ,

$$\forall \bar{\mathbf{n}}, \quad \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = -p\bar{\mathbf{n}}. \quad (7.29)$$

Cette pression  $p$  est un champ scalaire continu d'un fluide à l'autre, comme l'illustre l'exercice 7.3. En hydrostatique on a donc un tenseur des contraintes

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{\mathbf{1}}. \quad (7.30)$$

Cette forme de tenseur des contraintes est la seule qui n'introduit pas de contraintes tangentielles<sup>9</sup>. La loi (7.30) peut donc être vue comme une conséquence de l'une des définitions des fluides données en section 1.1.1, à savoir qu'un fluide au repos ne peut supporter de contraintes tangentielles, si petites soient-elles.

En **hydrodynamique**<sup>10</sup>, par contre, il est clair que la relation (7.28) ne pourra être satisfaite que si l'on rajoute un terme de **contraintes visqueuses**  $\bar{\bar{\tau}}$  au tenseur des contraintes hydrostatique (7.30), en écrivant que

$$\boxed{\bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{\mathbf{1}} + \bar{\bar{\tau}}}. \quad (7.31)$$

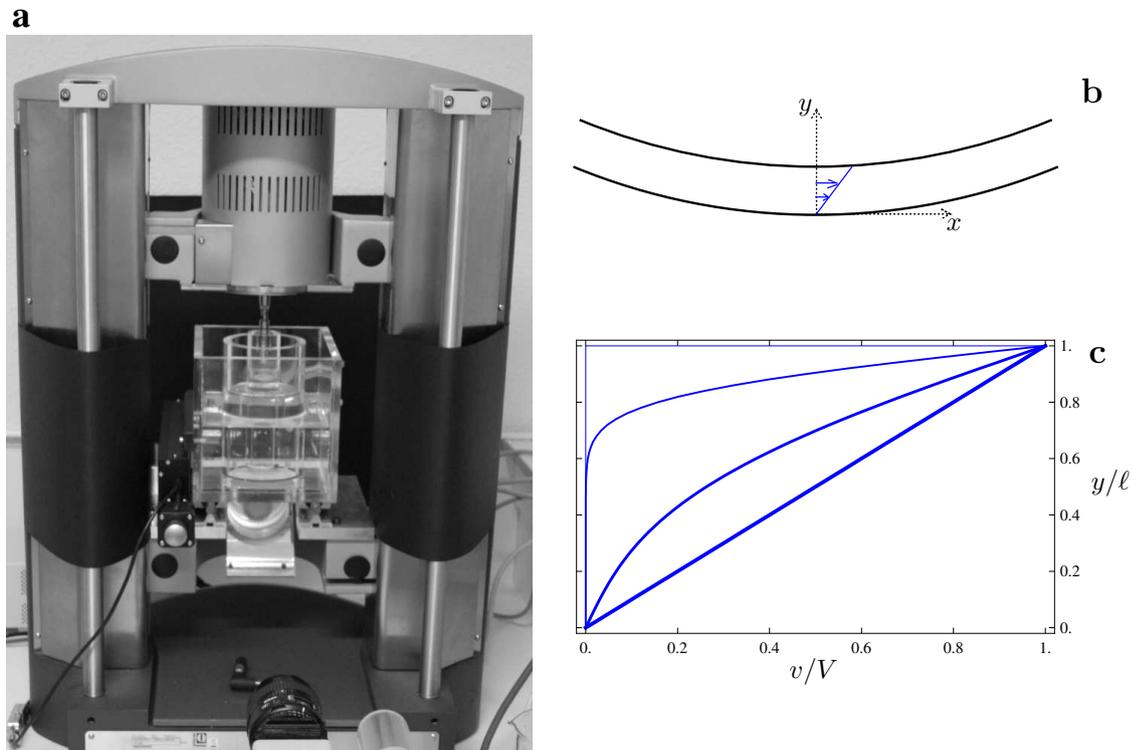
Au vu de la relation (7.28), on pourrait être tenté de poser une relation de proportionnalité entre  $\bar{\bar{\tau}}$  et le tenseur gradient de vitesse,

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\eta \bar{\bar{\mathbf{K}}} = 2\eta \bar{\bar{\nabla}}_x \bar{\mathbf{v}}, \quad (\Delta \text{ formule fautive !})$$

8. Nom dérivé du grec « hudôr » : eau, pour la **statique des fluides**.

9. Comme on peut s'en convaincre à l'aide de la représentation de Mohr des contraintes.

10. Nom dérivé du grec pour la **mécanique des fluides en écoulements**.



**Fig. 7.2** – **a** : *Expérience de Couette cylindrique* du Lemta menée dans l'équipe de Salaheddine Skali-Lami par Ghania Benbelkacem. En haut on distingue le moteur électrique, de l'axe duquel est solidaire le cylindre intérieur (de rayon extérieur  $a$ ). Entre celui-ci et le cylindre extérieur (de rayon intérieur  $b$ ) se trouve le liquide à étudier, dont on distingue la surface libre. Le cylindre extérieur est fixé dans une cuve parallélépipédique. Toutes ces pièces solides sont en plexiglass afin de permettre des visualisations. La cuve est en général remplie d'eau (pour les besoins de la photo ce remplissage n'a pas été total), afin d'assurer une régulation thermique du système et permettre une illumination du fluide par une « nappe laser » en minimisant les effets de réfraction aux interfaces, puisque l'eau possède un indice optique proche de celui du plexiglass. L'image obtenue, réfléchie dans un miroir, est ensuite filmée par une caméra (objectif visible en bas de la photo). **b** : Une expérience de Couette cylindrique caractérisée par un petit inter-rayon  $\ell = b - a \ll b$  est proche d'une expérience de Couette plane, i.e. d'une situation de *cisaillement pur entre deux plans*. Les flèches continues représentent des vitesses en régime permanent. **c** : Relaxation par *diffusion visqueuse* des profils temporels de vitesse réduite  $v/V$  après un démarrage brutal d'une *expérience de Couette plane*. L'axe des ordonnées correspond à la coordonnée  $y$  dans la direction perpendiculaire aux parois. Les courbes de plus en plus épaisses correspondent à  $t/t_{\text{visqueux}} = 0, 1/100, 1/10$  et  $1$ , cf. (7.24).

Fluide	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\eta$ [Pa s]	$\nu$ [m <sup>2</sup> /s]
Eau sous $p = 1$ atm, $T = 10^\circ\text{C}$	1000	$1,31 \cdot 10^{-3}$	$1,31 \cdot 10^{-6}$
Eau sous $p = 1$ atm, $T = 20^\circ\text{C}$	998	$1,00 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{-6}$
Eau sous $p = 1$ atm, $T = 30^\circ\text{C}$	996	$7,98 \cdot 10^{-4}$	$8,01 \cdot 10^{-7}$
Air sous $p = 1$ atm, $T = 20^\circ\text{C}$	1,20	$1,82 \cdot 10^{-5}$	$1,51 \cdot 10^{-5}$
Air sous $p = 1$ atm, $T = 40^\circ\text{C}$	1,13	$1,91 \cdot 10^{-5}$	$1,70 \cdot 10^{-5}$

**Tab. 7.1** – Valeurs typiques de la *masse volumique*  $\rho$ , de la *viscosité dynamique*  $\eta$  et de la *viscosité cinématique*  $\nu = \eta/\rho$  pour divers fluides. On rappelle qu’une atmosphère vaut  $1,013 \cdot 10^5$  Pa soit 1,013 bar. L’unité de  $\eta$  est aussi bien le Pascal seconde [Pa s] que le kilogramme par mètre et par seconde [kg/(m s)]. Les propriétés de l’eau sont tirées de [Lide \(2001\)](#). La masse volumique de l’air peut se déduire de la loi des gaz parfaits [1.8](#); les viscosités sont tirées du site web ‘*Engineering ToolBox*’.

mais alors, en faisant tourner en bloc un fluide, ce qui n’introduit aucune déformation, on introduirait des contraintes tangentielles. Ceci n’est pas observé, et suggère une relation linéaire entre le tenseur des contraintes visqueuses et le tenseur des taux de déformation,

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\eta \bar{\bar{D}} = \eta (\bar{\bar{K}} + \bar{\bar{K}}^T). \quad (7.32)$$

Ainsi, d’après (7.31), la *loi de comportement des fluides newtoniens* est donnée par

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{\bar{1}} + 2\eta \bar{\bar{D}}. \quad (7.33)$$

Cette loi permet bien de retrouver (7.28) en écoulement de Couette plan établi (7.25),

$$\bar{\mathbf{v}} = V \frac{y}{\ell} \bar{\mathbf{e}}_x,$$

puisqu’alors

$$\bar{\bar{K}} = \bar{\bar{\nabla}}_x \bar{\mathbf{v}} = \frac{V}{\ell} \bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_y$$

donc

$$2\eta \bar{\bar{D}} = \eta \frac{V}{\ell} (\bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_y + \bar{\mathbf{e}}_y \otimes \bar{\mathbf{e}}_x)$$

et en conséquence

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_y = -p\bar{\mathbf{e}}_y + \eta \frac{V}{\ell} \bar{\mathbf{e}}_x.$$

Pour nous, « *fluide newtonien* » signifiera dorénavant « *fluide isotrope incompressible* » *satisfaisant la loi de comportement* (7.33), avec  $\eta$  la viscosité dynamique qui ne dépend que (faiblement) de la température du fluide, comme l’illustre la table 7.1.

### 7.2.2 Limitations du modèle : effets de compressibilité - effets non newtoniens

On pourrait, en comparant la loi (7.32),

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\eta \bar{\bar{D}}, \quad (7.34)$$

à celle (4.37) écrite pour les solides élastiques, qui est a priori analogue sauf que le tenseur des déformations (linéarisé) remplace le tenseur des taux de déformation,

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda (\text{tr} \bar{\bar{\epsilon}}) \bar{\bar{1}} + 2\mu \bar{\bar{\epsilon}}, \quad (7.35)$$

se demander pourquoi on n'a pas, plutôt que (7.34), écrit

$$\bar{\tau} = \eta_1 (\text{tr}\bar{\mathbf{D}}) \bar{\mathbf{1}} + 2\eta_2 \bar{\mathbf{D}}. \quad (7.36)$$

La réponse est que, comme nous faisons systématiquement une hypothèse d'incompressibilité, on a toujours

$$\text{tr}\bar{\mathbf{D}} = \text{div}\bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (7.37)$$

donc le terme proportionnel à  $\eta_1$  dans (7.36) est toujours nul; ceci explique pourquoi nous ne l'avons pas introduit.

En réalité tous les fluides sont plus ou moins *compressibles*, leur compressibilité pouvant se mesurer par le *module de compression*  $K$  strictement analogue de celui introduit en mécanique des solides, au niveau de la section 4.1.7,

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\partial \ln \rho}{\partial p}. \quad (7.38)$$

Ce module de compression définit d'ailleurs la *vitesse du son* dans le fluide considéré, suivant la loi

$$c_s = \sqrt{K/\rho}, \quad (7.39)$$

démontrée par exemple dans les chapitres VII de Chassaing (2000) ou 3 de Plaut (2021b). L'hypothèse du fluide incompressible (7.14) consiste à supposer que  $\rho$  ne dépend pas de la pression donc

$$K = \infty \quad \text{donc} \quad c_s = \infty.$$

Elle est d'autant meilleure que les vitesses d'écoulements considérées sont petites devant la vitesse du son, effectivement « quasi infinie » par rapport à ces premières. Concrètement, pour l'*eau*

$$K \simeq 2 \text{ GPa} \quad \implies \quad c_s \simeq 1400 \text{ m/s}. \quad (7.40)$$

L'approximation d'incompressibilité sera en conséquence souvent bien justifiée. Par contre, pour de l'*air dans les conditions atmosphériques standard*,

$$K \simeq 0,14 \text{ MPa} \quad \implies \quad c_s \simeq 340 \text{ m/s}. \quad (7.41)$$

En conséquence en *aéronautique*, *aérospatiale* ou *détonique*<sup>11</sup> on aura souvent voire toujours affaire à des écoulements dans lesquels les effets de compressibilité ne peuvent être négligés. La théorie de ces écoulements dépasse très largement le cadre de ce module.

Revenant momentanément sur le cas de fluides compressibles, on peut mentionner que dans ce cas on écrit effectivement le tenseur des contraintes visqueuses sous la forme (7.36) comportant deux termes, voir par exemple les sections IV.3 de Chassaing (2000) ou 1.6 de Plaut (2021b).

Même dans le cas des fluides incompressibles, auquel nous nous restreignons désormais, il peut exister des « *effets non newtoniens* » compliquant la forme de la loi de comportement (7.33), surtout lorsqu'elle est considérée sous sa forme la plus stricte, avec une viscosité  $\eta$  qui ne dépend que de la température. Par exemple certains fluides structurés comme des polymères ou solutions de polymères, mais aussi le sang, ou des fluides agroalimentaires (yaourt, sauce, purée...) présentent

11. La science des détonations, qui sont des phénomènes très rapides.

un comportement « *rhéofluidifiant* » caractérisé par le fait que l'on peut toujours écrire la relation (7.32), mais avec  $\eta$  décroissant lorsque les taux de déformation augmentent, i.e. lorsque

$$\overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}}$$

augmente. En conséquence la relation (7.32) devient *non linéaire* par rapport à  $\overline{\mathbf{v}}$ . C'est l'objet de la *rhéologie*<sup>12</sup> que de développer des modèles de lois de comportement pour de tels fluides, et de les confronter à la réalité. Pour cela on utilise des appareils appelés « *rhéomètres* » permettant de créer des écoulements bien contrôlés et de les caractériser par diverses mesures ; un exemple basique d'expérience rhéométrique est celui de l'expérience de Couette de la figure 7.2, qui sera étudiée en détail dans le problème 7.2, dans le cas simple d'un fluide newtonien.

## 7.3 Équation de Navier-Stokes - Premières propriétés

### 7.3.1 Première forme de l'équation de Navier-Stokes

Injectons la loi de comportement (7.33) des *fluides newtoniens* dans l'équation d'évolution de la quantité de mouvement (7.21). En composantes dans une base, on a

$$\overline{\text{div}} \overline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \overline{\mathbf{e}}_i = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} \overline{\mathbf{e}}_i + 2\eta \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} \overline{\mathbf{e}}_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \overline{\mathbf{e}}_i + 2\eta \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} \overline{\mathbf{e}}_i$$

en supposant le système *isotherme*<sup>13</sup>. D'après la définition (2.75) du tenseur des taux de déformation, on a

$$2 \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} = \Delta v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div} \overline{\mathbf{v}},$$

en faisant usage du théorème de Schwarz dès la première égalité (cf. la discussion sur les dérivées partielles secondes de la section 2.5.2 du cours de calcul tensoriel). Le second terme est nul d'après l'hypothèse d'incompressibilité (7.19),

$$\boxed{\text{div} \overline{\mathbf{v}} = 0}. \quad (7.42)$$

Au bilan l'équation d'évolution de la quantité de mouvement (7.21) devient l'*équation de Navier-Stokes*

$$\boxed{\rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left( \overline{\nabla}_{\mathbf{x}} \overline{\mathbf{v}} \right) \cdot \overline{\mathbf{v}} \right] = \rho \overline{\mathbf{g}} - \overline{\nabla} p + \eta \overline{\Delta} \overline{\mathbf{v}}}, \quad (7.43)$$

qui contient un terme de diffusion visqueuse dont on pouvait soupçonner l'existence dès l'énoncé de la propriété (7.23). L'objet de l'exercice 7.6 est d'ailleurs de montrer que cette équation conduit bien au comportement (7.23).

On dispose donc d'une équation scalaire (7.42) et d'une équation vectorielle (7.43) pour calculer les deux champs eulériens inconnus

- le champ scalaire de pression  $p(\overline{\mathbf{x}}, t)$  ;
- le champ vectoriel de vitesse  $\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}, t)$ .

12. Du grec « rheô, rhein » : couler.

13. Sinon, du fait que  $\eta = \eta(T)$ , il faudrait rajouter des termes proportionnels à  $d\eta/dT$ , faisant apparaître les dérivées spatiales  $\partial T/\partial x_j$  de la température.

Ce modèle est donc, a priori, bien posé mathématiquement, et il ne faudrait pas rajouter au système (7.42), (7.43) une loi thermodynamique donnant la pression, comme la loi des gaz parfaits. En effet on obtiendrait alors un modèle surdéterminé i.e. mal posé mathématiquement. Ceci signifie que la pression qui intervient dans (7.43) est une *pression « mécanique »* qui n'a pas exactement, du point de vue du physicien théoricien, la même nature que la *pression « thermodynamique »* comme celle des gaz parfaits, même si ces deux champs sont identiques pour le physicien appliqué. Ce problème ne peut être résolu de façon propre que si on prend en compte les effets de compressibilité<sup>14</sup>.

### 7.3.2 Conditions limites

Comme l'équation de Navier-Stokes est d'ordre 2 par rapport à l'espace en ce qui concerne le champ de vitesse (du fait du terme  $\eta \overline{\Delta \bar{v}}$ ), et d'ordre 1 par rapport à l'espace en ce qui concerne le champ de pression (du fait du terme  $\overline{\nabla p}$ ), il faut lui ajouter, pour que le calcul complet de ces champs soit possible, des conditions limites au bord du domaine fluide  $D_t$ , du type

- *vitesse donnée sur tout le bord,*

$$\boxed{\bar{v}(\bar{x}) = \bar{v}^d(\bar{x}) \text{ donnée}} ; \quad (7.44)$$

- *pression donnée en un point du bord,*

$$\boxed{p(\bar{x}_b) = p^d \text{ donnée}} . \quad (7.45)$$

Un exemple de condition du type (7.44) s'obtient dans le cas où un bord est constitué d'une paroi solide fixe. On a alors, à cause de l'existence des frottements visqueux, *adhérence à la paroi* du fluide visqueux

$$\bar{v}(\bar{x}) = \bar{0} . \quad (7.46)$$

Si le bord est un solide en mouvement à la vitesse  $\bar{v}^d(\bar{x})$ , cette même condition d'adhérence à la paroi s'exprime exactement sous la forme (7.44). Un exemple de condition du type (7.45) s'obtient dans le cas où un bord est en contact avec l'air atmosphérique ; alors on supposera en général que

$$p(\bar{x}_b) = 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} . \quad (7.47)$$

À l'*interface* entre deux milieux continus, il faut écrire plus de conditions limites sous peine d'avoir un problème mathématiquement sous déterminé. On donnera un exemple en section 7.4.3.

### 7.3.3 Forme faisant apparaître la pression motrice

À l'échelle des problèmes de l'ingénieur que nous considérerons, i.e. celle du laboratoire, le champ de gravité est homogène. On choisit en général l'axe des ordonnées  $Oz$  dans la direction

14. Si on lève l'hypothèse d'incompressibilité, on obtient une équation de conservation de la masse plus compliquée que (7.42), à savoir (7.13). La masse volumique est alors une inconnue supplémentaire du problème, ainsi que la température, qui est typiquement non constante en présence de tels effets. Heureusement on dispose de deux équations supplémentaires, à savoir la relation thermodynamique qui lie  $p$ ,  $\rho$  et  $T$ , et l'équation de la chaleur, i.e. l'équation d'évolution de l'énergie interne. La théorie correspondante dépasse très largement le cadre de ce cours. Certains éléments de cette théorie seront donnés dans le cours de Barrat (2012) ; pour une présentation plus complète on consultera par exemple Chassaing (2000).

verticale, de sorte que l'on peut écrire que

$$\bar{\mathbf{g}} = -g \bar{\mathbf{e}}_z = -g \bar{\nabla} z = -\bar{\nabla}(gz) \quad \text{avec} \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2. \quad (7.48)$$

D'après l'hypothèse d'incompressibilité, et en supposant toujours le système isotherme,  $\rho$  aussi est homogène<sup>15</sup>, donc le terme de pesanteur dans l'équation de Navier-Stokes peut s'écrire

$$\rho \bar{\mathbf{g}} = -\bar{\nabla}(\rho gz). \quad (7.49)$$

On peut donc sous ces hypothèses regrouper les deux premiers termes du membre de droite de l'équation de Navier-Stokes (7.43) en un seul,

$$\rho \bar{\mathbf{g}} - \bar{\nabla} p = -\bar{\nabla} \hat{p} \quad \text{avec} \quad \boxed{\hat{p} = p + \rho gz} \quad \text{la } \mathbf{pression\ motrice}. \quad (7.50)$$

L'intérêt de l'introduction de ce nouveau champ scalaire, qui n'a pas de signification physique directe, contrairement au champ de pression qui contribue au tenseur des contraintes (7.33), est de permettre d'obtenir une nouvelle forme plus simple de l'équation de Navier-Stokes (7.43),

$$\boxed{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left( \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = -\bar{\nabla} \hat{p} + \eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}}}. \quad (7.51)$$

### 7.3.4 Application : loi de l'hydrostatique

À l'équilibre, lorsque  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}$ , on obtient à partir de (7.51) la *loi de l'hydrostatique*

$$\boxed{\hat{p} = p + \rho gz \text{ est indépendante de } \bar{\mathbf{x}} \text{ dans un domaine fluide}} \quad (7.52)$$

sous-entendu connexe. Lorsque plusieurs domaines fluides coexistent la valeur de la pression motrice dans chaque domaine n'a aucune raison d'être la même ; par contre à l'interface entre deux domaines la pression  $p$  doit être continue en vertu de la continuité des contraintes. Cette loi, déjà rencontrée en classes préparatoires, s'interprète ainsi : la pression augmente quand l'altitude  $z$  diminue puisque le fluide doit supporter le poids des couches supérieures.

Cette loi s'applique par exemple dans des tubes de prise de pression, lorsque les écoulements considérés sont quasi stationnaires ; cf. sur ce sujet les exercice 7.3 et problème 7.5. Sur les forces exercées par un champ de pression hydrostatique, cf. l'exercice 7.1.

### 7.3.5 Réécritures possibles du terme non linéaire - Vorticité

Une propriété fondamentale de l'équation de Navier-Stokes est la coexistence de termes dépendant *linéairement* de  $\bar{\mathbf{v}}$ , à savoir le terme de dérivée temporelle

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t}$$

et le terme de diffusion visqueuse

$$\bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}},$$

avec un terme dépendant *non linéairement* de  $\bar{\mathbf{v}}$ , le terme d'advection, dit aussi « inertiel »,

$$\bar{\gamma}_a = \left( \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}}. \quad (7.53)$$

15. En système *anisotherme*, il faudrait prendre en compte le fait que  $\rho = \rho(T)$ .

Ceci a des conséquences très importantes, notamment la possibilité de coexistence de plusieurs solutions possibles pour les mêmes conditions globales d'écoulement, ou encore celle de la « turbulence », possibilités sur lesquelles on reviendra en section 7.5. En attendant, il importe de faire l'exercice 2.10 de calcul tensoriel, pour se convaincre que le terme (7.53) peut se réécrire

$$\bar{\gamma}_a = \nabla \left( \frac{\bar{v}^2}{2} \right) + (\overline{\text{rot} \bar{v}}) \wedge \bar{v}, \quad (7.54)$$

où apparaît le *champ de vorticité*  $\overline{\text{rot} \bar{v}}$  de l'écoulement.

## 7.4 Modèle du fluide parfait

### 7.4.1 Le fluide parfait : modèle général pour l'hydrostatique, très simplifié pour l'hydrodynamique

Un *fluide parfait* est un fluide newtonien de *viscosité nulle*, i.e.  $\eta = 0$  dans la loi de comportement (7.33), qui se réduit donc à

$$\boxed{\bar{\sigma} = -p\bar{\mathbf{1}}}. \quad (7.55)$$

Comme le terme proportionnel à  $\eta$  dans (7.33) est aussi proportionnel à  $\bar{\mathbf{D}}$ , on peut remarquer que *tout fluide newtonien au repos se comporte comme un fluide parfait*. Par contre en situation d'écoulement aucun fluide n'est parfait si ce n'est l'hélium 4 à très basse température ( $T < 2,2$  K). En *hydrodynamique* l'hypothèse de fluide parfait est donc une *hypothèse de modélisation*, à peu près raisonnable si le terme visqueux peut être négligé devant un terme temporel ou devant un terme d'inertie, ce qui peut arriver si on n'est pas trop près d'une paroi solide. C'est surtout un modèle très simplifié qui permet de mettre en évidence quelques phénomènes pertinents en hydrodynamique, qui se trouvent exister aussi (de façon qualitativement similaire mais, en général, quantitativement différente) pour des fluides visqueux.

### 7.4.2  quation d'Euler

Lorsque  $\eta = 0$  l'équation de Navier-Stokes (7.51) dégénère en l'* quation d'Euler*

$$\boxed{\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\overline{\nabla \bar{v}}) \cdot \bar{v} \right] = -\nabla \hat{p}}. \quad (7.56)$$

On a employé le verbe « dégénérer » car le fait de supprimer le terme de diffusion visqueuse en  $\overline{\Delta \bar{v}}$  dans (7.51) change l'ordre le plus élevé des dérivées de la vitesse par rapport à l'espace :  gal à 2 dans (7.51), il devient égal à 1 dans (7.56).

### 7.4.3 Conditions limites

Une conséquence de cette dégénérescence est qu'il faut « dégrader » les conditions limites en vitesse (7.44), en les remplaçant par exemple, au niveau d'une paroi solide, par une condition d'*imperméabilité* : si  $\bar{\mathbf{n}}$  est la normale à cette paroi, supposée fixe dans un premier temps, on n'exige pas la nullité de  $\bar{v}(\bar{\mathbf{x}})$  en un point de la paroi, mais seulement celle de la vitesse normale,

$$\bar{v}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0. \quad (7.57)$$

Ainsi on autorise l'existence d'une vitesse tangentielle non nulle, i.e. un *glissement* du fluide parfait à la paroi. D'un point de vue moins mathématique mais plus physique, ce glissement est permis par l'absence de forces de frottements visqueux dans un fluide parfait.

Dans le cas d'une paroi mobile à la vitesse  $\bar{\mathbf{v}}^d(\bar{\mathbf{x}})$ , on écrit que

$$\boxed{\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{v}}^d(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \bar{\mathbf{n}}} . \quad (7.58)$$

À une *interface immobile* entre un liquide visqueux et un fluide parfait, en négligeant les effets de tension superficielle, et en notant maintenant  $\bar{\mathbf{n}}$  la normale à l'interface, on a par imperméabilité de l'interface

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{liquide}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{v}}_{\text{gaz parfait}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 . \quad (7.59)$$

Par contre les composantes de la vitesse de chaque fluide tangentielles à l'interface sont libres : on retrouve un possible « glissement ». D'un point de vue dynamique, on a continuité du vecteur contrainte à l'interface (cf. à ce sujet la toute fin de la section 3.2.4), d'où, par continuité des contraintes normales, la continuité de la pression,

$$p_{\text{liquide}} = p_{\text{gaz parfait}} , \quad (7.60)$$

et, par continuité des contraintes tangentielles, la nullité de la contrainte visqueuse dans le liquide visqueux,

$$\bar{\bar{\mathbf{D}}}_{\text{liquide}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{0}} . \quad (7.61)$$

#### 7.4.4 Premier théorème de Bernoulli

En *écoulement permanent* ou *stationnaire*, grâce à la réécriture (7.54) du terme non linéaire dans l'équation d'Euler, on peut mettre celle-ci sous la forme

$$\rho \bar{\gamma}_a = \bar{\nabla} \left( \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \right) + \rho (\overline{\mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}}}) \wedge \bar{\mathbf{v}} = - \bar{\nabla} \hat{p} . \quad (7.62)$$

Considérons une trajectoire  $C$  de l'écoulement permanent, qui est aussi une ligne de courant de cet écoulement. Si  $M$  est un point courant de cette ligne  $C$ , on a, lorsque  $M$  varie de  $d\bar{\mathbf{M}}$ ,

$$\bar{\nabla} \left( \hat{p} + \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \right) = \rho \bar{\mathbf{v}} \wedge (\overline{\mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}}}) \text{ est perpendiculaire à } d\bar{\mathbf{M}}$$

donc

$$\bar{\nabla} \left( \hat{p} + \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \right) \cdot d\bar{\mathbf{M}} = 0 ,$$

i.e., d'après la définition intrinsèque du gradient vue en calcul tensoriel,

$$d \left( \hat{p} + \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \right) = 0 .$$

On en déduit que

$$\hat{p} + \rho \frac{\bar{v}^2}{2} = p + \rho g z + \rho \frac{\bar{v}^2}{2} = \text{constante le long de } C . \quad (7.63)$$

Suivant Bernoulli <sup>16</sup>, on introduit une quantité homogène à une longueur et appelée « *charge* » <sup>17</sup>, qui est conservée le long de la ligne de courant de l'écoulement permanent,

$$H = \frac{\hat{p}}{\rho g} + \frac{\bar{v}^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\bar{v}^2}{2g} = \text{constante le long de } C . \quad (7.64)$$

Ceci constitue le *premier théorème de Bernoulli* <sup>18</sup>. Il met en évidence un effet très important, à l'origine d'une multitude d'applications en mécanique des fluides : comme, le long de  $C$ ,

$$p = \text{constante}(C) - \rho g z - \rho \frac{\bar{v}^2}{2} , \quad (7.65)$$

*une zone de survitesse*,  $\bar{v}^2$  plus grande que la moyenne, *crée une dépression*,  $p$  plus faible que la moyenne. Une interprétation physique de cet effet est que, lorsque les atomes ou molécules constituant le fluide vont plus vite, elles ont « moins de temps » pour heurter une surface (physique ou virtuelle), donc pour y créer des forces de pression.

#### 7.4.5 Dynamique de la vorticité

Plus généralement, dans le cas d'un écoulement éventuellement instationnaire, grâce à (7.54) l'équation d'Euler s'écrit

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{\nabla} \left( \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \right) + \rho (\overline{\text{rot} \bar{v}}) \wedge \bar{v} = - \bar{\nabla} \hat{p} . \quad (7.66)$$

En prenant le rotationnel de cette équation, comme le rotationnel d'un gradient est nul, et la masse volumique est constante, on obtient l'* quation de la vorticité*

$$\frac{\partial \overline{\text{rot} \bar{v}}}{\partial t} = \overline{\text{rot} (\bar{v} \wedge \overline{\text{rot} \bar{v}})} . \quad (7.67)$$

Cette équation d'évolution spatio-temporelle montre que, si on part à  $t = t_0$  d'un écoulement sans vorticité, tel que

$$\overline{\text{rot} \bar{v}} = \bar{\mathbf{0}} \text{ dans le domaine fluide,} \quad (7.68)$$

alors à tout instant ultérieur on aura aussi  $\overline{\text{rot} \bar{v}} = \bar{\mathbf{0}}$  dans le domaine fluide. Ainsi *il n'existe pas de mécanisme de création de vorticité en fluides parfaits*.

#### 7.4.6  coulements irrotationnels et potentiels

Puisque aucune création de vorticité n'y est possible, on suppose souvent qu'un écoulement de fluide parfait se fait à vorticité nulle. Un tel écoulement, vérifiant par définition la propriété (7.68), est dit « *irrotationnel* ». Une conséquence mathématique de cette propriété est l'existence, si le domaine fluide est simplement connexe, ou dans un sous-domaine « coupé » de celui-ci qui soit simplement connexe, d'un « *potentiel des vitesses* » scalaire  $\phi$  tel que

$$\bar{v} = \bar{\nabla} \phi . \quad (7.69)$$

16. Mathématicien et physicien suisse du XVIII<sup> me</sup> siècle.

17. En anglais '*head*'.

18. Qu'il soit premier ou deuxième importe peu, et d'ailleurs cette « numérotation » dépend des auteurs. Ce qui importe c'est de retenir les hypothèses de validité de ce théorème et sa démonstration, somme toute plutôt simple. Ce conseil vaut aussi pour le « second » théorème de Bernoulli, qui arrivera en section 7.4.7.

L'existence de ce potentiel est intéressante d'un point de vue théorique car il est plus facile de calculer (et de manipuler) un champ scalaire qu'un champ de vecteur. En raison de cette existence on dit que les écoulements irrotationnels sont aussi des écoulements « *potentiels* ». La condition d'incompressibilité (7.19) montre alors que  $\phi$  est *harmonique*,

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0 \iff \boxed{\Delta \phi = 0} . \quad (7.70)$$

La théorie des écoulements potentiels est une sous-discipline de la mécanique des fluides qui permet d'obtenir des résultats qualitativement corrects (voire, parfois, semi-quantitativement corrects) assez « facilement ». Elle est historiquement importante, puisque par exemple en *aérodynamique* les premiers modèles développés l'ont été grâce à cette théorie<sup>19</sup>. Un autre domaine dans lequel cette théorie a porté beaucoup de fruits est celui des *écoulements en milieux poreux* (par exemple dans un terrain géologique), voir par exemple Polubarinova-Kochina (1962).

#### 7.4.7 Second théorème de Bernoulli

Dans un écoulement potentiel l'équation d'Euler (7.66) s'écrit, en faisant une hypothèse de régularité raisonnable sur  $\phi$ ,

$$\bar{\nabla} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \bar{\nabla} \left( \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right) = -\bar{\nabla} \frac{\hat{p}}{\rho} . \quad (7.71)$$

On a donc par intégration, dans le domaine fluide supposé connexe,

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} + \frac{\hat{p}}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{\partial \phi}{\partial t} + gH \text{ est indépendant de } \bar{\mathbf{x}}} . \quad (7.72)$$

Ceci constitue le *second théorème de Bernoulli* ou *théorème de Bernoulli en régime instationnaire*.

## 7.5 Propriétés des écoulements de fluides newtoniens

Nous revenons ici sur les propriétés générales des écoulements de fluides newtoniens. Dans la section 7.5.1 on discute de la nature « linéaire » ou non, « *laminaire* » ou « *turbulente* » des écoulements de fluides newtoniens. L'objet de la section 7.5.2 est d'établir la forme que prend le *bilan global d'énergie cinétique* (6.9) dans le cas de fluides newtoniens visqueux, i.e., de montrer qu'il s'agit de systèmes « *dissipatifs* ». Enfin, dans la section 7.5.3, on simplifie le bilan global d'énergie cinétique dans des tubes de courant, moyennant quelques hypothèses supplémentaires, pour aboutir aux notions très importantes de « *pertes et gains de charge* ».

### 7.5.1 Écoulements « linéaires » ou non, laminaires ou turbulents

Comme on l'a déjà souligné dans la section 7.3.5, l'équation de Navier-Stokes (7.51),

$$\rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left( \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = -\bar{\nabla} \hat{p} + \eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}} , \quad (7.73)$$

19. Voir les chapitres 6 de Chassaing (2000), VIII de Huerre (1998), ou 3 de Plaut (2018).

est, en général, *non linéaire*. En conséquence il n'existe pas de principe de superposition valable généralement en mécanique des fluides. Il existe cependant des cas où le terme non linéaire s'annule pour des raisons « géométriques » ; nous allons étudier l'un d'eux dans ce qui suit, avant d'en venir au problème de la transition vers la turbulence.

### Propriétés des écoulements unidirectionnels

Un écoulement est dit *unidirectionnel* dans la direction  $x_1$  si son champ de vitesse est de la forme<sup>20</sup>

$$\bar{\mathbf{v}} = v(x_1, x_2, x_3, t) \bar{\mathbf{e}}_1 . \quad (7.74)$$

À cause de l'hypothèse d'incompressibilité,

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0 ,$$

un tel écoulement est forcément uniforme dans la direction  $\bar{\mathbf{e}}_1$ ,

$$\bar{\mathbf{v}} = v(x_2, x_3, t) \bar{\mathbf{e}}_1 . \quad (7.75)$$

En conséquence

$$\overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial v}{\partial x_2} \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial v}{\partial x_3} \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_3 ,$$

donc le terme non linéaire dans l'équation de Navier-Stokes

$$\left( \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}} . \quad (7.76)$$

Ainsi cette équation prend la forme

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \bar{\mathbf{e}}_1 - \eta \Delta v \bar{\mathbf{e}}_1 = - \overline{\overline{\nabla \hat{p}}} . \quad (7.77)$$

Les termes de gauche dépendent *linéairement* de  $\bar{\mathbf{v}}$ , on peut donc déjà parler d'un principe de superposition si  $\hat{p}$  est vue comme une « source extérieure » de mouvement. Une autre conséquence de l'équation (7.77), plus précisément de ses composantes suivant  $\bar{\mathbf{e}}_2$  et  $\bar{\mathbf{e}}_3$ , est que  $\hat{p}$  ne dépend pas de  $x_2$  et  $x_3$ ,

$$\hat{p} = \hat{p}(x_1, t) . \quad (7.78)$$

La composante suivant  $\bar{\mathbf{e}}_1$  de (7.77) donne alors

$$\rho \frac{\partial v(x_2, x_3, t)}{\partial t} - \eta \Delta v(x_2, x_3, t) = - \frac{\partial \hat{p}(x_1, t)}{\partial x_1} . \quad (7.79)$$

En oubliant momentanément la dépendance par rapport au temps, afin de se concentrer sur la dépendance par rapport aux coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ , on est en présence d'une équation de la forme

$$f(x_2, x_3) = g(x_1) ,$$

valable dans tout le domaine fluide. Comme celui-ci est toujours supposé connexe, cette identité entre fonctions de variables *indépendantes* ( $x_2$  et  $x_3$  d'un côté,  $x_1$  de l'autre) ne peut avoir lieu que

<sup>20</sup>. Cette propriété peut n'être valable que dans une certaine région du domaine fluide, et en « première approximation » ; on parle alors d'écoulement « quasi unidirectionnel ».

si les fonctions considérées sont indépendantes des variables spatiales  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ . En remontant au niveau de l'équation (7.79), on a l'existence d'une fonction  $G(t)$  telle que

$$\rho \frac{\partial v(x_2, x_3, t)}{\partial t} - \eta \Delta v(x_2, x_3, t) = - \frac{\partial \hat{p}(x_1, t)}{\partial x_1} = G(t). \quad (7.80)$$

Ainsi le **gradient de pression motrice** (le  $G$  veut dire « gradient ») est **uniforme**. Par intégration de cette dernière égalité il vient

$$\hat{p} = \hat{p}_0 - G(t)x_1 \iff p = p_0 - \rho g z - G(t)x_1. \quad (7.81)$$

Si par exemple l'écoulement a lieu à altitude  $z$  approximativement constante, on a

$$p \simeq p_0 - G(t)x_1, \quad (7.82)$$

i.e. une pression constante dans toutes les sections droites  $x_1 = \text{constante}$  de l'écoulement. Des exemples d'écoulements unidirectionnels sont étudiés dans les exercices 7.4 et 7.6.

### Les écoulements unidirectionnels sont laminaires

Les trajectoires des points matériels constituant le milieu continu fluide en écoulement unidirectionnel sont données, d'après (1.21) et (7.75), par les solutions d'équations différentielles de la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = v(x_2, x_3, t), \quad \frac{dx_2}{dt} = 0, \quad \frac{dx_3}{dt} = 0.$$

Elles se font donc le long de droites

$$x_2 = \text{constante}_2 = X_2, \quad x_3 = \text{constante}_3 = X_3 \quad (7.83)$$

qui sont à la fois les trajectoires, lignes d'émission et lignes de courant de l'écoulement unidirectionnel. Ainsi les différentes « couches » ou « lames » de fluides restent parallèles les unes aux autres et ne se mélangent pas ; on dit pour cette raison que l'écoulement est **laminaire**.

### Beaucoup d'écoulements ne sont pas laminaires mais turbulents

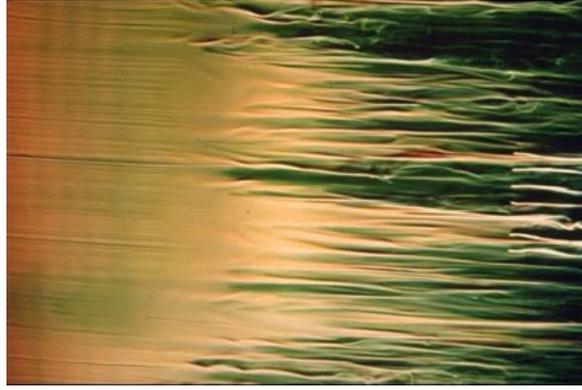
L'expérience montre que, lorsque l'on observe les lignes d'émission d'un traceur coloré dans un écoulement, injecté de façon plus ou moins homogène en amont, ces lignes ne restent pas droites, mais se tordent et souvent se « mélangent ». Ce phénomène est par exemple visible sur la figure 7.3. Il est caractéristique d'**écoulements turbulents**. Les problèmes de la **transition vers la turbulence** d'une part et de la **modélisation de la turbulence** d'autre part sont des problèmes très actuels en mécanique des fluides, sur lequel travaillent de nombreux chercheurs des domaines public et privé. En effet la plupart des écoulements aérodynamiques, mais aussi beaucoup d'écoulements hydrodynamiques, sont turbulents. Ces problèmes seront effleurés au chapitre 8. Des introductions intéressantes à ces sujets sont par exemple données dans Tritton (1988); Kundu (1990); Guyon, Hulin & Petit (2012); Plaut (2021c); Plaut, Peinke & Hölling (2021).

## 7.5.2 Bilan d'énergie cinétique général - Dissipation visqueuse

### Bilan global - Puissance des efforts extérieurs

Rappelons que l'énergie cinétique (6.5) contenue dans un domaine matériel  $\Omega_t$  vérifie la loi d'évolution (6.9),

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}}. \quad (7.84)$$



**Fig. 7.3** – Photographie d'un *écoulement turbulent* au-dessus d'une plaque plane, réalisée par le département aérodynamique fondamentale et expérimentale de l'ONERA. L'écoulement moyen a lieu de la gauche vers la droite. Un traceur coloré a été injecté de façon la plus uniforme possible en amont. Ses lignes d'émission sont tordues par l'écoulement turbulent, et présentent une dynamique rapide qui serait visible sur un film.

Compte tenu de la loi de comportement (7.33), la *puissance des efforts extérieurs* peut se décomposer en trois contributions,

$$P_{\text{ext}} = P_{\text{pesanteur}} + P_{\text{pression}} + P_{\text{visqueux}} \quad (7.85)$$

avec la *puissance des forces de pesanteur*

$$P_{\text{pesanteur}} = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d^3x, \quad (7.86)$$

la *puissance des forces de pression*

$$P_{\text{pression}} = - \iint_{\partial\Omega_t} p \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d^2S \quad (7.87)$$

et la *puissance des forces de frottement visqueux*

$$P_{\text{visqueux}} = \iint_{\partial\Omega_t} 2\eta (\bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d^2S. \quad (7.88)$$

Ce terme de « *frottements visqueux* », déjà introduit en section 7.2.1, va être justifié par l'étude de la puissance des efforts intérieurs, dont on va maintenant voir qu'elle provient du même terme  $2\eta \bar{\mathbf{D}}$  dans la loi de comportement (7.33), et qu'elle décrit une dissipation d'énergie.

#### Puissance des efforts intérieurs : dissipation visqueuse

On a établi dans le chapitre 6 que la *puissance des efforts intérieurs* qui intervient dans (7.84) vaut

$$P_{\text{int}} = - \iiint_{\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\mathbf{D}} \, d^3x. \quad (7.89)$$

D'après la loi de comportement (7.33), en fluide newtonien l'intégrand vaut

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\mathbf{D}} = -p \bar{\mathbf{1}} : \bar{\mathbf{D}} + 2\eta \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}}.$$

Le premier terme n'est autre que

$$-p \operatorname{tr} \bar{\mathbf{D}} = -p \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0$$

d'après l'hypothèse d'incompressibilité. Le deuxième terme est proportionnel à

$$\overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} = D_{ij}D_{ji} = D_{ij}D_{ij} \quad (7.90)$$

en composantes, puisque  $\overline{\mathbf{D}}$  est symétrique. Cette quantité est une somme de carrés, toujours positive, et constitue une mesure de l'intensité des taux de déformations présents localement dans l'écoulement. En conséquence la puissance des efforts intérieurs dans un fluide newtonien est toujours négative, égale à

$$P_{\text{int}} = -2\eta \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}} d^3x = -P_{\text{diss}} \leq 0, \quad (7.91)$$

qui est donc une *puissance dissipée par les effets visqueux*. En effet, le bilan général (7.84),

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} - P_{\text{diss}}, \quad (7.92)$$

s'écrit, si le système fluide est isolé,

$$\frac{dE_c}{dt} = -P_{\text{diss}} \leq 0. \quad (7.93)$$

Il signifie que l'énergie cinétique de l'écoulement ne peut que diminuer au cours du temps, de sorte que celui-ci va finir par disparaître. On dit en conséquence que les fluides visqueux constituent des *systèmes dissipatifs*. Bien entendu les fluides parfaits, dans lesquels  $\eta = 0$  donc

$$P_{\text{diss}} = 0,$$

constituent une exception : ils représentent des *systèmes conservatifs* dans lesquels un écoulement même non entretenu perdurerait éternellement. Cette propriété remarquable (et irréaliste !) explique sans aucun doute leur nom de fluides « parfaits ».

### 7.5.3 Bilan d'énergie cinétique dans un écoulement ouvert : pertes et gains de charge

Considérons un écoulement *permanent* (ou quasi permanent) de type *ouvert*, caractérisé par le fait que du fluide entre et sort « sans cesse » d'une région d'intérêt  $\Omega_t$  « *tube de courant* » au sens de la définition donnée après l'équation (7.11), et de la figure 7.1. Explicitons à un instant  $t$  donné le bilan d'énergie cinétique (7.92). La densité volumique d'énergie cinétique étant

$$\rho e_c = \rho \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2},$$

il vient, d'après la formule de transport (3.9), compte tenu de l'hypothèse de stationnarité,

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho e_c d^3x \\ &= \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho e_c)}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} (\rho e_c) \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S \\ \frac{dE_c}{dt} &= \frac{\rho}{2} \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{v}}^2 \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S, \end{aligned} \quad (7.94)$$

où l'on rappelle que  $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}})$  désigne le champ des normales sortantes unitaires sur  $\partial\Omega_t$ . Faisons l'**hypothèse H1** que les *surfaces d'entrée*  $S_e$  et de *sortie*  $S_s$  du tube de courant  $\Omega_t$  sont *planes*, et qu'à leur niveau l'écoulement est (quasi) *unidirectionnel*,

$$\bar{\mathbf{v}} = -v(\bar{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{sur } S_e, \quad \bar{\mathbf{v}} = +v(\bar{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{sur } S_s. \quad (7.95)$$

Cette hypothèse implique que le débit massique (7.12) circulant dans le tube de courant

$$\dot{m} = \rho \iint_{S_e} v \, d^2S = \rho \iint_{S_s} v \, d^2S. \quad (7.96)$$

Insérée dans (7.94), elle donne d'autre part, puisque  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$  s'annule sur le bord latéral de  $\Omega_t$ ,

$$\frac{dE_c}{dt} = -\frac{\rho}{2} \iint_{S_e} v^3 \, d^2S + \frac{\rho}{2} \iint_{S_s} v^3 \, d^2S. \quad (7.97)$$

Introduisons les fonctions valeurs moyennes sur les sections d'entrée et de sortie du tube de courant,

$$\langle f \rangle_e = \frac{1}{A_e} \iint_{S_e} f(\bar{\mathbf{x}}) \, d^2S \quad \text{et} \quad \langle f \rangle_s = \frac{1}{A_s} \iint_{S_s} f(\bar{\mathbf{x}}) \, d^2S, \quad (7.98)$$

en utilisant les notations de la section 7.1.2. On a alors

$$\dot{m} = \rho \langle v \rangle_e A_e = \rho V_e A_e = \rho \langle v \rangle_s A_s = \rho V_s A_s \quad (7.99)$$

avec  $V_e$  et  $V_s$  les *vitesses débitantes* en entrée et sortie. D'autre part l'équation (7.97) s'écrit

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\rho}{2} \langle v^3 \rangle_s A_s - \frac{\rho}{2} \langle v^3 \rangle_e A_e. \quad (7.100)$$

Définissons les *coefficients d'énergie cinétique*, sans dimension,

$$\alpha_e = \frac{\langle v^3 \rangle_e}{V_e^3} \quad \text{et} \quad \alpha_s = \frac{\langle v^3 \rangle_s}{V_s^3}. \quad (7.101)$$

Dans le cas d'un fluide parfait, et d'un tube de courant dont les bords latéraux sont des parois solides (cas fréquent!...), comme il n'y a pas de frottements à ces parois on suppose souvent que l'écoulement est uniforme sur les sections  $S_e$  et  $S_s$ ,

$$v \text{ est indépendante de } \bar{\mathbf{x}} \text{ sur } S_e \text{ et } S_s.$$

En conséquence

$$\alpha_e = \alpha_s = 1.$$

Cette formule est aussi approximativement valable (en moyenne) en écoulement turbulent, car alors le profil de vitesse est assez uniforme, en dehors de couches limites au voisinage des parois. Dans le cas d'un écoulement laminaire dans un tuyau, étudié dans l'exercice 7.4, où les effets visqueux sont « très importants », par contre

$$\alpha_e = \alpha_s = 2.$$

Ces deux cas « extrêmes » suggèrent qu'en général les coefficients  $\alpha$  sont proches de 1, ce qui est souvent vérifié. En utilisant ces coefficients  $\alpha$ , on a en tout cas en général

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\rho}{2} A_s \alpha_s V_s^3 - \frac{\rho}{2} A_e \alpha_e V_e^3 = \dot{m} \left( \frac{1}{2} \alpha_s V_s^2 - \frac{1}{2} \alpha_e V_e^2 \right). \quad (7.102)$$

Travaillons maintenant pour reformuler le terme de puissance des forces de pesanteur (7.86),

$$P_{\text{pesanteur}} = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x . \quad (7.103)$$

Grâce à l'un des résultats de l'exercice 2.2 du cours de calcul tensoriel on a, en choisissant l'axe des  $z$  vers le haut comme en section 7.3.3,

$$\bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = -g(\bar{\nabla}z) \cdot \bar{\mathbf{v}} = g z \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} - g \operatorname{div}(z\bar{\mathbf{v}}) = -g \operatorname{div}(z\bar{\mathbf{v}})$$

du fait de l'hypothèse d'incompressibilité. En utilisant la formule intégrale de la divergence on en déduit

$$P_{\text{pesanteur}} = -\rho g \iiint_{\Omega_t} \operatorname{div}(z\bar{\mathbf{v}}) d^3x = -\rho g \iint_{\partial\Omega_t} z\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S .$$

D'après la décomposition du bord de notre tube de courant en sections d'entrée  $S_e$ , de sortie  $S_s$ , plus le bord latéral sur lequel  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$  s'annule, on a

$$\begin{aligned} P_{\text{pesanteur}} &= -\rho g \iint_{S_e} z\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S - \rho g \iint_{S_s} z\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S \\ P_{\text{pesanteur}} &= \rho g \iint_{S_e} zv d^2S - \rho g \iint_{S_s} zv d^2S \end{aligned}$$

en faisant usage de (7.95). En posant l'**hypothèse H2** que *les sections  $S_e$  et  $S_s$  ont une faible extension verticale*, i.e. que

$$z \simeq z_e \quad \text{sur } S_e \quad \text{et} \quad z \simeq z_s \quad \text{sur } S_s , \quad (7.104)$$

on obtient

$$P_{\text{pesanteur}} \simeq \rho g z_e V_e A_e - \rho g z_s V_s A_s = \dot{m}(gz_e - gz_s) . \quad (7.105)$$

Considérons maintenant les puissances des forces de pression et de frottement visqueux,

$$P_{\text{pression}} + P_{\text{visqueux}} = - \iint_{\partial\Omega_t} p \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^2S + 2\eta \iint_{\partial\Omega_t} (\bar{\bar{\mathbf{D}}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d^2S . \quad (7.106)$$

Le bord latéral, sur lequel  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$ , ne contribue pas à la première intégrale. En fluide parfait, le terme visqueux est toujours nul. En **fluide visqueux**, et en supposant que le **bord latéral** est une **paroi solide** - c'est notre **hypothèse H3**, nécessaire seulement en fluide visqueux - on y a  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}$ , donc ce terme visqueux est encore nul sur le bord latéral. En conséquence ces deux puissances doivent se calculer seulement sur  $S_e$  et  $S_s$ . Afin de mener à bien ce calcul, on va exploiter le fait que les écoulements sur ces sections ont été supposés unidirectionnels, cf. l'équation (7.95). D'après l'étude faite en section 7.5.1, et en particulier le résultat (7.82), valable ici à cause de (7.104), la pression est approximativement constante sur les sections  $S_e$  et  $S_s$ ,

$$p \simeq p_e \quad \text{sur } S_e \quad \text{et} \quad p \simeq p_s \quad \text{sur } S_s . \quad (7.107)$$

On en déduit

$$P_{\text{pression}} = - \iint_{S_e} p \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^2S - \iint_{S_s} p \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^2S = p_e V_e A_e - p_s V_s A_s = \frac{\dot{m}}{\rho} (p_e - p_s) \quad (7.108)$$

compte tenu de (7.99). D'autre part, en choisissant par exemple sur  $S_s$  un repère local tel que  $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{e}}_1$ , on peut utiliser les notations de la section 7.5.1 pour expliciter l'intégrand de la puissance des contraintes visqueuses dans (7.106). Il vient

$$(\bar{\bar{\mathbf{D}}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} = (\bar{\bar{\mathbf{D}}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1) \cdot (v\bar{\mathbf{e}}_1) = D_{11}v = \frac{\partial v}{\partial x_1}v = 0$$

en vertu du fait que l'écoulement est forcément uniforme dans la direction  $\bar{e}_1$ , cf. la discussion au niveau de l'équation (7.75). Ainsi la puissance des forces de frottement visqueux réputées extérieures est, en première approximation, nulle. Le bilan (7.92) s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= P_{\text{pesanteur}} + P_{\text{pression}} - P_{\text{diss}} \\ \dot{m} \left( \frac{1}{2} \alpha_s V_s^2 - \frac{1}{2} \alpha_e V_e^2 \right) &= \dot{m} (gz_e - gz_s) + \frac{\dot{m}}{\rho} (p_e - p_s) - P_{\text{diss}} \end{aligned} \quad (7.109)$$

Introduisons, par analogie avec (7.64), les *charges généralisées*

$$\boxed{H_e = z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{\alpha_e V_e^2}{2g}} \quad \text{et} \quad \boxed{H_s = z_s + \frac{p_s}{\rho g} + \frac{\alpha_s V_s^2}{2g}}. \quad (7.110)$$

En revenant à l'origine physique du terme de dissipation, ce qui permettra de reprendre ce bilan dans d'autres cas avec d'autres puissances agissantes, en plus de celles dues aux forces de pesanteur et de pression amont - aval, on peut écrire notre *bilan global d'énergie cinétique* sous la forme

$$\frac{dE_c}{dt} - P_{\text{pesanteur}} - P_{\text{pression}} = \dot{m} g (H_s - H_e) = P_{\text{agissante supplémentaire}} = P_{\text{int}} = -P_{\text{diss}}. \quad (7.111)$$

**Cas où la puissance agissante supplémentaire est celle des efforts intérieurs : pertes de charge**

Dans ce cas, qui est, en fait, celui que nous venons de considérer, il vient

$$\boxed{\dot{m} g (H_e - H_s) = P_{\text{diss}} \geq 0}. \quad (7.112)$$

En *fluide parfait*, comme

$$P_{\text{diss}} = 0$$

et, le plus souvent,  $\alpha_e \simeq \alpha_s \simeq 1$ , on vient de retrouver par cette méthode *énergétique* le premier théorème de Bernoulli (7.64),

$$H_e = H_s.$$

Ce théorème a donc une interprétation *énergétique* : il exprime d'une certaine manière la *conservation de l'énergie* dans les fluides parfaits (incompressibles et isothermes),

$$\rho g H = \rho g z + p + \frac{1}{2} \rho \bar{v}^2 \quad (7.113)$$

étant une *densité volumique d'énergie totale*, somme de la densité volumique d'énergie potentielle de pesanteur, de la densité volumique d'« énergie de pression » et de la densité volumique d'énergie cinétique<sup>21</sup>.

En *fluide visqueux* par contre l'équation (7.112), désignée par certains auteurs comme le « *théorème de Bernoulli généralisé* », montre l'existence d'une « perte d'énergie » ou *perte de charge*<sup>22</sup> entre  $S_e$  et  $S_s$ , qui est exactement *due à la dissipation visqueuse*. On distingue en

21. En étant plus rigoureux sur la terminologie « thermodynamique », même si les aspects thermiques sont ici inexistantes, l'« énergie totale » (7.113) est en fait une « *enthalpie totale* » en situation isotherme, cf. par exemple Feidt (1996).

22. 'Head loss' en anglais.

général les *pertes de charge « régulières »* dans des tuyaux ou canaux longs, proportionnelles à la longueur de ces tuyaux ou canaux (cf. par exemple la section 8.2.4 du prochain chapitre), des *pertes de charge « singulières »* dues à des vannes, robinets, coude, convergent, etc... Des lois phénoménologiques ont été développées pour estimer ces pertes de charge, cf. par exemple White (1994); Idel'cik (1999).

**Cas où la puissance agissante supplémentaire est celle d'une pompe :  
gain de charge pompe - hauteur manométrique**

Pour que l'écoulement soit effectivement permanent, il faut « donner » de la charge au fluide, par exemple avec un « *château d'eau* », comme cela sera étudié (avec un « *château d'eau* » réduit à sa forme la plus simple!) dans le problème 7.5.

Une autre façon de donner de la charge au fluide consiste à utiliser une *pompe*, comme cela sera étudié dans le problème 7.3. Dans ce cas, on admet que le bilan global (7.111) reste valable dans le tube de courant situé entre la section d'admission (en entrée) et la section de refoulement (en sortie) de la pompe, et comprenant celle-ci, mais en remplaçant la « puissance agissante supplémentaire » par celle exercée par les parties solides (en mouvement) de la pompe sur le fluide. On néglige ainsi, en première approximation, la dissipation, et on obtient donc que la pompe produit un *gain de charge* proportionnel à sa puissance mécanique  $P_{\text{pompe}}$ ,

$$\dot{m} g (H_s - H_e) = P_{\text{pompe} \rightarrow \text{fluide}} = P_{\text{pompe}} > 0 . \quad (7.114)$$

En général on introduit la « *hauteur manométrique totale* » de la pompe,  $H_{\text{pompe}}$ , via la formule

$$P_{\text{pompe}} = \dot{m} g H_{\text{pompe}} . \quad (7.115)$$

Cette hauteur manométrique correspond donc exactement au gain de charge dans la pompe,

$$H_s - H_e = H_{\text{pompe}} > 0 . \quad (7.116)$$

Ce gain de charge correspond, lorsque l'admission et le refoulement se font dans des conditions similaires, à un gain de pression  $\delta p_{\text{pompe}}$ ; alors la puissance

$$P_{\text{pompe}} = q \delta p_{\text{pompe}} \quad \text{avec} \quad \delta p_{\text{pompe}} = p_s - p_e = \rho g H_{\text{pompe}} . \quad (7.117)$$

Tout se passe comme si on « remontait » le fluide d'une hauteur  $H_{\text{pompe}}$  ...

**Cas où la puissance agissante supplémentaire est celle d'une turbine :  
perte de charge turbine**

De même, dans un tube de courant centré sur une *turbine hydraulique*, on admet que le bilan global (7.111) reste valable, mais en remplaçant la « puissance agissante supplémentaire » par celle exercée par les parties solides (en mouvement) de la turbine sur le fluide... puissance qui est maintenant négative puisque l'on prélève de l'énergie au fluide :

$$\dot{m} g (H_s - H_e) = P_{\text{turbine} \rightarrow \text{fluide}} = -P_{\text{turbine}} . \quad (7.118)$$

On a donc une « *perte de charge turbine* » définie par

$$\dot{m} g (H_e - H_s) = P_{\text{turbine}} > 0 . \quad (7.119)$$

### Conclusion partielle sur pertes et gains de charge et dissipation

Les calculs de pertes et gains de charge dans les circuits hydrauliques sont très importants en *mécanique des fluides appliquée* : des exemples concrets seront donnés dans les problèmes 7.3 et 7.5.

D'un point de vue plus fondamental, il conviendrait de compléter ces bilans d'énergie cinétique par un bilan d'énergie interne, et en particulier de montrer que l'énergie dissipée est transformée en énergie interne. Un tel bilan sort du cadre de cet enseignement ; voir à ce sujet les chapitres III de Huerre (1998) ou Chassaing (2000), ou le chapitre 1 de Plaut (2021b).

## 7.6 Remarques de conclusion

Ce chapitre se poursuivra dans le suivant consacré aux applications de l'*analyse dimensionnelle* à la mécanique des fluides. Ainsi, le très important « *nombre de Reynolds* » sera introduit et discuté dans le chapitre 8, qu'il faut mieux lire avant d'aborder les problèmes 7.5 et 7.6!..

Nous terminons en évoquant l'importance actuelle de la *simulation numérique* en mécanique des fluides, qui tend à remplacer de plus en plus les expérimentations « réelles », au point que l'on parle maintenant d'expériences « numériques ». Même s'il est clair que les expériences « réelles » ne disparaîtront jamais, il est aussi clair que grâce à la puissance de l'outil informatique on peut faire beaucoup de progrès grâce aux expériences « numériques ». Ces expériences se font avec des méthodes qui ressemblent pour certaines à celles utilisées en mécanique des solides, et déjà évoquées au niveau de la section 4.2.4, à savoir des *méthodes d'éléments finis* (cf. par exemple Zienkiewicz & Taylor 2000). Des *méthodes* concurrentes dites de *volumes finis* sont aussi beaucoup utilisées, cf. par exemple Patankar (1980) ; un exemple concret d'utilisation d'un code volumes finis développé au Lemta sera montré sur la figure 8.1...

## 7.7 Exercices et problèmes

### Exercice 7.1 Bilan de force général en hydro- ou aérostatique

Soit un objet solide occupant un ouvert  $\Omega_t$  dans un fluide de masse volumique  $\rho$ . Ce système est supposé à l'équilibre, ainsi  $p = p_0 - \rho g z$  avec  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $z$  la coordonnée verticale. Calculez la résultante des efforts de pression exercés par le fluide sur le solide. Montrez que la résultante des efforts liés à la pression uniforme  $p_0$  est nulle,

$$\iint_{\partial\Omega_t} -p_0 \bar{\mathbf{n}} \, d^2S = \bar{\mathbf{0}}, \quad (7.120)$$

avec  $\bar{\mathbf{n}}$  la normale unitaire sortant de  $\Omega_t$ , alors que la résultante des efforts liés au terme  $-\rho g z$ ,

$$\iint_{\partial\Omega_t} +\rho g z \bar{\mathbf{n}} \, d^2S = \quad , \quad (7.121)$$

est toujours verticale. Donnez l'interprétation physique et le nom de cette dernière force.

*Indication* : utilisez la formule intégrale de la divergence, appliquée à certains tenseurs d'ordre 2.

**Exercice 7.2 Calcul très simplifié de l'altitude atteinte par un ballon d'hélium lesté**

En octobre 2012, Félix Baumgartner a battu plusieurs records du monde, dont celui de l'altitude la plus élevée atteinte par un homme en ballon (cf. [www.redbullstratos.com](http://www.redbullstratos.com)). On veut développer un modèle très simplifié pour estimer l'altitude maximale atteinte par le ballon d'hélium avec capsule qu'il a utilisé. L'atmosphère dans laquelle monte le ballon est supposée « standard » ; ses propriétés (accessibles par le 'Standard Atmosphere Package' de Mathematica ou sur le site web [www.digitaldutch.com/atmoscalc](http://www.digitaldutch.com/atmoscalc)) sont présentées sur la figure 7.4.

**1** On suppose que le ballon reste toujours sphérique de même rayon  $a = 40$  m et volume  $V$ , et que l'hélium intérieur, de masse molaire  $M_{\text{He}} = 4 \text{ g mol}^{-1}$ , reste à une température  $T$  et pression  $p$  proches de celles qui existent au sol,  $T = T_0 = 288 \text{ K}$  et  $p = p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Calculez alors, en supposant que l'hélium est parfait, sa masse volumique  $\rho_{\text{He}}$ , et sa masse totale  $m_{\text{He}}$ , au sol et durant l'ascension.

**2** La masse des infrastructures solides (capsule, enveloppe du ballon...) et de Félix  $m_s = 3 \text{ t}$ . On néglige dans ce qui suit le volume de la capsule : le système est une sphère de rayon  $a$  et de masse  $m = m_s + m_{\text{He}}$  plongée dans l'atmosphère. On suppose le mouvement de cette sphère purement vertical, avec une accélération  $\gamma$ . Localement autour du ballon, on néglige tout effet aérodynamique, et de compressibilité de l'air ambiant. En utilisant une loi générale de l'hydro- ou aérostatique établie en TD, écrivez  $m\gamma$  comme une différence entre deux forces antagonistes, que vous nommerez physiquement. Comment évolue, d'après ce modèle,  $\gamma$  en fonction de  $z$  ?

**3.a** On admet qu'à cause des frottements visqueux le ballon arrête son ascension à une altitude  $z_m$  où la formule précédente conduit à une accélération nulle,  $\gamma = 0$ . Calculez analytiquement puis numériquement la valeur de la masse volumique  $\rho$  de l'air à cette altitude.

**3.b** En utilisant des données de la figure 7.4, estimez  $z_m$  avec ce modèle. Commentez physiquement.

**Exercice 7.3 Hydrostatique : étude de deux manomètres différentiels**

On admet que, dans un fluide visqueux comme de l'eau, en écoulement dans une canalisation, il existe une chute de pression<sup>23</sup> le long de la canalisation :  $p$  décroît en première approximation linéairement avec la coordonnée  $x$  dans la direction de l'écoulement. Le but de cet exercice est l'étude de deux « *manomètres* » permettant la mesure de la chute de pression entre deux points A et B d'une canalisation,

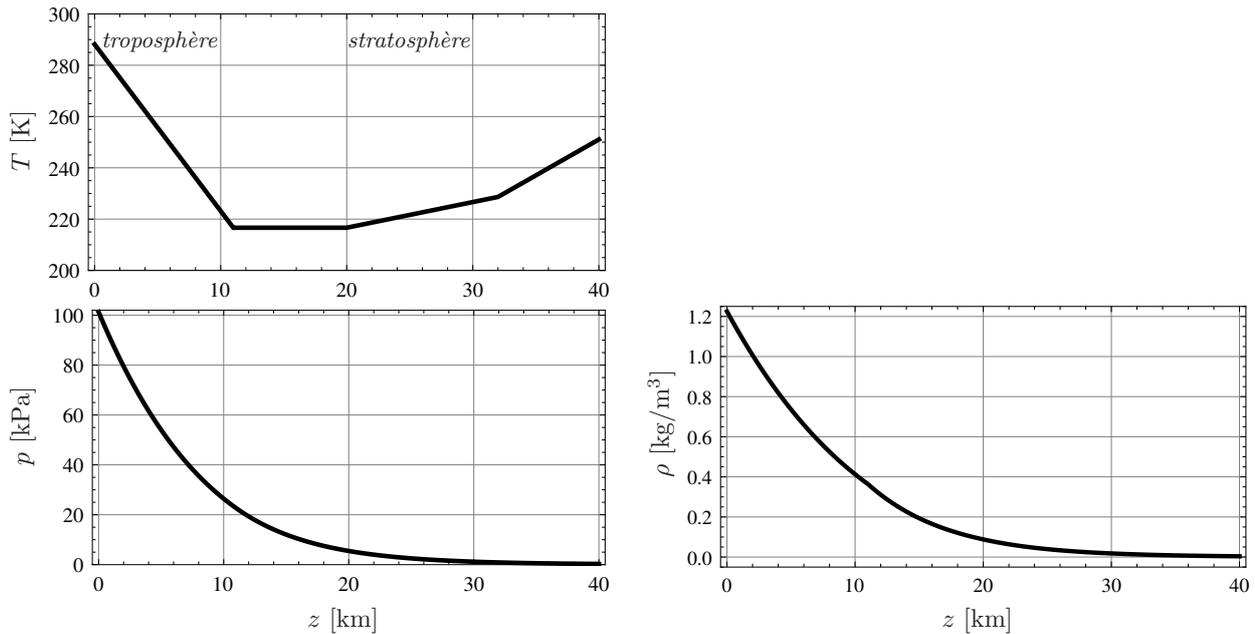
$$\delta p = p_A - p_B .$$

Ces manomètres sont constitués de petites canalisations tubulaires. En première approximation, les fluides dans les canalisations manométriques sont au repos.

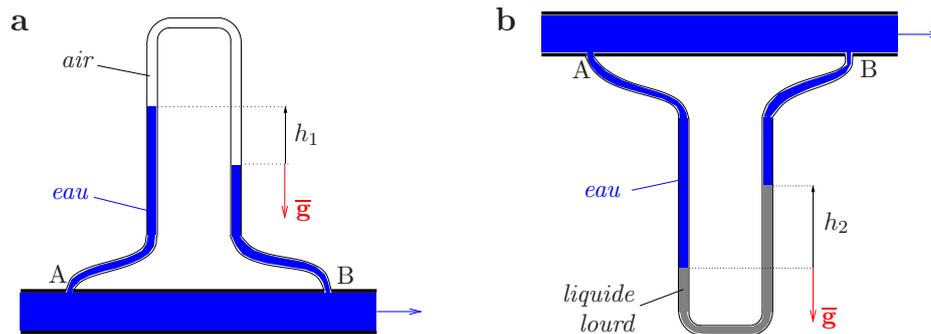
**1.1** Calculez la hauteur  $h_1$  que l'on pourrait lire sur un manomètre en U renversé comme celui présenté sur la figure 7.5a.

**1.2** Faites une application numérique dans le cas où  $\delta p = 50 \text{ Pa}$ . En pratique on lit  $h_1$  à l'oeil, sur des graduations. La précision de lecture de  $h_1$  est donc de  $\pm 0,5 \text{ mm}$ . Estimez en conséquence la précision sur  $\delta p$  obtenue avec ce manomètre.

23. directement liée à la « perte de charge ».



**Fig. 7.4** – D’après le modèle *US Standard Atmosphere* - 1976, représentation, en fonction de l’altitude  $z$ , de la température absolue  $T$ , pression  $p$ , et masse volumique  $\rho$  de l’air.



**Fig. 7.5** – a : *Manomètre en U renversé*. b : *Manomètre en U à deux fluides*. Dans les deux cas des tubes plastiques flexibles sont utilisés pour relier le manomètre, en général fait de verre ou de plastique rigide, à la canalisation, aux deux points de prise de pression A et B.

**2.1** Calculez la hauteur  $h_2$  que l’on pourrait lire sur un manomètre en U à deux fluides de la figure 7.5b. Le liquide lourd utilisé est un mélange d’éther et de trichloréthylène, non miscible avec l’eau, de masse volumique  $\rho_\ell = 1010 \text{ kg/m}^3$  dans les conditions ambiantes.

**2.2** Faites une application numérique dans le cas où  $\delta p = 50 \text{ Pa}$ . Lequel de ces deux systèmes conduit à la mesure la plus précise de la chute de pression ?

#### Exercice 7.4 *Étude de l’écoulement laminaire dans un tuyau*

Calculez l’écoulement laminaire unidirectionnel symétrique dans un tuyau droit à section circulaire, écoulement dit de *Hagen-Poiseuille*<sup>24</sup> : champs de vitesse et de pression motrice, pertes de charge en lien avec la dissipation visqueuse.

*Commentaire* : des éléments de solution se trouvent dans les équations (8.20) à (8.23).

24. Hagen, ingénieur allemand, et Poiseuille, médecin français, ont vécu au XIX<sup>ème</sup> siècle.

**Problème 7.1** *Étude et calcul d'écoulements en tuyau par méthode semi-globale*

On s'intéresse à des *écoulements en tuyau d'un fluide newtonien* (masse volumique  $\rho$ , viscosité dynamique  $\eta$ ) à l'aide d'une méthode semi-globale qui permet aussi d'étudier les équilibres dynamiques en jeu. En dehors de la toute dernière question 9, qui nécessite l'usage de lois qui seront établies dans le chapitre 8, les écoulements sont supposés *laminaires*. Le tuyau considéré, de paroi lisse, est long, les effets d'entrée-sortie sont négligeables : les écoulements sont complètement établis. Dans un repère  $Oxyz$  avec  $Oz$  axe de révolution du tuyau, on utilise un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Le tuyau de rayon intérieur  $a$  contient au moins le domaine  $\Omega = \{(r, \theta, z) \in [0, a[ \times [0, 2\pi[ \times ]0, L[ \}$ , dans lequel le champ de vitesse

$$\bar{\mathbf{v}} = w(r) \bar{\mathbf{e}}_z \text{ n'est pas supposé plus connu que cela,}$$

et le gradient de pression motrice

$$\overline{\nabla \hat{p}} = -G \bar{\mathbf{e}}_z \text{ est supposé uniforme.}$$

La direction verticale, opposée à celle de la gravité  $\bar{\mathbf{g}}$ , est donnée par la direction  $Z$  d'un repère  $OXYZ$  qui peut être différent de  $Oxyz$ .

**1.a** Donnez la forme du champ de pression motrice dans  $\Omega$ .

**1.b** Physiquement, quel doit être le signe de la constante  $G$  pour que l'écoulement se produise dans la direction  $z$ , i.e. pour que la vitesse au centre  $W = w(0)$  soit positive ?

*Cette dernière hypothèse sera toujours posée.*

**2** Montrez que le champ de pression physique dans  $\Omega$  est

$$p = p_0 + Az + BZ$$

et calculez  $A$  et  $B$ . Dorénavant on note  $p_m = Az$ ,  $p_h = p_0 + BZ$ . Comment peut on qualifier ces contributions ?

**3.a** Soit  $D$  un sous domaine quelconque de  $\Omega$ , de normale unitaire sortante  $\bar{\mathbf{n}}$ . Montrez, en faisant usage de l'analyse tensorielle, que

$$\iiint_D \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial D} (-p_h \bar{\mathbf{n}}) d^2S = \bar{\mathbf{0}}. \quad (7.122)$$

Quelle est l'interprétation physique de cette équation ?

**3.b** Montrez que,  $\bar{\mathbf{T}}_v$  désignant la contribution visqueuse au vecteur contrainte sur la frontière de  $D$ ,

$$\iint_{\partial D} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S = \iint_{\partial D} (-p_m \bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{T}}_v) d^2S. \quad (7.123)$$

Quelle est l'interprétation physique de cette équation ?

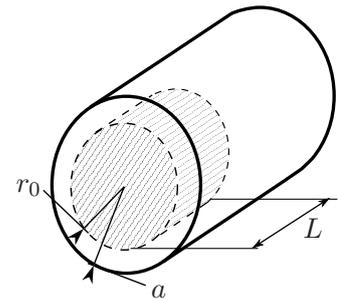
**4.a** Dans le cas où  $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{e}}_r$ , montrez que  $\bar{\mathbf{T}}_v$  est de la forme  $-\tau \bar{\mathbf{e}}_z$ , et reliez  $\tau = \tau(r)$  à  $w'(r)$ . Donnez au moins une raison physique permettant d'expliquer que  $\tau(r) > 0$  dès que  $r > 0$ .

**4.b** Dans le cas où en plus  $r = a$ , donnez l'expression vectorielle de la contrainte visqueuse exercée par le fluide sur le tuyau. Sa norme est la « *contrainte pariétale* »  $\tau_p$ , que vous relierez à  $\tau(a)$ . Commentez physiquement.

5.a Explicitez le bilan (7.123) dans le cas où  $D$  est un domaine fluide plus petit que  $\Omega$ ,

$$D = \{(r, \theta, z) \in ]0, r_0[ \times [0, 2\pi[ \times ]0, L]\},$$

avec  $r_0 \in ]0, a[$ , comme représenté ci-contre.



Déduisez-en  $\tau(r_0)$  en fonction de  $G$  et  $r_0$ , et commentez physiquement cette relation.

5.b En étendant ce qui précède au cas  $r_0 = a$ , montrez que la contrainte pariétale  $\tau_p$  dépend de façon simple de  $G$  et  $a$ . Commentez physiquement cette relation.

6 Retrouvez à l'aide de la relation établie en 5.a, valable pour  $r = r_0$  quelconque, la forme précise de l'écoulement laminaire vue en cours.

7 On considère dorénavant le cas d'un tuyau horizontal ; pour fixer les notations on suppose que  $Z = y$ . Calculez la force totale  $\bar{\mathbf{F}}$  exercée par le tuyau sur le fluide contenu dans  $\Omega$ , au niveau de leur surface de contact  $S_l$ , puis, par le principe de l'action-réaction, la force totale  $\bar{\mathbf{F}}'$  exercée par le fluide contenu dans  $\Omega$  sur le tuyau. Expliquez l'origine physique précise des deux termes qui composent cette force.

8.a Calculez numériquement le gradient de pression motrice, la contrainte pariétale et ces deux termes de force dans le cas d'un écoulement de pétrole de masse volumique  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ , viscosité dynamique  $\eta = 0,025 \text{ Pa s}$ , dans un tuyau de rayon  $a = 4 \text{ cm}$ , longueur  $L = 20 \text{ m}$ , avec une vitesse débitante  $V = 4 \text{ m/s}$ . Commentez physiquement.

8.b En prenant du recul, critiquez ce modèle, dans le cas de l'application numérique précédente.

9 On étudie le cas d'un écoulement *turbulent* dans les conditions de la question 8.a. On admet que la relation établie question 5.b entre  $\tau_p$ ,  $G$  et  $a$  est aussi valable dans ce cas. À l'aide de résultats du chapitre 8, calculez numériquement le gradient de pression motrice puis la contrainte pariétale dans ce cas. Comparez aux résultats de la question 8.a et commentez physiquement.

### Exercice 7.5 *Équilibre d'un liquide en rotation autour d'un axe vertical*

On considère un liquide incompressible visqueux contenu dans un récipient et surmonté d'air atmosphérique. Le récipient est posé sur une table tournante horizontale, en rotation autour d'un axe  $Oz$  vertical à la vitesse angulaire  $\omega$  constante. On rappelle que, dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié à la table, à l'équilibre la seule force d'inertie est la force volumique d'inertie d'entraînement (A.45).

1 Explicitez cette force et rappelez son interprétation physique.

2 Explicitez l'équation de l'équilibre local du liquide dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Montrez que l'on peut en déduire la forme générale du champ de pression dans le liquide, puis la forme de la surface libre supérieure du liquide, où il est en contact avec de l'air atmosphérique. Esquissez la forme de cette surface sur un schéma.

**Exercice 7.6 Étude de l'établissement d'un écoulement de Couette plan**

Un fluide newtonien visqueux est confiné entre deux plans situés en  $y = 0$  et  $y = h$ . Ce système est réalisé pratiquement dans un système de Couette cylindrique de très petit inter-rayon  $h = b - a \ll a$ , cf. la légende de la figure 7.2. Partant d'une situation de repos, à  $t = 0$  on suppose que l'on est capable d'imposer quasi instantanément une vitesse  $V\bar{\mathbf{e}}_x$  à la paroi située en  $y = h$ , la paroi située en  $y = 0$  restant fixe. On suppose que l'écoulement ainsi créé est de la forme

$$\bar{\mathbf{v}} = v(y,t) \bar{\mathbf{e}}_x .$$

**1** Quelle est l'équation régissant la dynamique du champ  $v$  et du champ de pression  $p$ , sachant que le système est disposé dans un plan horizontal ?

**2** Montrez que le champ de pression  $p$  doit être homogène.

**3** Résolvez l'équation de la dynamique du champ  $v$ . Montrez que la relaxation vers l'écoulement de Couette plan  $v = Vy/h$  se fait comme décrit section 7.2.1.

*Indications* : vous poserez  $u = v - Vy/h$ , et chercherez  $u$  sous la forme d'une série de Fourier en  $y$ ,

$$u(y,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t) \sin\left(n\pi \frac{y}{h}\right) .$$

**Problème 7.2 Étude d'un rhéomètre de Couette cylindrique**

Un rhéomètre de Couette cylindrique (figure 7.2a) est une cavité comprise entre un cylindre intérieur tournant, de rayon extérieur  $a$ , et un cylindre extérieur fixe, de rayon intérieur  $b$ , remplie du liquide newtonien à étudier. En mesurant le couple appliqué au cylindre tournant en fonction de sa vitesse de rotation constante  $\Omega$ , on veut remonter à la viscosité du liquide. Comme on l'a vu dans le problème de calcul tensoriel 2.2, on peut par symétrie et, puisque le fluide est incompressible, supposer que le champ de vitesse est de la forme  $\bar{\mathbf{v}} = V(r) \bar{\mathbf{e}}_\theta$ .

**1** Explicitiez le bilan local de quantité de mouvement dans le liquide et montrez à partir de celui-ci que le champ de pression motrice ne dépend que de  $r$  seulement,  $\hat{p} = \hat{p}(r)$ .

**2** Calculez le champ de vitesse dans le liquide, et représentez le champ de vecteurs correspondant sur un dessin.

**3** Calculez le champ de pression dans le liquide, et précisez la forme de la surface supérieure du liquide en contact avec l'atmosphère, située « en moyenne » en  $z = h$ .

*Commentaire et indications* : Cette question relativement difficile peut être considérée comme une question « subsidiaire », et devra donc plutôt être traitée à la fin. On supposera que le modèle obtenu à la question précédente pour le champ de vitesse est valable jusqu'à la surface libre. L'objectif est surtout de montrer que celle-ci est très peu déformée ; ainsi, avec les paramètres de l'application numérique de la question 6.2, vous devriez pouvoir démontrer que l'on a des variations de hauteur de la surface libre de moins de 1 mm.

**4** Quelle est la valeur du couple moteur qu'il faut exercer sur le cylindre intérieur pour entretenir son mouvement ? Expliquez comment on peut mesurer la viscosité dynamique  $\eta$  du liquide.

5 Dans le but d'avoir une bonne précision sur la mesure de  $\eta$ , quelle est la bonne « géométrie » d'un rhéomètre de ce type ?

6.1 Faites un bilan global d'énergie cinétique pour le fluide contenu dans le rhéomètre, et interprétez physiquement ce bilan.

6.2 Si  $a = 3$  cm,  $b = 4$  cm,  $h = 20$  cm, le fluide est une huile 1000 fois plus visqueuse que l'eau, quelle puissance doit développer le moteur pour entretenir un écoulement permanent à la vitesse de rotation  $\Omega = 5$  rad/s ?

7 À quoi faut-il faire attention lorsque l'on fait de telles mesures rhéologiques ?

### Problème 7.3 Bilans de force et de charge pour les pompiers

On considère un camion de pompiers contenant un réservoir d'eau connecté à une pompe. Celle-ci est située au niveau du bas du réservoir, pris comme origine des altitudes,  $z = 0$ . La surface supérieure de l'eau du réservoir se trouve en  $z = h \simeq 2$  m. Cette pompe débite de façon quasi permanente dans un tuyau de caoutchouc de diamètre<sup>25</sup>  $d = 70$  mm, de longueur  $L = 50$  m, avec un débit volumique

$$q = \dot{m}/\rho = 10 \text{ /s} . \quad (7.124)$$

On admet provisoirement<sup>26</sup> que les pertes de charge régulières dues à la dissipation visqueuse associée à l'écoulement turbulent dans toute la longueur du tuyau

$$\delta H_{\text{tuyau}} = 3,9 \text{ mètres d'eau} , \quad (7.125)$$

et ce quelque soit la forme prise par le tuyau (pas forcément rectiligne). En bout de tuyau est fixée une « lance » en métal, qui consiste essentiellement en un robinet suivi d'un cône convergent profilé de diamètre d'entrée  $d = 70$  mm et de diamètre de sortie  $d_j = 20$  mm. On admet qu'il n'y a pas de pertes de charge singulières dues au robinet, qui lorsqu'il est ouvert dégage totalement le passage pour l'eau, ni au convergent. Cette situation est représentée sur la figure 7.6a.

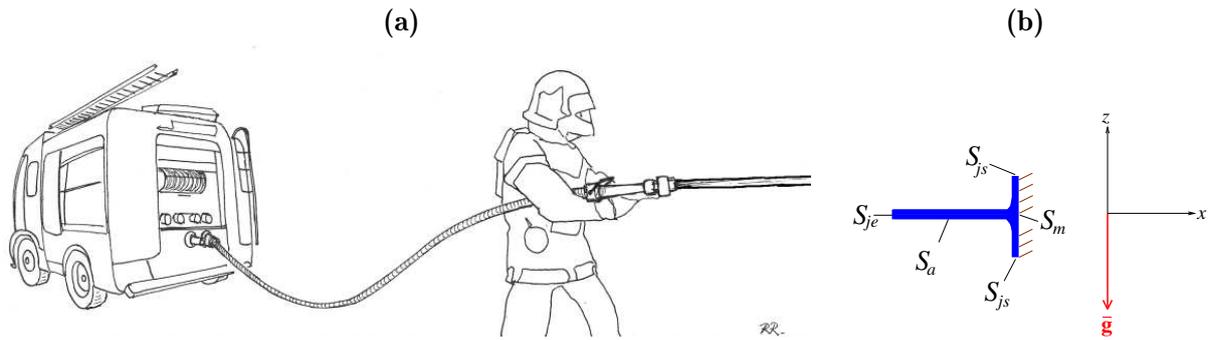
1 Quelle est la vitesse de sortie  $V_j$  du jet d'eau dans l'air ?

2 On considère ici une situation où le jet sortant de la lance est dirigé sur un mur. Sur ce mur, il diverge comme cela est représenté sur la figure 7.6b. On fait un bilan sur le volume d'eau  $\Omega_t$  représenté sur cette figure. Son bord  $\partial\Omega_t$  est une surface de révolution d'axe  $Ox$  horizontal : sa surface d'entrée est  $S_{je}$ , disque de diamètre  $d_j$ , et d'aire  $A_j$  ; sa surface latérale en contact avec l'air est  $S_a$  ; sa surface de sortie du jet est  $S_{js}$  ; sa surface de contact avec le mur est  $S_m$ . En introduisant le vecteur unitaire sortant  $\bar{\mathbf{n}}$  de  $\Omega_t$ , on suppose que les écoulements sont « uniformes » sur  $S_{je}$ , où  $\bar{\mathbf{v}} \simeq -V_j\bar{\mathbf{n}}$ , et  $S_{js}$ , où  $\bar{\mathbf{v}} \simeq V_s\bar{\mathbf{n}}$ . Ceci a une conséquence sur les champs de pression dans ces sections, que vous donnerez.

À l'aide de la loi globale d'évolution de la quantité de mouvement, évaluez la force exercée par le jet sur le mur, au niveau de la surface  $S_m$ . Vous supposerez que l'air ambiant est un fluide parfait non pesant. Faites une application numérique et commentez.

25. Dans ce problème tous les diamètres donnés sont des diamètres intérieurs.

26. On reviendra sur cette question dans l'exercice 8.1.



**Fig. 7.6** – **a** : Schéma de la situation étudiée dans le problème 7.3 autour des *pompiers*. Notez sur la lance la poignée d'un robinet à boisseau. **b** : Schéma de la situation étudiée dans la question 2.

**3** Estimez la vitesse et la pression dans le tuyau dans une section droite de celui-ci située juste avant la lance. Vous ferez l'hypothèse que les écoulements sont quasi uniformes dans cette section et dans la section de sortie du jet dans l'air.

**4** Faites un bilan des pertes de charge dans le circuit hydraulique. Vous supposerez que le tuyau est horizontal, qu'il n'y a pas de pertes de charge entre la surface libre du réservoir et l'admission de la pompe, et que la pompe fournit un gain de charge  $H_{pompe} > 0$ , que vous calculerez.

**5** Quelle est la puissance mécanique que doit développer la pompe ?

**6** Quelle est la pression au refoulement de la pompe ?

**7** On considère maintenant une autre situation où le pompier s'attaque à un feu déclaré en haut d'un immeuble. Utilisant une échelle, le pompier est maintenant placé à 15 mètres du sol. Sachant que la pompe est située à 1 mètre du sol, quelle est la nouvelle charge  $H_{pompe}$  qu'il faut utiliser pour assurer le même débit d'eau ? Quelle est la nouvelle puissance développée par la pompe ? Quelle est la nouvelle pression au refoulement de la pompe ?

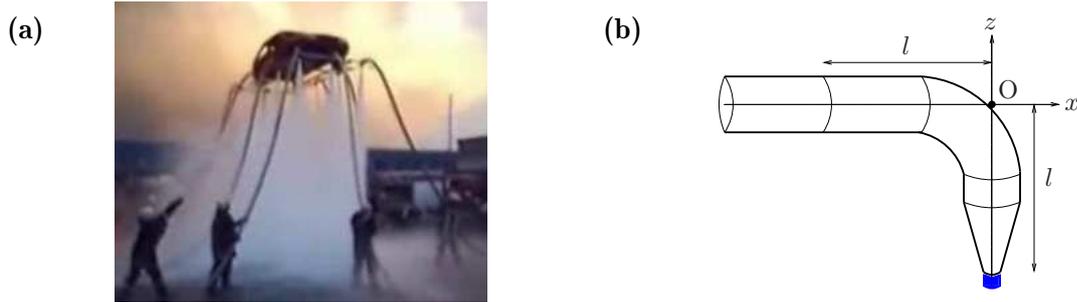
**8** Dans cette question subsidiaire plus difficile, on revient à la situation des questions 1 à 6, où la lance et le tuyau sont rectilignes horizontaux orientés dans la direction  $x$ . On suppose que la pression au refoulement de la pompe est toujours égale à celle calculée question 6. On veut estimer la force  $\vec{F}$  exercée par les fluides eau et air sur la lance, qui doit être compensée par la somme

- de la force exercée par le pompier sur la lance qu'il tient en mains
- et de la force exercée par les parois du tuyau situées en amont de la lance sur la lance.

**8.1** On suppose le robinet à boisseau fermé, ce qui revient à placer un disque solide bouchant tout le tuyau dans le tuyau. En faisant notamment un bilan de forces pour l'eau contenue dans la lance, estimez analytiquement  $\vec{F}$  dans ce cas, soit  $\vec{F}_1$ . Calculez numériquement  $F_{1x}$ .

**8.2** On suppose le robinet ouvert laissant sortir le jet d'eau. Calculez notamment grâce à un bilan de quantité de mouvement pour l'eau contenue dans la lance les nouvelles valeurs de  $\vec{F}$ , soit  $\vec{F}_2$ , analytiquement et numériquement pour ce qui est de la composante  $x$ .

**8.3** Par comparaison, expliquez cette phrase tirée d'un guide de pompiers : « Lorsque l'eau s'échappe de la lance, une force s'exerce dans le sens opposé provoquant un effet de recul plus ou moins important en fonction du type de lance, de la forme du jet et de la pression appliquée à l'entrée ».



**Fig. 7.7** – Situation étudiée dans le problème 7.4 de *lévitation d'une voiture par réaction de jets d'eau*. **a** : photographie d'ensemble ; **b** : schéma de principe d'un tuyau coudé avec convergent.

### Problème 7.4 *Lévitation d'une voiture par réaction de jets d'eau*

Une expérience de lévitation d'un véhicule a été réalisée par des pompiers, en disposant 10 tuyaux munis de lances orientées vers le sol sur un cadre solidaire d'une voiture. Les tuyaux et lances, tous identiques, sont disposés de façon symétrique, 4 d'un côté latéral, 4 de l'autre côté, 1 à l'avant et 1 à l'arrière du cadre, comme on le voit sur la photographie de la figure 7.7a<sup>27</sup>. Le but de ce problème est de modéliser de façon simple cette expérience, afin de mieux la comprendre. On va pour cela s'intéresser en premier lieu à la région terminale d'un tuyau, qui comprend un coude, et la lance correspondante, essentiellement un convergent pour nous, comme schématisé sur la figure 7.7b. On suppose un état stationnaire atteint. Dans celui-ci le référentiel lié au repère  $Oxyz$ , avec  $Ox$  axe horizontal du tuyau juste avant le coude,  $Oz$  axe vertical de la lance, est fixe par rapport au référentiel du sol, et galiléen. On étudie la dynamique d'un volume d'eau  $\Omega_t$  situé entre  $x = -l$  et la sortie de la lance, elle-même située en  $z = -l$ , avec  $l = 30$  cm. Le rayon interne du tuyau est  $a = 5$  cm. Le rayon interne de la lance, en sortie, est  $b = 1,25$  cm. La longueur  $l$  est suffisamment grande pour pouvoir considérer que les écoulements en entrée et sortie d' $\Omega_t$  sont peu influencés par le coude, donc quasi uniformes et unidirectionnels. De même on considérera que les pressions en entrée,  $p_e$ , et en sortie,  $p_s$ , de  $\Omega_t$ , sont uniformes dans les sections d'entrée et de sortie correspondantes,  $S_e$  et  $S_s$ .

**1** Le débit volumique étant le débit maximal possible dans des conditions de proximité des pompes, soit approximativement  $q = 1100$  l/min, quelles sont les vitesses en entrée,  $V_e$ , et en sortie,  $V_s$ , de  $\Omega_t$  ?

**2.1** Que vaut  $p_s$  ?

**2.2** On estime les pertes de charge dues au coude, aux frottements sur les parois de tuyau, et au convergent, entre l'entrée et la sortie de  $\Omega_t$ , à

$$\delta H = H_e - H_s = V_e^2 / (2g)$$

avec  $g$  l'accélération de la pesanteur. Calculez numériquement cette perte de charge, puis la pression  $p_e$  en entrée. Commentez.

**3.1** Exprimez de façon cinématique la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement de l'eau contenue à un instant  $t$  dans  $\Omega_t$ , lorsque l'on suit cette eau dans son mouvement. Simplifiez

<sup>27</sup>. Cette photographie est tirée d'un film circulant sur Internet (mots clés : « pompiers soulèvent voiture »), dont les auteurs me sont inconnus.

au maximum cette expression. Pour cela vous explicitez les intégrales et ferez intervenir le débit massique. Vous interprétez physiquement la formule obtenue.

**3.2** Exprimez de façon dynamique cette même dérivée, et simplifiez au maximum l'expression obtenue. Vous noterez  $m_0$  la masse d'eau contenue dans  $\Omega_t$ ,  $\bar{\mathbf{F}}$  la force exercée par le tuyau coudé et la lance sur cette masse d'eau.

**3.3** Déduisez de ce qui précède et d'une loi fondamentale de la mécanique la force  $\bar{\mathbf{F}}'$  exercée par le volume d'eau  $\Omega_t$  sur le tuyau coudé et sa lance.

**4** Faites le bilan des forces agissant sur le tuyau coudé et sa lance, dont la masse est notée  $m_1$ . Vous supposerez que le tuyau en amont exerce une force purement verticale  $m_2\bar{\mathbf{g}}$ . Vous supposerez que l'air environnant est un fluide parfait à la pression  $p_{\text{atm}}$ , et utiliserez pour calculer la force totale due à l'air la formule intégrale de la divergence appliquée au tenseur des contraintes correspondant, prolongé dans tout l'espace ; ceci vous permettra de vous ramener à des intégrales de surface sur  $S_e$  et  $S_s$  uniquement. Vous identifierez grâce à ce bilan la force  $\bar{\mathbf{F}}''$  exercée par le cadre sur le tuyau coudé et sa lance, au niveau des fixations du tuyau sur le cadre, supposées de petite taille.

**5** Grâce à une loi fondamentale de la mécanique, donnez l'expression analytique de la force  $\bar{\mathbf{R}}$  exercée par le tuyau coudé et sa lance sur le cadre.

**6** On considère maintenant le tuyau et la lance symétrique du précédent par rapport à l'un des plans de symétrie verticaux du cadre<sup>28</sup>. Par exemple si le 1<sup>er</sup> tuyau et lance était à l'arrière, on considère le tuyau et lance de l'avant, ou si le 1<sup>er</sup> tuyau et lance était d'un côté latéral, on considère le tuyau et lance de l'autre côté. Représentez schématiquement ce couple de tuyaux et lances, puis par un raisonnement déterminez la force totale  $\bar{\mathbf{R}}_1$  exercée par ce couple sur le cadre. Commentez l'expression analytique de  $\bar{\mathbf{R}}_1$  ; expliquez notamment pourquoi on ne retrouve pas l'effet de résistance à la pression mis en évidence à la fin du problème 7.3.

**7** Quelle est la force totale exercée par les 10 tuyaux et lances sur le cadre ? Sachant que

$$m_0 \simeq 5 \text{ kg} , \quad m_1 \simeq 3 \text{ kg} , \quad m_2 \simeq 12 \text{ kg} ,$$

estimez le poids de l'ensemble voiture et cadre. L'expérience a-t-elle pu être menée avec une voiture standard ?

**8** Estimez l'ordre de grandeur des pertes de charge dans chaque tuyau entre le refoulement de la pompe et l'entrée du volume  $\Omega_t$  considéré au début. Vous supposerez pour mener ce calcul que tout se passe comme si le tuyau était droit, de longueur  $L \simeq 20 \text{ m}$ .

**9** On considère le cas défavorable où le cadre sous la voiture se trouve à une altitude  $h = 6 \text{ m}$  au-dessus du refoulement de chaque pompe. Estimez d'après tout ce qui précède la pression au refoulement de chaque pompe.

**10** Toujours dans ce cas, et sachant que chaque pompe est alimentée par un réservoir d'eau dont la surface libre se trouve à une hauteur  $h_0 = 2 \text{ m}$  au-dessus de l'admission de celle-ci, estimez le gain de charge  $H_{\text{pompe}}$  que doit fournir celle-ci, puis la puissance développée par celle-ci. Vérifiez que cette puissance est bien inférieure à la puissance maximale que peut délivrer cette pompe dans ces conditions de fort débit, soit 14 kW.

28. Plans contenant les droites « avant-arrière » ou « gauche-droite ».

**Problème 7.5 Étude de la vidange d'un réservoir par un tuyau**

On s'intéresse à l'*expérience de vidange d'un réservoir par un tuyau*<sup>29</sup> schématisée sur la figure 7.8a. Le réservoir est cylindrique de diamètre  $D = 84$  mm. La hauteur d'eau dans ce réservoir, au dessus d'un orifice connecté à un tuyau horizontal, est  $h(t)$ . Ce tuyau est en acier inoxydable, de diamètre intérieur  $d = 5$  mm, longueur  $L = 103$  cm. Il débite à l'air libre. Des trous de prise de pression (figure 7.8b) ont été percés à des distances  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (13, 38, 68, 93)$  cm de son entrée. Ils communiquent avec des tubes transparents verticaux sur lesquels on peut mesurer le niveau d'eau correspondant, soit  $z(x)$ .

**Bilan d'expériences et premiers éléments de modélisation**

- Lorsque l'on est en régime de vidange quasi-stationnaire avec  $h \simeq 60$  cm, au « début » de l'expérience, on observe que, au moins dans les tubes de prise de pression situés « loin de l'entrée », en  $x_2, x_3, x_4$ , la hauteur d'eau  $z(x)$  décroît de façon affine en fonction de  $x$ . Justifiez cette observation en montrant, à partir d'un bilan de charge entre la surface libre du réservoir et une section droite du tuyau, juste sous une prise de pression, et aussi, de la loi de l'hydrostatique dans une colonne d'eau de prise de pression (cf. la figure 7.8b), que<sup>30</sup>

$$z(x) = h - \frac{V^2}{2g} - \delta H_{\text{singulière}} - \delta H_{\text{régulière}}(0 \rightarrow x) \quad (7.126)$$

Dans cette formule, la perte de charge singulière est due au rétrécissement à l'entrée du tuyau, et la perte de charge régulière est donnée par l'équation (8.24),

$$\delta H_{\text{régulière}}(0 \rightarrow x) = \frac{x}{d} \frac{V^2}{2g} \lambda \quad (7.127)$$

avec  $\lambda$  le coefficient de perte de charge de l'écoulement dans le tuyau.

- Une expérience de vidange partielle, de  $h_0 = 65$  cm à  $h_1 = 55$  cm, en régime quasi-stationnaire, montre qu'il faut pour cela un intervalle de temps

$$\boxed{\delta t_1 \simeq \quad \text{s}}. \quad (7.128)$$

Déduisez-en, au début de la vidange, la vitesse débitante dans le réservoir

$$V_{\text{réservoir}} \simeq \quad (7.129)$$

puis celle dans le tuyau

$$V \simeq \quad (7.130)$$

le nombre de Reynolds dans le tuyau

$$Re \simeq \quad (7.131)$$

et enfin le terme d'énergie cinétique dans la charge évaluée dans le tuyau

$$\frac{V^2}{2g} \simeq \quad (7.132)$$

29. Dans ce problème, on fait appel à certains résultats de la section 8.2.

30. On prend le coefficient d'énergie cinétique  $\alpha$  dans la charge évaluée dans le tuyau égal à 1, approximation qu'il sera bien de justifier physiquement...

- En faisant une expérience de vidange partant de  $h \simeq 70$  cm, on mesure lorsque  $h = 60$  cm, en régime quasi-stationnaire, les niveaux dans les tubes de prise de pression situés en  $x_2 = 38$  cm et  $x_4 = 93$  cm,

$$\boxed{z_2 = \quad \text{cm}}, \quad \boxed{z_4 = \quad \text{cm}}. \quad (7.133)$$

Déduisez-en les valeurs numériques du coefficient de perte de charge

$$\lambda \simeq \quad (7.134)$$

et de la perte de charge singulière

$$\delta H_{\text{singulière}} \simeq \quad (7.135)$$

Vous montrerez à partir de ces mesures la validité de la *loi de Blasius* (8.27)

$$\lambda_{\text{Blasius}} = 0,316 Re^{-1/4} = \quad (7.136)$$

Enfin vous évaluerez, au début de la vidange, la perte de charge  $\delta H_{\text{régulière}}(0 \rightarrow L)$ , et les rapports

$$\frac{V^2/(2g)}{\delta H_{\text{régulière}}(0 \rightarrow L)} \simeq \quad \text{et} \quad \frac{\delta H_{\text{singulière}}}{\delta H_{\text{régulière}}(0 \rightarrow L)} \simeq \quad (7.137)$$

- Le jet à l'air libre montre des fluctuations caractéristiques de la transition vers la turbulence lorsque  $h$  atteint des valeurs de l'ordre de 10 cm (voir sur ce sujet la figure 1 de Hof et al. 2006). On sort de ce régime de transition vers un régime laminaire lorsque

$$\boxed{h_f \simeq \quad \text{cm}}, \quad (7.138)$$

le temps écoulé depuis que  $h = 60$  cm étant

$$\boxed{\delta t \simeq \quad}. \quad (7.139)$$

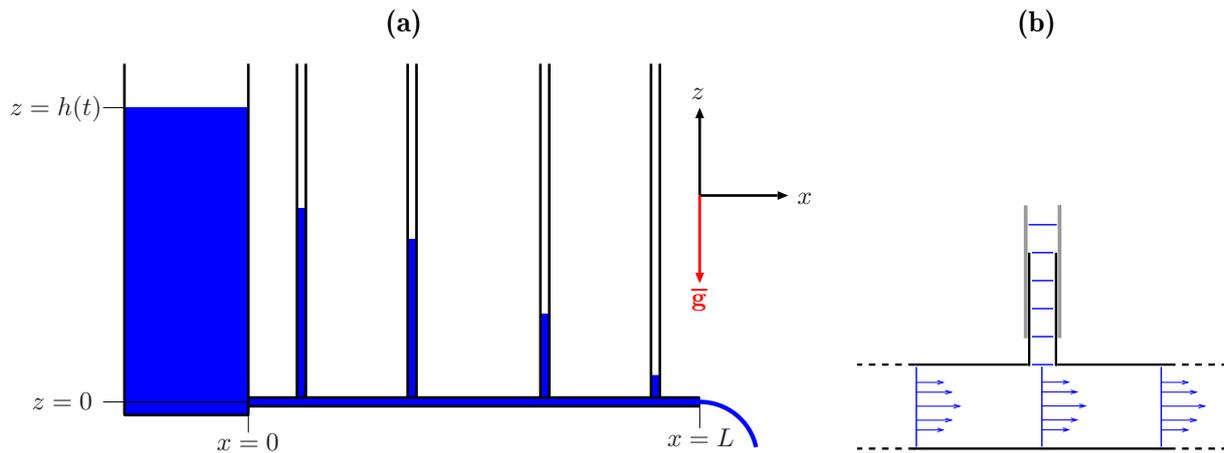
## Modélisation

**1** En écrivant une loi de conservation, établissez la relation entre le taux de vidange  $\dot{h} = dh/dt$  et la vitesse débitante  $V$  dans le tuyau. Vous considérerez que, au niveau de la surface libre du réservoir, l'écoulement de vidange est quasi uniforme. Commentez la relation obtenue.

**2** Explicitiez le bilan de pertes de charge pour cet écoulement de vidange, entre la surface libre du réservoir et la sortie du tuyau, qui se fait à l'air libre. Vous négligerez les pertes de charge dans le réservoir et en entrée du tuyau, ainsi que les termes d'énergie cinétique dans les expressions des charges en entrée-sortie. Vous introduirez le coefficient de perte de charge  $\lambda$  dans le tuyau, qui dépend d'après le cours du nombre de Reynolds  $Re$  dans le tuyau et de sa rugosité relative  $\varepsilon$ .

**3.1** Le « début » de la vidange est défini par  $h(t=0) = h_0 = 60$  cm .

On suppose que, pendant une première phase de la vidange, d'une durée  $t_f$  sur laquelle on reviendra, le régime d'écoulement dans le tuyau est turbulent. On utilise une loi de Blasius pour estimer le coefficient de perte de charge  $\lambda$ , en négligeant les effets de rugosité. Établissez l'équation



**Fig. 7.8** – **a** : Figure de principe (échelle non respectée) de la situation étudiée dans le problème 7.5. **b** : Vue zoomée en coupe d'une prise de pression, constituée d'un court tube vertical en acier soudé sur le tuyau, tube sur lequel un flexible transparent (en gris) est emmanché. Les flèches horizontales schématisent le champ de vitesse moyen dans le tuyau.

différentielle ordinaire qui régit l'évolution temporelle de la hauteur d'eau  $h(t)$ . Montrez que l'on peut mettre cette équation sous la forme

$$\dot{h} = -|\dot{h}| = -\frac{7}{3} \frac{h_0^{3/7}}{\tau} h^{4/7} \quad (7.140)$$

où  $\tau$  est un temps caractéristique que vous calculerez analytiquement. Vous testerez l'homogénéité dimensionnelle de la formule obtenue pour  $\tau$ , et donnerez sa valeur numérique. Vous expliquerez physiquement la dépendance de  $\tau$  par rapport à tous les paramètres.

**3.2** Résolvez analytiquement l'équation (7.140). Donnez les expressions de  $h(t)$  et  $\dot{h}(t)$  en fonction de  $h_0$ ,  $t$  et  $\tau$ .

**3.3** Démontrez que, dans ce régime, le nombre de Reynolds est de la forme

$$Re = Re_0 (1 - t/\tau)^\alpha$$

et donnez les expressions de  $Re_0$  et  $\alpha$  en fonction de tous les paramètres de contrôle primaires de ce problème, i.e., en remplaçant  $\tau$  par son expression. Expliquez physiquement la dépendance de  $Re_0$  par rapport à tous ces paramètres.

Effectuez le calcul numérique de  $Re_0$ .

**3.4** Donnez les expressions numériques des fonctions  $h(t)$  et  $Re(t)$ . Représentez les graphes de ces fonctions.

**3.5** On admet que l'écoulement étant fortement perturbé par les phénomènes d'entrée dans le tuyau à partir du réservoir et des tubes de prise de pression, la turbulence subsiste jusqu'à  $Re \simeq 1750$ . Au bout de quelle durée  $t_f$  après le début de la vidange prévoit-on une sortie du régime turbulent ?

**4** Comparez les résultats du modèle avec ceux des expériences, et tentez d'expliquer les écarts éventuellement observés, en esquissant un modèle plus précis.

**Problème 7.6 Station de Transfert d'Énergie par Pompage**

Une Station de Transfert d'Énergie par Pompage (STEP) est une centrale hydroélectrique située entre deux bassins supérieur et inférieur de volumes équivalents, comme visible sur la figure 7.9a<sup>31</sup>. Lorsque la demande en électricité est forte, le bassin supérieur est vidé, l'eau circulant dans des conduites et actionnant des turbines qui produisent de l'électricité : mode « production ». Lorsque l'électricité est bon marché, les turbines se transforment en pompes et on remplit à nouveau le bassin supérieur : mode « pompage ». On développe ici un modèle simplifié de la STEP à deux groupes turbines-pompes présentée sur la figure 7.9b. L'un des deux circuits hydrauliques équivalents empruntés par l'eau est ABCDEFG. Le point A se trouve sur la surface libre du bassin supérieur. Le point B se trouve à l'admission de la conduite principale. Celle-ci, en béton, de section circulaire de diamètre  $D$ , s'étend jusqu'au point C ; sa longueur est  $L$ . En C a lieu une bifurcation vers deux conduites secondaires, tuyaux en acier de diamètre  $d = D/2$ . Entre C et D la longueur d'une conduite secondaire est  $l_1$ . Le point D se trouve à l'admission d'un groupe turbine-pompe, le point E à sa sortie. Entre E et F se trouve une autre conduite secondaire, tuyau en acier de diamètre  $d = D/2$ . Elle débouche en F dans le bassin inférieur, sa longueur entre E et F étant  $l_2$ . Enfin G se trouve sur la surface libre du bassin inférieur. La température de l'eau  $T \simeq 10^\circ\text{C}$ .

**Étude préliminaire : débits nominaux, coefficients de pertes de charge**

**1.a** Le volume maximal de chaque bassin est de  $4 \text{ M m}^3$ . En *mode production*, on part en général d'une situation où le bassin supérieur est plein, le bassin inférieur rempli à 10% seulement, et en 5 h on se permet de vider 90% du bassin supérieur. Calculez le débit volumique total  $Q_1$  correspondant, supposé constant pendant toute la vidange.

**1.b** En supposant que ce débit  $Q_1$  dans la conduite principale se répartit de façon symétrique dans les conduites secondaires, calculez le débit  $q_1$  dans les conduites secondaires en mode production.

**1.c** Toujours en mode production, donnez les expressions des vitesses débitantes  $V_1$  dans la conduite principale,  $v_1$  dans les conduites secondaires. Que peut-on dire des nombres de Reynolds associés ?

**1.d** Calculez numériquement ces vitesses débitantes et nombres de Reynolds sachant que  $D = 6 \text{ m}$ .

**2.a** En *mode pompage*, on se donne en général 7,5 h pour remonter 90% du volume du bassin inférieur, initialement plein, dans le bassin supérieur, initialement rempli à 10% seulement. Calculez le débit volumique total  $Q_2$  correspondant, supposé constant pendant tout le pompage.

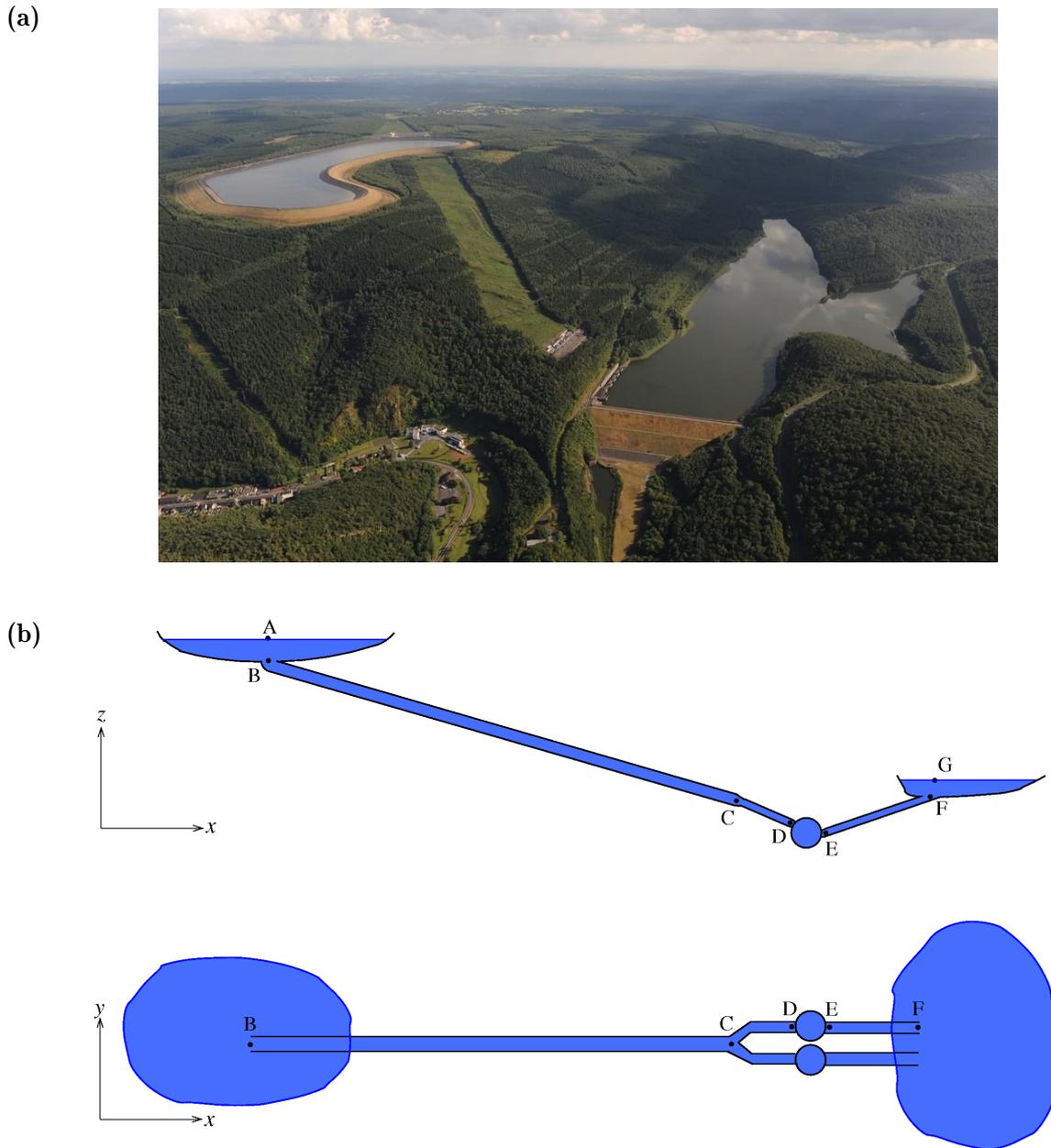
**2.b** Calculez numériquement en mode pompage les vitesses débitantes  $V_2$  dans la conduite principale,  $v_2$  dans les conduites secondaires, et les nombres de Reynolds correspondants.

**2.c** Que peut-on dire de la nature des écoulements dans les conduites, quel que soit le mode de fonctionnement de la centrale ?

**3** En considérant que la rugosité absolue du béton vaut 1 mm, estimez à l'aide du cours le coefficient de *perte de charge*  $\lambda_p$  dans la *conduite principale* (indice  $p$ ), à la fois en modes production (valeur  $\lambda_{p1}$ ) et pompage (valeur  $\lambda_{p2}$ ). Donnez une formule explicite générale puis faites les applications numériques. Commentez.

**4** En considérant que l'état de surface de l'acier inoxydable constituant les conduites secondaires

31. Dans ce problème, on fait appel à certains résultats de la section 8.2.



**Fig. 7.9** – a (en couleurs dans la version PDF) : vue aérienne de la *Station de Transfert d'Énergie par Pompage* (STEP) de Revin, photo Airdiasol pour EDF. b : schéma de principe de la STEP à 2 groupes turbines-pompes (disques) étudiée dans le problème 7.6 ; échelle non respectée ; en haut : vue de côté ; en bas : vue par dessus.

est bon, équivalent à celui d'un acier neuf, sa rugosité absolue vaut 0,05 mm. Estimez le coefficient de *perte de charge*  $\lambda_s$  dans les *conduites secondaires* (indice  $s$ ), à la fois en modes production ( $\lambda_{s1}$ ) et pompage ( $\lambda_{s2}$ ). Commentez.

### Étude du mode production

**5.a** À partir des données en votre possession, faites un bilan de pertes de charge le long du tube de courant suivant le circuit ABCDEFG en mode production, contenant toute l'eau qui passe par la turbine entre D et E. Vous considérerez les vitesses quasi uniformes dans les sections droites des conduites, et admettez que le théorème de Bernoulli généralisé est valable tel quel pour ce tube de courant. La perte de charge dans la turbine sera notée  $H_n$ , charge « nette » ou hauteur « nette », dont une partie est convertie en énergie mécanique de la turbine. Elle sera calculée en fonction de la perte de charge régulière totale  $\delta H_1$  et de

$$\delta z = z_A - z_G = \text{différence d'altitude entre A et G} .$$

Commentez physiquement.

**5.b** Sachant que les longueurs de conduites sont  $L = 750$  m et  $l = l_1 + l_2 = 120$  m, calculez  $\delta H_1$ .

**5.c** Sachant que, en moyenne,  $\delta z = 240$  m, calculez numériquement  $H_n$ . Commentez.

**6.a** Estimez analytiquement la puissance mécanique potentiellement captée par une turbine, puis par les deux turbines, soit  $P_1$ .

**6.b** Calculez numériquement  $P_1$ .

**6.c** Le rendement du groupe turbine - alternateur est  $r = 0,87$ . Calculez numériquement la *puissance électrique produite*  $P_{e1}$ .

**6.d** Calculez numériquement l'*énergie électrique produite*  $E_1$  pendant les 5 h de production, dans une unité adéquate.

### Étude du mode pompage, et calcul du rendement global

**7.a** Faites un bilan de pertes de charge le long du tube de courant suivant le circuit GFEDCBA en mode pompage, contenant toute l'eau qui passe par la turbine entre E et D. Le gain de charge dans la pompe sera noté  $H_p$ . Faites apparaître une perte de charge totale  $\delta H_2$  connue, d'expression analogue à celle de  $\delta H_1$ , qui contrôle avec  $\delta z$  la valeur de  $H_p$ . Commentez physiquement la formule obtenue pour  $H_p$ .

**7.b** Calculez numériquement  $\delta H_2$  puis la hauteur manométrique  $H_p$ . Commentez.

**8.a** Calculez numériquement la puissance  $P_2$  développée par les deux pompes.

**8.b** Le rendement du groupe moteur électrique - pompe est  $r' = 0,90$ . Calculez numériquement la *puissance électrique consommée*  $P_{e2}$ .

**8.c** Calculez numériquement l'*énergie électrique consommée*  $E_2$  pendant les 7,5 h de pompage.

**9** Calculez le *rendement énergétique global* de la centrale. Commentez.

**Rendement global en fluide parfait**

**10** Afin de prendre du recul par rapport au calcul précédent, en considérant l'eau comme un *fluide parfait*, donnez l'expression analytique des puissances électriques  $P_{e1}$  en production,  $P_{e2}$  en pompage, en fonction des rendements  $r$ ,  $r'$ , de la masse volumique  $\rho$ , de l'accélération de la pesanteur  $g$ , de la hauteur de chute  $\delta z$ , du volume d'eau utile  $\mathcal{V}$ , et enfin des durées  $T_{\text{prod}}$  de la phase de production,  $T_{\text{pomp}}$  de la phase de pompage. Déduisez en de façon analytique les énergies produite  $E_1$  et consommée  $E_2$ , puis le rendement énergétique global « maximal » de cette STEP. Commentez.

*Dans ce qui suit, on considère à nouveau l'eau comme visqueuse.*

**Pressions en mode production**

**11** Estimez en mode production les pressions en entrée et sortie de la turbine, sachant que  $z_A - z_D = 270$  m,  $z_D - z_E = 5$  m,  $l_1 = 50$  m. Commentez.

**Étude de la puissance maximale**

**12.a** En reprenant le modèle de la centrale en mode production, établissez la formule donnant la puissance électrique  $P$  produite par la centrale lorsqu'on la fait fonctionner à un débit  $Q$  supérieur ou égal à  $Q_1$ . On admet que le rendement des groupes turbine - alternateur reste  $r = 0,87$  même à très haut débit. Vous noterez  $\lambda_p(Q)$  et  $\lambda_s(Q)$  les coefficients de perte de charge correspondants, et donnerez une formule analytique explicitant la dépendance de  $P$  vis-à-vis de  $r$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $D$ ,  $L$ ,  $l$ ,  $\delta z$ ,  $Q$ ,  $\lambda_p(Q)$  et  $\lambda_s(Q)$ .

**12.b** Commentez cette formule, notamment sa séparation en deux termes très différents. Discutez des variations de ces deux termes lorsque  $Q$  augmente, et représentez sur un graphe l'allure de la fonction  $P(Q)$ . Montrez qu'un optimum existe, et expliquez la physique qui le définit.

**12.c** Quelle serait la valeur numérique<sup>32</sup> de la puissance maximale que l'on pourrait obtenir ? À quel débit serait-elle atteinte ? Commentez.

**7.8 Notes personnelles**


---

32. Cette dernière question était « subsidiaire » lors du test, elle ne peut se traiter complètement et précisément qu'en faisant usage d'un logiciel du type Mathematica.



## Chapitre 8

# Analyse dimensionnelle appliquée à la mécanique des fluides

Dans ce chapitre, on présente des applications de l'*analyse dimensionnelle* à la *mécanique des fluides*. Ceci permet de donner quelques informations complémentaires très importantes, qui auraient pu être placées dans le chapitre précédent consacré à la mécanique des fluides. C'est aussi l'occasion, notamment, par les exercices et problèmes, d'introduire de nombreux systèmes et phénomènes intéressants... par exemple, liés à une *énergie « fluide »*, l'*énergie éolienne*...

### 8.1 Étude de l'écoulement autour d'un cylindre

Les *écoulements autour d'obstacles*, que l'on a déjà abordé<sup>1</sup> dans le problème 1.1, représentent une famille d'écoulements très importante sur le plan pratique : si l'obstacle est une voiture ou un avion ou un gratte-ciel ou une île volcanique (cf. l'exercice 8.4), on a affaire à un problème d'*aérodynamique*, si l'obstacle est une pile de pont dans une rivière ou un sous-marin dans l'océan, on a affaire à un problème d'*hydrodynamique*, etc... Ces écoulements sont très complexes, aussi, dans une approche fondamentale, il semble judicieux de s'intéresser au cas d'un obstacle de forme très simple, à savoir un *cylindre « infini » de section circulaire*, un disque de diamètre  $d$ . Dans le cas réaliste d'un *fluide visqueux*, nous allons montrer tout ce que l'on peut retirer de l'analyse dimensionnelle de ce problème, en apportant aussi quelques compléments issus d'études expérimentales. Cette étude importe pour elle-même et en tant qu'exemple type d'application de l'analyse dimensionnelle à un problème de mécanique des fluides.

#### 8.1.1 Mise en place du modèle : recensement des grandeurs physiques

Considérons un fluide *newtonien incompressible* en écoulement uniforme à l'infini,

$$\bar{\mathbf{v}} = V\bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{quand} \quad \|\bar{\mathbf{x}}\| \rightarrow \infty, \quad (8.1)$$

s'écoulant autour d'un obstacle cylindrique de grande longueur dans la direction  $z$ . En pratique cette configuration peut par exemple être approchée dans une soufflerie ou dans un canal hydraulique suffisamment larges, le rayon du cylindre étant lui suffisamment petit. Les grandeurs physiques qui sont les *paramètres de contrôle* du système sont

---

1. À l'aide d'un modèle de fluide parfait, vous avez maintenant tous les éléments en main pour vous en convaincre.

- la vitesse à l'infini  $V$  ;
- le diamètre du cylindre  $d$  ;
- la masse volumique du fluide  $\rho$  ;
- sa viscosité dynamique  $\eta$ .

On n'introduit pas la viscosité cinématique  $\nu$  car elle n'est pas indépendante de  $\rho$  et  $\eta$ . On n'introduit pas non plus, ni la pression à l'infini  $p_\infty$ , ni l'accélération de la pesanteur  $g$ , ce pour deux raisons. D'une part ces deux quantités peuvent être incluses dans la pression motrice  $\hat{p}$  dans l'équation de Navier-Stokes qui permet de modéliser cet écoulement, et on peut éliminer cette pression motrice en travaillant avec l'équation de la vorticité. D'autre part (surtout) l'expérience montre qu'elles n'ont pas d'influence. Ainsi l'expérience faite à plus haute pression ou dans la station spatiale internationale (en apesanteur), toutes choses étant égale par ailleurs, conduit au même résultat en ce qui concerne la *grandeur dépendante* qui nous intéresse, à savoir la **force de traînée**  $f_x$  *exercée par le fluide sur le cylindre par unité de longueur* de celui-ci dans la direction  $z$ .

### 8.1.2 Commentaire général

On réalise sûrement que cette phase qui consiste à recenser les paramètres de contrôle du problème (et dans une moindre mesure la grandeur dépendante) est très délicate car elle nécessite une bonne connaissance de la physique du problème. En effet si cette phase est mal menée elle conduit à une liste de paramètres de contrôle soit trop longue<sup>2</sup> soit trop courte<sup>3</sup>. Dans ces deux cas, liste trop longue ou trop courte, l'analyse dimensionnelle sera condamnée à donner des résultats peu pertinents voire ne pourra même pas être menée...

### 8.1.3  tude et réduction des paramètres de contrôle

Construisons la matrice des exposants des dimensions des paramètres de contrôle :

	$V$	$d$	$\rho$	$\eta$
$m$	0	0	1	1
$\ell$	1	1	-3	-1
$t$	-1	0	0	-1

On voit que l'on est dans la situation « standard » où les trois premières grandeurs sont dimensionnellement indépendantes, la matrice formée par les trois premières colonnes étant de déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +1 \neq 0$$

donc inversible. Le groupement  $\pi_4$  se construit en calculant les exposants  $a_4$ ,  $b_4$ ,  $c_4$  tels que

$$\eta \equiv V^{a_4} d^{b_4} \rho^{c_4} .$$

En extrayant les exposants de  $m$ ,  $\ell$  et  $t$  dans cette équation aux dimensions, de façon analogue à ce qui a été fait pour passer des équations (5.24)   (5.26) lorsque l'on a établi le théorème  $\pi$ , il

2. Ce serait le cas ici si on avait rajouté  $p_\infty$  ou  $g$  dans les paramètres de contrôle.

3. Ce serait le cas ici si on avait oublié la masse volumique  $\rho$  par exemple.

vient

$$\begin{cases} 0 & + & 0 & + & c_4 & = & 1 \\ a_4 & + & b_4 & - & 3c_4 & = & -1 \\ -a_4 & + & 0 & + & 0 & = & -1 \end{cases} . \quad (8.2)$$

Ce système se résoud pour donner  $a_4 = b_4 = c_4 = 1$ ,

d'où le groupement

$$\pi_4 = \frac{\eta}{V d \rho} = \frac{\nu}{V d} .$$

Ce paramètre de contrôle adimensionnel est le seul dans le cadre de notre modèle. Comme on peut faire varier plus facilement la vitesse  $V$  que les autres grandeurs, on préfère en général en hydrodynamique utiliser

$$\pi'_4 = \frac{1}{\pi_4} = \frac{V d}{\nu}$$

comme paramètre de contrôle adimensionnel. Ce paramètre qui constitue une mesure adimensionnelle de la vitesse  $V$  est tellement important en hydrodynamique qu'on lui a donné un nom. Pour des raisons historiques sur lesquelles on va revenir dans la section 8.2, on l'appelle **nombre de Reynolds** et on le note  $Re$ ,

$$\boxed{Re = \frac{V d}{\nu}} . \quad (8.3)$$

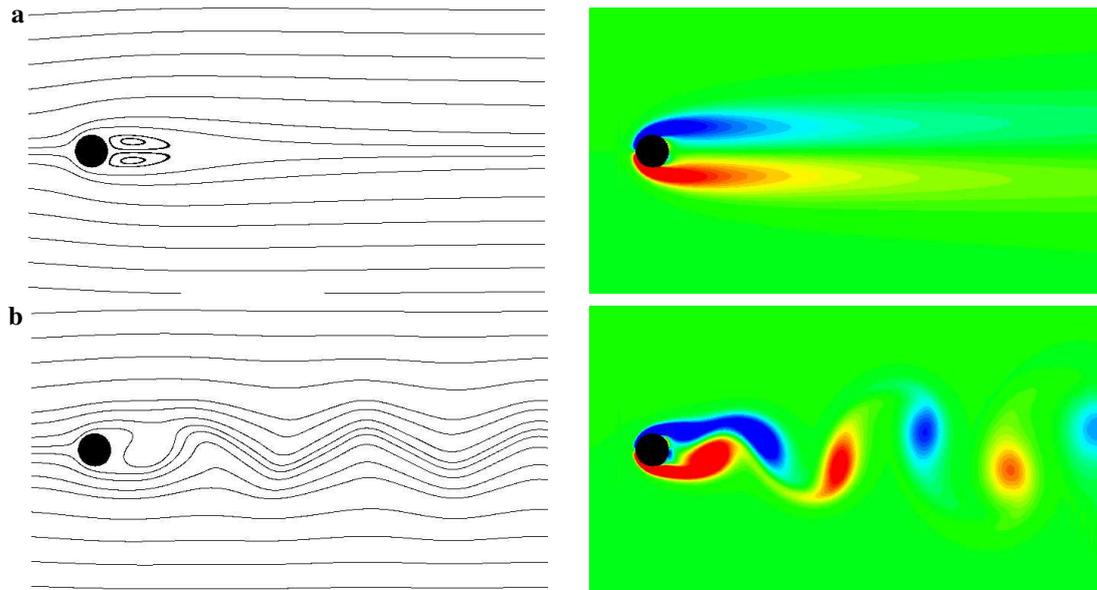
#### 8.1.4 Première conséquence : propriétés de *similitudes* de cet écoulement

L'écoulement autour d'un cylindre ne dépend effectivement que de ce nombre. Il est **stationnaire** tant que  $Re < 48$  (figure 8.1a). Il subit, lorsque  $Re$  augmente au-dessus de cette valeur critique, une cascade d'instabilités menant d'abord, lorsque  $48 < Re < 200$ , à un lâcher régulier de tourbillons, d'où un **écoulement oscillant** (figure 8.1b), puis, lorsque  $Re > 200$ , à de la **turbulence** d'abord **faible** puis, à partir de  $Re \gtrsim 5000$ , **forte**. Cependant le lâcher de tourbillons continue, même s'il devient plus irrégulier, i.e. moins rigoureusement périodique (figure 8.6). Dans le cas  $Re > 200$ , il faut donc parler d'un écoulement « **oscillant turbulent** ». Cette dépendance vis-à-vis d'un seul paramètre de contrôle adimensionnel est très intéressante, car elle signifie que pour étudier systématiquement cet écoulement il n'est pas indispensable de faire toutes les expériences possibles avec toutes les valeurs de  $V$ ,  $d$  et  $\nu$  possibles. Au contraire une expérience donnée dans laquelle on fait seulement varier  $V$  donc  $Re$  permet une étude systématique de cet écoulement. Un écoulement différent car dans un fluide possédant par exemple une viscosité différente, ou autour d'un obstacle plus grand, sera **similaire** si le nombre de Reynolds de cet écoulement est le même que celui du premier. L'existence de cette **règle de similitude** est très favorable car elle permet d'utiliser des **maquettes** pour faire par exemple en soufflerie des études autour d'obstacles de petite taille, dont on saura extrapoler les résultats au cas d'obstacles « réels » de grande taille.

#### 8.1.5 Application du théorème $\pi$ : règles de similitude pour la traînée

Terminons justement l'analyse dimensionnelle de ce problème en construisant le groupement  $\pi_0$  associé à la grandeur dépendante. Pour cela il nous faut déterminer les exposants  $a_0$ ,  $b_0$  et  $c_0$  tels que

$$f_x = \frac{F_x}{L_z} \equiv m^1 t^{-2} \equiv V^{a_0} d^{b_0} \rho^{c_0} .$$



**Fig. 8.1** – Gauche : lignes de courant - Droite : champ de vorticité (hors du plan de l'écoulement bidimensionnel) prédit par simulation numérique de l'équation de Navier-Stokes de l'écoulement *autour d'un cylindre*, avec le code volumes finis LS-STAG du Lemta par Yoann Cheny et Olivier Botella. **a** : Régime d'écoulement permanent à  $Re = 40$  ; une « recirculation » dans le sillage du cylindre correspond à deux grands tourbillons contra-rotatifs attachés à celui-ci. **b** : Régime d'écoulement oscillant à  $Re = 100$  : le détachement de tourbillons contra-rotatifs crée une « *allée tourbillonnaire de Bénard-Von-Karman* ». Pour des réalisations naturelles de ce phénomène, voir la figure 8.6.

Ceci nous conduit à un système dont la structure est la même que le système (8.2), à savoir

$$\begin{cases} 0 & + & 0 & + & c_0 & = & 1 \\ a_0 & + & b_0 & - & 3c_0 & = & 0 \\ -a_0 & + & 0 & + & 0 & = & -2 \end{cases} .$$

La solution est  $a_0 = 2$  et  $b_0 = c_0 = 1$  .

Le groupement  $\pi_0$  est donc la traînée réduite

$$\pi_0 = \frac{f_x}{V^2 d \rho} . \quad (8.4)$$

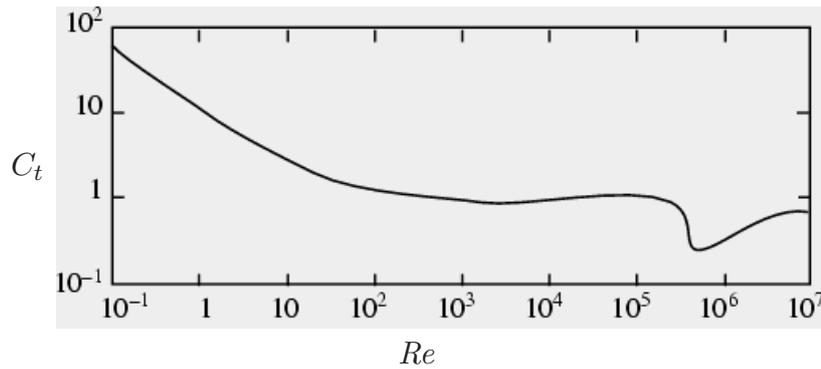
Grâce au théorème  $\pi$  on obtient que

$$\pi_0 = \frac{f_x}{\rho V^2 d} = \mathcal{F}(\pi'_4) = \mathcal{F}(Re) . \quad (8.5)$$

Il est de tradition en mécanique des fluides de faire apparaître une densité volumique d'énergie cinétique dans le dénominateur de la traînée réduite, en introduisant simplement un facteur 2. On définit ainsi naturellement le *coefficient de traînée*<sup>4</sup>

$$C_x = C_t = 2\pi_0 \quad (8.6)$$

4. 'Drag coefficient' en anglais. On le notera aussi bien  $C_x$  que  $C_t$ , l'avantage de la notation  $C_t$  est qu'elle ne fait pas référence à un repère... même s'il importe de retenir que, par définition, la force de traînée est colinéaire au vecteur vitesse en amont (8.1) !



**Fig. 8.2** – *Coefficient de traînée de l'écoulement autour d'un cylindre* en fonction du nombre de Reynolds caractéristique. Cette courbe représentant la synthèse de très nombreux travaux expérimentaux, puisqu'elle s'étend sur 8 décades de nombre de Reynolds, est tirée du chapitre 3 de Tritton (1988). On recommande de se reporter à cet ouvrage, qui donne des éléments d'interprétation physique de cette courbe.

et on obtient donc grâce à l'analyse dimensionnelle que

$$C_x = C_t = \frac{f_x}{\frac{1}{2}\rho V^2 d} = \mathcal{F}(Re) . \quad (8.7)$$

Cette relation a été vérifiée par des générations d'expérimentateurs qui ont montré que, à condition de considérer la valeur moyenne de  $C_x$  dans le cas de régimes d'écoulements turbulents, on peut effectivement représenter toutes les mesures de  $C_x$ , ou  $\langle C_x \rangle_t$ , sur une *courbe universelle*<sup>5</sup> qui est celle de la figure 8.2. De la formule remarquable (8.7) on peut déduire les *règles de similitude pour la traînée*. Par exemple, si une étude d'un écoulement est faite sur une maquette 10 fois plus petite, à même nombre de Reynolds la force de traînée sur le système réel 10 fois plus grand sera telle que le  $C_x$  est le même, d'où la force elle-même si on connaît tous les paramètres de contrôle du système réel et de sa maquette. Une illustration de cette démarche dans un cas un peu plus complexe sera l'objet de l'exercice 8.3.

Pour conclure, dans le cas d'un *obstacle quelconque de taille finie*, présentant une aire  $A$  perpendiculairement à l'écoulement amont (8.1), on définit le *coefficient de traînée* par l'équation analogue à (8.7),

$$C_x = C_t = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho V^2 A} , \quad (8.8)$$

où  $F_x$  est maintenant la force totale exercée dans la direction  $x$  par l'écoulement sur l'obstacle. L'un des buts de l'*aérodynamique* est de « contrôler »  $C_t$ , afin, en général, de réduire « au maximum »  $C_t$ , par exemple, avec des objets « mieux profilés »... Un autre but consiste souvent à faire « apparaître » une autre force, normale à l'écoulement amont, dite « *portance* », qui permettra à un avion de voler ou à une éolienne de tourner...

## 8.2 Étude de l'écoulement dans un tuyau

Les *écoulements en tuyau* sont aussi importants pratiquement que les écoulements autour d'obstacle. Nous allons montrer ce qu'apporte l'analyse dimensionnelle de ce problème, puis, comme dans la section précédente, compléter celle-ci par des résultats issus de calculs et d'expériences.

5. Ou *courbe maîtresse*.

### 8.2.1 Mise en place du modèle : recensement des grandeurs physiques

Considérons un fluide *newtonien incompressible* en écoulement dans *tuyau cylindrique à section circulaire* de diamètre  $d$ , faisant une longueur  $L \gg d$ . On suppose qu'une pompe, un réservoir de type « château d'eau », une aspiration en sortie, ou tout autre moyen « hydraulique » permet d'imposer un *débit volumique*

$$q = \frac{\pi}{4} d^2 V \quad (8.9)$$

à peu près constant. En régime turbulent ce débit peut légèrement fluctuer ; par contre on est en général capable d'assurer que sa valeur moyenne temporelle est à peu près constante<sup>6</sup>. Dans l'équation (8.9) on a écrit le débit sous la forme du produit de la section  $\frac{\pi}{4} d^2$  du tuyau par la *vitesse débitante*

$$V = \frac{4q}{\pi d^2} . \quad (8.10)$$

Clairement cette vitesse  $V$ , le diamètre  $d$  et la longueur  $L$  sont des *paramètres de contrôle* du système. Il faut y ajouter la masse volumique  $\rho$  du fluide et sa viscosité dynamique  $\eta$  ; la viscosité cinématique s'en déduit. L'hypothèse du « tuyau long »,  $L \gg d$ , permet de ne pas trop se préoccuper du problème de l'établissement de l'écoulement près de la section d'entrée du tuyau, et en conséquence de supposer que l'écoulement est établi dans la quasi-totalité du tuyau : il est grosso-modo invariant par translations dans la direction de l'axe du tuyau.

L'état de surface des parois internes du tuyau a une influence sur les écoulements. En première approximation, ce qui importe le plus est la *taille moyenne des rugosités de la paroi*<sup>7</sup>, que l'on note  $e$ . Lorsque celle-ci est négligeable, on dit que le tuyau est « lisse » ; c'est le cas par exemple des tuyaux en *verre*, en *caoutchouc* ou en *PVC*<sup>8</sup>. Les tuyaux constitués par contre de *matériaux métalliques* présentent eux une rugosité, qui peut devenir « grande » en cas de corrosion. Un tuyau en *acier neuf* présente ainsi une rugosité

$$e \simeq 0,05 \text{ mm} \quad (8.11)$$

alors que, *rouillé*, on a typiquement

$$e \simeq 0,3 \text{ mm} . \quad (8.12)$$

Enfin des tuyaux en *ciment* ou *béton* sont « fortement rugueux » au sens où, typiquement,

$$e \simeq 1 \text{ mm} . \quad (8.13)$$

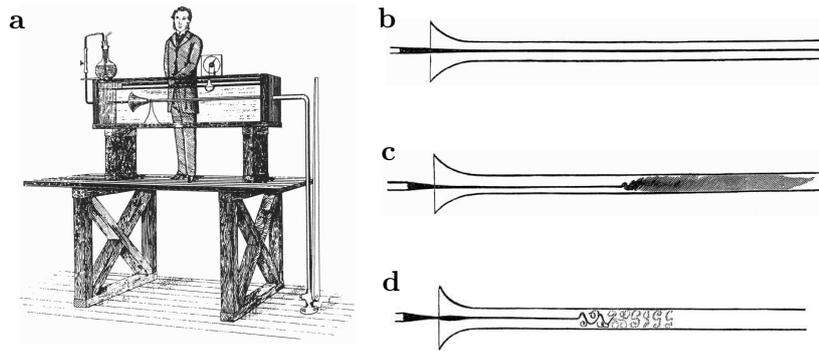
Pour des valeurs plus précises, qui dépendent aussi du procédé de fabrication du tuyau, voir par exemple le tableau 6 de [Bonnin \(1983\)](#) ou le chapitre II de [Idel'cik \(1999\)](#).

La grandeur dépendante importante est, bien entendu, la *perte de charge* (« régulière »)  $\delta H = H_e - H_s$  entre les sections d'entrée et de sortie du tuyau, en utilisant les notations de la section 7.5.3.

6. Pour ne pas alourdir les notations on ne notera pas  $\langle q \rangle_t$  ou  $\langle V \rangle_t$  dans ce qui suit, mais simplement  $q$  ou  $V$ .

7. 'Absolute roughness' en anglais.

8. Le polychlorure de vinyle est un polymère thermoplastique qui, sous sa forme rigide, peut servir à constituer des tuyaux.



**Fig. 8.3** – Figures de l'expérience de *Reynolds (1883)* sur les écoulements en tuyau, telles qu'elles sont dans cet article. **a** : Montage expérimental. **b** : Observation visuelle du filet coloré en régime laminaire,  $Re < Re_t$ . **c** : Observation visuelle du filet coloré en régime turbulent,  $Re > Re_t$ . Du fait du temps d'intégration de l'ordre du dixième de seconde inhérent à la vision, on perçoit une zone « grise » dans laquelle le filet a subi un « mélange turbulent ». **d** : Dans le même régime, une observation mieux résolue en temps, grâce à un flash, montre un filet distordu, suggérant l'existence de petits tourbillons à la dynamique rapide.

### 8.2.2 Étude et réduction des paramètres de contrôle - Régimes d'écoulement

Formons la matrice des exposants des dimensions des paramètres de contrôle, en les rangeant dans l'ordre  $V, d, \rho, \eta, L, e$  afin de recycler le travail déjà fait en section 8.1. Elle s'écrit :

	$V$	$d$	$\rho$	$\eta$	$L$	$e$
$m$	0	0	1	1	0	0
$\ell$	1	1	-3	-1	1	1
$t$	-1	0	0	-1	0	0

Comme en section 8.1, on peut choisir  $V, d$  et  $\rho$  comme grandeurs fondamentales, et introduire le premier groupement

$$\pi_4 = \frac{1}{Re} \quad \text{avec} \quad \boxed{Re = \frac{V d \rho}{\eta} = \frac{V d}{\nu}}. \quad (8.14)$$

Ce *nombre de Reynolds* a effectivement été introduit par ce physicien anglais<sup>9</sup> dans une étude mémorable (*Reynolds 1883*) sur le problème de la *transition vers la turbulence en écoulements en tuyau*. Cette étude reposait sur l'utilisation d'un traceur coloré injecté au centre du tuyau et sur l'observation de la « ligne d'émission » correspondante, les guillemets signifiant que, du fait de la largeur du filet colorant, on a plutôt affaire à un « tube d'émission ». Reynolds a établi que, pour une expérience donnée, il existe un *nombre de Reynolds de transition vers la turbulence*  $Re_t$  au delà duquel l'écoulement ne reste plus laminaire mais devient turbulent, i.e. le tube d'émission n'est plus droit et de largeur constante (figure 8.3b) mais devient, en apparence, distordu et très large (figure 8.3c). Des observations mieux résolues en temps montrent un filet très distordu voire « détruit » sous l'effet du « mélange turbulent » (figure 8.3d). Le nombre de Reynolds de transition vers la turbulence

$$Re_t \simeq 2000 \quad (8.15)$$

lorsque les expériences sont réalisées sans précautions particulières, mais peut augmenter jusqu'à 10000 ou plus dans le cas d'un tuyau placé dans un environnement très calme, i.e. en présence de

9. Actif à la fin du XIX<sup>ème</sup> et au tout début du XX<sup>ème</sup> siècle.

perturbations extérieures (vibrations, etc...) d'amplitude très faible <sup>10</sup>.

Les autres groupements  $\pi$  sont immédiats à déterminer, ce sont la *longueur réduite* du tuyau

$$\pi_5 = \frac{L}{d} \quad (8.16)$$

et la *rugosité relative* <sup>11</sup>

$$\pi_6 = \frac{e}{d} = \varepsilon. \quad (8.17)$$

### 8.2.3 Application du théorème $\pi$ : règles de similitude pour les pertes de charge

Pour ce qui est du groupement  $\pi$  associé à la grandeur dépendante perte de charge

$$\delta H = H_e - H_s = \frac{\widehat{p}_e - \widehat{p}_s}{\rho g} = \frac{\delta \widehat{p}}{\rho g}, \quad (8.18)$$

la bonne approche physique consiste à considérer qu'il s'agit essentiellement d'une perte de pression motrice. On détermine donc, en fait, le groupement  $\pi$  associé à  $\delta \widehat{p}$ . Pour cela il faut calculer les exposants  $a_0$ ,  $b_0$  et  $c_0$  tels que

$$\delta \widehat{p} \equiv V^{a_0} d^{b_0} \rho^{c_0}.$$

Ceci nous conduit au système

$$\begin{cases} 0 & + & 0 & + & c_0 & = & 1 \\ a_0 & + & b_0 & - & 3c_0 & = & -1 \\ -a_0 & + & 0 & + & 0 & = & -2 \end{cases},$$

dont la solution est

$$a_0 = 2, \quad b_0 = 0 \quad \text{et} \quad c_0 = 1.$$

On a donc

$$\pi_0 = \frac{\delta \widehat{p}}{V^2 \rho} = \frac{g}{V^2} \delta H,$$

et le théorème  $\pi$  conduit à l'existence d'une relation de la forme

$$\pi_0 = \mathcal{F}(1/\pi_4, \pi_5, \pi_6) \quad \text{i.e.} \quad \delta H = \frac{V^2}{g} \mathcal{F}(Re, L/d, \varepsilon). \quad (8.19)$$

### 8.2.4 Coefficient de pertes de charge - Cas laminaire et turbulents

Pour aller plus loin, il faut rappeler le résultat de l'exercice 7.4 sur l'*écoulement laminaire* dans un tuyau. Cet écoulement dit de *Hagen-Poiseuille* est donné, en coordonnées cylindriques d'axe  $Oz$  axe du tuyau, par

$$\bar{\mathbf{v}} = W (1 - r^2/a^2) \bar{\mathbf{e}}_z \quad (8.20)$$

avec  $a = d/2$  le rayon du tuyau, la vitesse débitante étant

$$V = W/2, \quad (8.21)$$

10. La transition vers la turbulence dans un tuyau dépend (de la « forme » et) du niveau de ces perturbations extérieures, et un meilleur modèle que celui exposé ici introduirait (pour une forme de perturbations donnée) l'amplitude réduite  $A/V$  des perturbations en vitesse. On définirait alors un seuil de transition  $Re_t(A/V)$ , qui vaut 2000 si  $A/V \simeq 2\%$  (cas standard) mais 10000 si  $A/V \simeq 0,1\%$  (cas d'un environnement très calme)... Des résultats récents (Avila et al. 2011) ont montré que les choses sont en fait encore plus complexes, le nombre de Reynolds « critique » dépendant de la longueur du tuyau et/ou de la durée de l'expérience...

11. 'Relative roughness' en anglais.

le gradient de pression motrice

$$\overline{\nabla \hat{p}} = -32 \eta (V/d^2) \bar{\mathbf{e}}_z . \quad (8.22)$$

On a donc dans ce cas

$$\delta H = \frac{\delta \hat{p}}{\rho g} = \frac{32\eta V L}{d^2 \rho g} = \frac{32\eta V L}{d \rho g} . \quad (8.23)$$

Un point remarquable est la proportionnalité directe entre  $\delta H$  et  $\pi_5 = L/d$ , naturelle si on prend la peine d'y réfléchir : les pertes de charge sont dues à la dissipation visqueuse dans le domaine fluide, or en tuyau « long » l'écoulement a été supposé établi i.e. le même dans toute section droite du tuyau. La puissance dissipée, donc les pertes de charge, est alors forcément proportionnelle à la longueur du tuyau. En supposant raisonnablement que cette propriété est encore valable en régime turbulent, on est donc poussé à reformuler la loi (8.19) sous la forme

$$\boxed{\delta H = \frac{V^2}{2g} \frac{L}{d} \lambda(Re, \varepsilon)} . \quad (8.24)$$

On a introduit un facteur 2 qui permet de faire apparaître une densité d'énergie cinétique lorsque cette équation est reformulée en terme de chute de pression motrice

$$\delta \hat{p} = \frac{\rho V^2}{2} \frac{L}{d} \lambda(Re, \varepsilon) . \quad (8.25)$$

La fonction adimensionnelle  $\lambda$  introduite en (8.24) est le *coefficient de perte de charge*<sup>12</sup>. Par identification entre (8.23) et (8.24), on obtient qu'en régime d'écoulement *laminaire*

$$\lambda = 64/Re . \quad (8.26)$$

Cette valeur, indépendante de la rugosité relative  $\varepsilon$ , a été confirmée par de nombreuses expériences.

En régime d'écoulement *turbulent* les choses se compliquent, et de nombreuses études, à dominante expérimentale, ont permis d'établir des formules plus ou moins empiriques, conduisant à l'abaque de la figure 8.4. Dans le cas d'un tuyau à *paroi lisse*,  $\varepsilon \simeq 0$ , on dispose en régime de turbulence pas trop forte, pour  $3000 \lesssim Re \lesssim 10^5$ , de la *formule de Blasius*<sup>13</sup>

$$\lambda = 0,316 Re^{-1/4} , \quad (8.27)$$

et en turbulence forte, pour  $10^4 \lesssim Re \lesssim 10^8$ , de la *formule de Karman-Nikuradze-Prandtl*<sup>14</sup>

$$1/\sqrt{\lambda} = 2 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8 . \quad (8.28)$$

Cette formule est *implicite* et nécessite un calcul numérique pour être utilisée ; l'intérêt de l'abaque de la figure 8.4 est de permettre d'estimer  $\lambda$  graphiquement. Cependant, une formule *explicite générale*, donc, d'utilisation plus pratique, a été développée par Haaland (1983), à la fois pour

12. Certains l'appellent plutôt *coefficient de frottement* ; les anglais notamment, qui parlent de '*friction factor*'.

13. Ce professeur allemand du XX<sup>ème</sup> siècle établit cette formule à partir de l'étude de données expérimentales publiées par d'autres personnes, cf. Hager (2003).

14.  $\log$  signifie le logarithme en base 10. Karman, ingénieur d'origine hongroise, Nikuradze, ingénieur d'origine géorgienne, et Prandtl, physicien allemand, furent actifs durant la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle. Les limites de validité des formules sont indicatives, comme discuté plus loin ; de plus les valeurs de  $\lambda$  ainsi prédites le sont à quelques % près.

tuyaux à *paroi lisse* ( $\varepsilon = 0$ ) et *rugueuse* ( $\varepsilon > 0$ ). Elle a été ajustée sur la formule de Karman-Nikuradze-Prandtl pour tuyau lisse et sur une formule similaire dite de Colebrook & White pour tuyau rugueux. Cette **formule de Haaland**

$$\lambda = \left( -1,8 \log \left( (\varepsilon/3,7)^{1,11} + 6,9 Re^{-1} \right) \right)^{-2}, \quad (8.29)$$

pourrait selon son auteur être utilisée pour  $4000 \lesssim Re \lesssim 10^8$ ,  $0 \lesssim \varepsilon \lesssim 5 \cdot 10^{-2}$ . Remarquablement, en tuyau rugueux et turbulence forte complètement développée, lorsque  $Re \rightarrow +\infty$ , le coefficient de perte de charge cesse de décroître et tend vers une valeur finie.

Signalons, pour terminer ce paragraphe dédié aux écoulements turbulents en tuyau, que les études expérimentales datent de la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle et ne sont pas extrêmement précises. En particulier, la limite  $Re \simeq 10^8$  indiquée ci-dessus, « revendiquée » comme limite supérieure de validité de la formule (8.29) par Haaland (1983), est sans doute trop élevée. Une étude expérimentale récente en *tuyau lisse* à haut Reynolds, publiée dans McKeon et al. (2005), propose par exemple, pour  $10^4 \lesssim Re \lesssim 4 \cdot 10^7$ , d'« actualiser » la formule de Karman-Nikuradze-Prandtl sous la forme<sup>15</sup>

$$1/\sqrt{\lambda} = 1,930 \log(Re \sqrt{\lambda}) - 0,537. \quad (8.30)$$

Malheureusement, à ma connaissance, des études expérimentales récentes en tuyau rugueux, qui permettraient d'« actualiser » la formule plus générale de Haaland, manquent à l'appel.

Dans le régime intermédiaire de **transition vers la turbulence**, grosso modo pour

$$2000 \lesssim Re \lesssim 4000,$$

on a une très grande **sensibilité aux perturbations extérieures**, donc l'**absence de lois universelles** pour le coefficient de perte de charge  $\lambda$ , qui peut d'ailleurs présenter des fluctuations d'assez grande amplitude, ce qui n'est pas le cas en régime laminaire ou turbulent. C'est pour cette raison qu'il n'y a pas de courbes dans cet intervalle sur la figure 8.4. Comme on l'a évoqué section 8.2.2, on est amené dans ce régime à faire une étude de l'influence des perturbations extérieures, non seulement du point de vue de leur amplitude, mais aussi du point de vue de leur forme. Ces études, commencées en 1883, sont loin d'être terminées, comme en témoigne le fait que des articles de recherche ont été publiés récemment sur ce sujet (Hof et al. 2006; Schneider et al. 2007; Avila et al. 2011). De manière plus générale le problème de la **transition vers la turbulence** et de la **modélisation de la turbulence** sont des sujets de recherche très importants en mécanique des fluides, sur lesquels de nombreux chercheurs travaillent à l'heure actuelle<sup>16</sup>...

### 8.3 Conclusion : nombres adimensionnels en mécanique des fluides

Afin de mieux interpréter la physique des paramètres de contrôle adimensionnels de la mécanique des fluides, il est possible de les introduire directement à partir de l'équation de Navier-Stokes (7.43),

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left( \overline{\nabla \mathbf{v}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = \rho \bar{\mathbf{g}} - \overline{\nabla p} + \eta \overline{\Delta \mathbf{v}}. \quad (8.31)$$

15. Cette formule (8.30) serait plus pertinente à partir de  $Re \gtrsim 10^6$ ; elle conduit à des valeurs de  $\lambda$  supérieures à celles estimées par (8.28) de 2% pour  $Re \simeq 10^6$ , 3% pour  $Re \simeq 10^7$ , 5% pour  $Re \simeq 4 \cdot 10^7$ .

16. Dont certains chercheurs du Lemta.

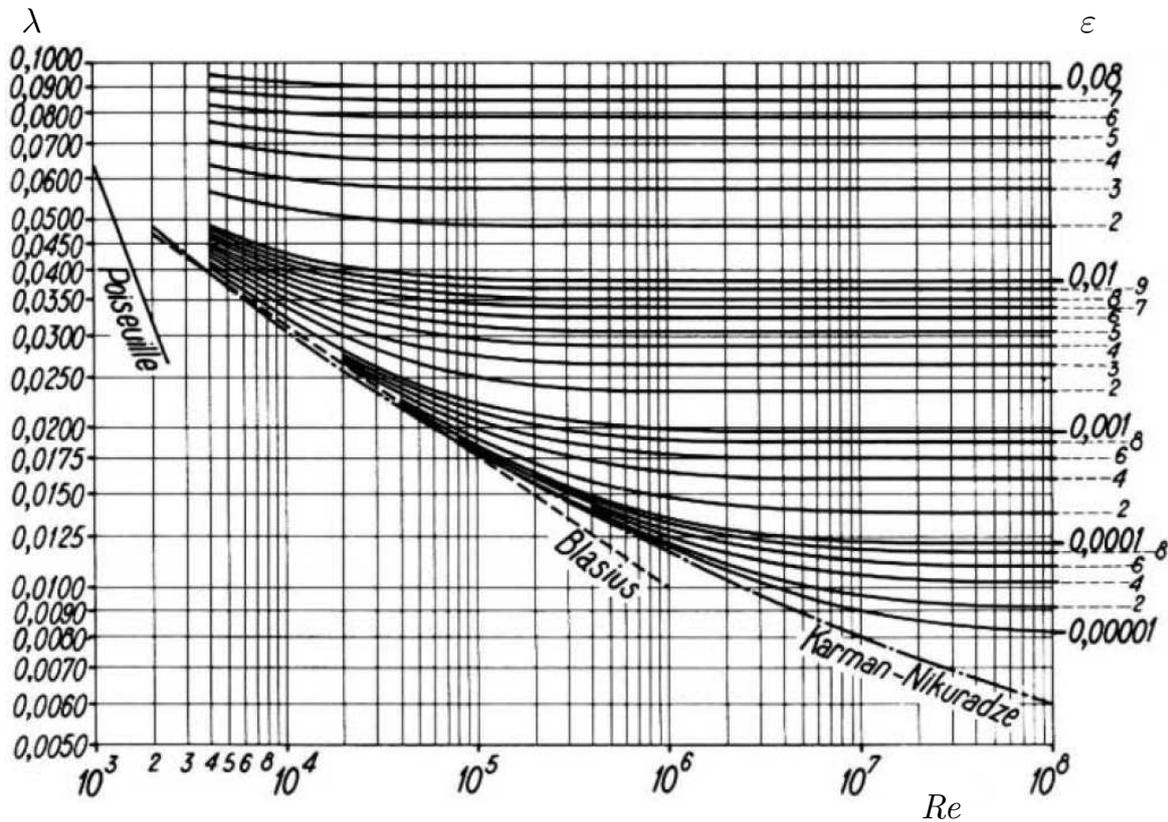


Fig. 8.4 – Coefficients de perte de charge  $\lambda$  des écoulements en tuyau en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  et de la rugosité relative  $\varepsilon$  (Bomnin 1983). Observez qu'en régime turbulent, pour  $Re \gtrsim 4000$ , les coefficients  $\lambda$  obtenus sont très supérieurs à ceux prédits par la loi de (Hagen-)Poiseuille (8.26).

Ainsi le **nombre de Reynolds** apparaît comme l'ordre de grandeur du quotient du terme non linéaire inertiel par le terme visqueux,

$$Re = \frac{O\left(\rho\left(\overline{\nabla\bar{v}}\right) \cdot \bar{v}\right)}{O(\eta\Delta\bar{v})} = \frac{\rho L^{-1}V V}{\eta L^{-2}V} \quad (8.32)$$

si  $L$  est la taille caractéristique des hétérogénéités de vitesse,  $V$  la valeur caractéristique de la vitesse. On retrouve bien ainsi l'expression analogue de (8.3),

$$Re = \frac{V L}{\nu} . \quad (8.33)$$

Le fait que la transition vers la turbulence ait lieu lorsque le nombre de Reynolds augmente montre que, en général, cette transition est due au terme non linéaire inertiel dans l'équation de Navier-Stokes, qui « domine » alors les termes stabilisants de diffusion visqueuse.

De la même manière on peut introduire par exemple le **nombre de Strouhal**<sup>17</sup>

$$St = \frac{O(\partial\bar{v}/\partial t)}{O\left(\left(\overline{\nabla\bar{v}}\right) \cdot \bar{v}\right)} = \frac{V f}{L^{-1}V V} = \frac{f L}{V} \quad (8.34)$$

17. Physicien tchèque de la fin XIX<sup>ème</sup>, début XX<sup>ème</sup>.

avec  $f$  une fréquence caractéristique des fluctuations de vitesse, et le *nombre de Froude*<sup>18</sup>

$$Fr = \frac{O\left(\left(\overline{\nabla \bar{v}}\right) \cdot \bar{v}\right)}{O(\bar{g})} = \frac{L^{-1}V V}{g} = \frac{V^2}{g L}. \quad (8.35)$$

Un nombre de Froude grand signifie que les effets de la gravité sur l'écoulement sont (a priori) négligeable.

On peut introduire de très nombreux nombres adimensionnels, lorsque plus d'effets physiques sont pris en compte : la page [Dimensionless numbers in fluid mechanics](#) de l'encyclopédie Wikipedia en anglais, par exemple, recense plus de 70 nombres adimensionnels en (magnéto- thermo-) hydrodynamique ! Vous pourrez découvrir certains d'entre eux dans les modules sur la mécanique des fluides et les phénomènes de transfert donnés à l'école par divers enseignants-chercheurs du département *Énergie*...

## 8.4 Exercices et problèmes

On propose quatre exercices « classiques » destinés à illustrer l'intérêt de l'analyse dimensionnelle appliquée à la mécanique des fluides. Suivent deux problèmes mettant en scène des *éoliennes*, présenté pour le premier dans une optique de *développement durable*, pour le second afin aussi d'offrir un exemple de *couplages fluide - structure*. Ce dernier problème peut donc, en un certain sens, être considéré comme un « aboutissement » de ce module<sup>19</sup>. D'autant plus que la thématique est récente, car liée au développement d'*éoliennes* de grande puissance - grande taille...

### Exercice 8.1 Perte de charge régulière dans un tuyau de pompier

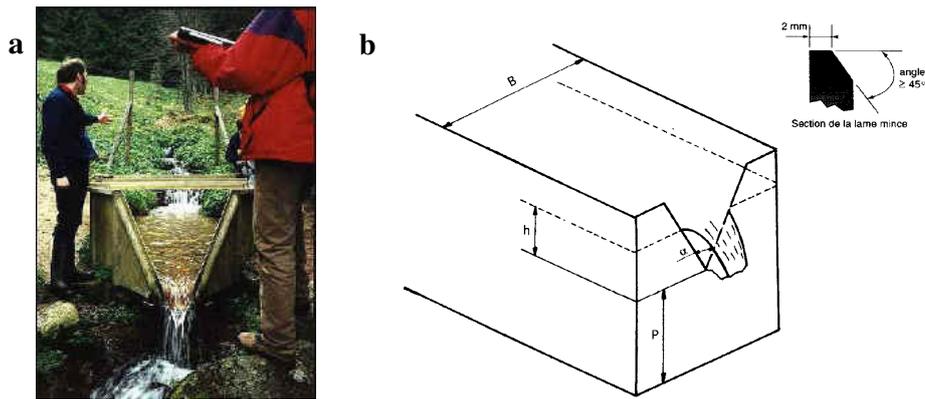
Confirmez, par un raisonnement et un calcul détaillé, la valeur de la perte de charge régulière (7.125) estimée pour un écoulement d'eau dans un tuyau de caoutchouc de diamètre  $d = 70$  mm, de longueur  $L = 50$  m, avec un débit volumique  $q = 10$  /s .

### Exercice 8.2 Étude par analyse dimensionnelle d'un déversoir triangulaire

Les *déversoirs triangulaires* constituent des systèmes de mesure de débit aptes à mesurer le débit d'un ruisseau ou d'une petite rivière (figure 8.5). Ils sont constitués essentiellement d'une plaque plane obturant l'écoulement mais comportant une ouverture triangulaire, l'angle au sommet de cette ouverture étant  $\alpha$ . Le liquide débitant s'échappe par cette ouverture, et en mesurant la hauteur  $h$  de liquide au-dessus de l'ouverture on peut accéder au débit volumique  $q$ . En utilisant un modèle de *fluide parfait*, et en négligeant les effets de tension superficielle à l'interface entre le liquide et l'air, établissez par analyse dimensionnelle la forme de la formule à utiliser pour déduire le débit de la mesure de  $h$ .

18. Ingénieur anglais du XIX<sup>ème</sup> siècle.

19. Avant d'aborder ce problème 8.2, il est recommandé de traiter le problème 5.1.



**Fig. 8.5** – **a** : Exemple d'utilisation d'un *déversoir triangulaire* pour mesurer le débit d'un ruisseau. Photographie extraite du site web de Jean Melounou consacré à son mémoire de maîtrise en géographie physique. **b** : Schéma de principe d'un déversoir triangulaire, tiré de [Remenieras \(1986\)](#).

### Exercice 8.3 *Similitude pour l'étude des performances d'une hélice d'avion*

On désire construire une *maquette d'hélice d'avion*<sup>20</sup> destinée à reproduire, dans un laboratoire situé au niveau de la mer, des conditions similaires à celles rencontrées en vol à 4000 mètres d'altitude, altitude nominale de vol de l'appareil. À cause des valeurs élevées de la vitesse angulaire  $\omega$  de rotation de l'hélice, des effets de *compressibilité* interviennent, qui sont décrits par la *vitesse finie du son* dans l'air<sup>21</sup>

$$c = \sqrt{\gamma RT/M} \quad (8.36)$$

avec  $\gamma = 7/5$  le rapport des capacités calorifiques à pression et volume constants,

$R = 8,314$  J/K/mol la constante des gaz parfaits,

$T$  la température en Kelvins,

$M$  la masse molaire de l'air.

**1** Vérifiez l'homogénéité dimensionnelle de la formule (8.36).

**2.1** Par analyse dimensionnelle, établissez la nature des paramètres de contrôle adimensionnels de ce problème. Vous prendrez comme paramètres de contrôle dimensionnels la vitesse moyenne  $V$  de l'air par rapport à l'hélice, le diamètre  $d$  de l'hélice, la masse volumique  $\rho$  de l'air, sa viscosité dynamique  $\eta$ , la vitesse du son  $c$  et la vitesse angulaire  $\omega$  de rotation de l'hélice.

**2.2** Déduisez-en les *règles de similitude* à respecter pour obtenir le même régime d'écoulement dans l'étude réalisée au sol dans une soufflerie et en conditions de vol réelles.

On utilisera les données correspondants à l'atmosphère « standard »<sup>22</sup> :

$$\begin{aligned} z = 0 \text{ m} &\implies p = 1013 \text{ hPa} , T = +15^\circ\text{C} , \eta = 1,79 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s} , \\ z = 4000 \text{ m} &\implies p = 617 \text{ hPa} , T = -11^\circ\text{C} , \eta = 1,66 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s} . \end{aligned}$$

20. Un propulseur à hélice est aussi appelé « *turbopropulseur* ».

21. L'expression (8.36) résulte de l'usage d'un modèle de fluide parfait, cf. par exemple le chapitre 3 de [Plaut \(2021b\)](#). Elle reste cependant pertinente en fluide visqueux, les effets de viscosité produisant essentiellement une atténuation du son, mais pas (ou peu) de décalage de la vitesse du son.

22. Cf. sur ce sujet l'énoncé et la figure de l'exercice 7.2.

**3.1** La grandeur dépendante la plus intéressante pour l'avionneur est la *puissance*  $P$  développée par l'hélice. Grâce au théorème  $\pi$  de Vaschy-Buckingham, établissez la forme de l'expression donnant cette puissance en fonction des paramètres de contrôle du système.

**3.2** Dans le cas d'une expérience sur maquette réalisée dans les conditions de similitude déterminées en 2.2, on mesure une puissance  $P_0$  développée par l'hélice. Estimez alors la puissance  $P_1$  développée par l'hélice en conditions nominales de vol.

#### Exercice 8.4 *Similitude de lâchers de vortex de Bénard-Von-Karman*

Le phénomène de *lâcher de vortex de Bénard-Von-Karman* derrière un obstacle de forme cylindrique est assez « universel », comme le montre l'analogie entre les deux situations présentées sur la figure 8.6<sup>23</sup>.

**1** Expliquez les origines fondamentales de la « *similitude* » entre ces deux écoulements, se produisant pourtant dans des fluides différents et à des échelles différentes, puisque l'obstacle cylindrique utilisé par l'ONERA a un diamètre  $d = 10$  cm alors que l'île de Santo Antao a un diamètre « effectif »<sup>24</sup>  $d' \simeq 15$  km.

**2** Pour préciser quantitativement ce qui précède, rappelez la formule du cours d'analyse dimensionnelle donnant le seul paramètre de contrôle adimensionnel de ce problème de mécanique des fluides, et comment on le désigne. Quelle est la valeur de ce paramètre pour le cas 2, sachant que le vent soufflait à une vitesse  $V' = 50$  km/h, et que la température  $T \simeq 20^\circ\text{C}$ ? Que peut-on en déduire sur la nature de l'écoulement dans le cas 2?

**3** Quelle serait la vitesse d'écoulement  $V$  qu'il faudrait utiliser dans l'expérience de l'ONERA pour réaliser, à  $T \simeq 20^\circ\text{C}$ , une similitude « maximale » entre cette expérience de laboratoire et le cas 2? Commentez.

**4** On s'intéresse maintenant à la grandeur dépendante  $T_v$ , période temporelle du lâcher de vortex. En suivant de façon stricte la méthode du cours, établissez la formule donnant le groupement  $\pi_0$  associé à cette grandeur.

**5** Un résultat d'observations expérimentales est que  $\pi_0$  est pratiquement constant quelque soit le régime d'écoulement, oscillant ou oscillant turbulent, et de l'ordre de 5. Estimez à partir de ces informations (extrapolées...) la période temporelle du lâcher de vortex  $T'_v$  dans le cas de la photo 2. Comparez de façon commentée cette durée à une durée météorologique typique et au temps de survol d'une aire géographique par le satellite Terra, soit quelques minutes environ.

23. La photo 2 provient du site Visible Earth de la NASA, <http://visibleearth.nasa.gov>.

24. Largeur dans la direction perpendiculaire au vent incident  $\bar{V}'$ .



**Fig. 8.6** – Photographies de phénomènes de *lâcher de vortex de Bénard-Von-Karman* derrière des obstacles. **Photo 1** : expérience en canal hydraulique réalisée à l'ONERA ; l'obstacle est un cylindre ; le colorant a été injecté pour tracer les lignes d'émission. **Photo 2** : prise au-dessus de l'île volcanique de Santo Antao par le satellite Terra ; l'écoulement de l'air atmosphérique est visible grâce à des nuages.

### Problème 8.1 *Éoliennes à axe horizontal : analyse dimensionnelle et modèle de Betz*

Le développement de l'*énergie éolienne* est un enjeu de *développement durable* lié à la *transition énergétique* : cette *énergie renouvelable*, qui présente un très bon bilan carbone<sup>25</sup>, peut justement contribuer à la « décarbonation de l'électricité », même si elle n'est en aucun cas une solution « miracle ». De fait, sans parler d'autres impacts environnementaux à maîtriser, l'efficacité et la sobriété énergétique importent, comme le résume le slogan

« *La meilleure énergie, c'est celle que l'on ne consomme pas* » !..

En sus de son caractère peu carboné, l'énergie éolienne est économiquement très compétitive, et pourrait donc être vue comme une opportunité de « croissance verte »<sup>26</sup>...

D'un point de vue physique, l'énergie éolienne est liée à l'énergie solaire : 1 à 2% de l'énergie solaire arrivant sur la terre par rayonnement est transformée par des mécanismes « météorologiques » en énergie éolienne... énergie « fluide » que l'on peut capter, par exemple, par des *éoliennes à axe horizontal*. Descendantes des moulins à vent du moyen âge, elles sont apparues en tant que système de production d'électricité dès la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, et n'ont cessé depuis de se perfectionner et de monter en puissance, comme on va le montrer dans la question 1.2, en lien avec les figures 8.7ab.

Dans ce problème, après des analyses dimensionnelles et d'ordre de grandeur, on étudie une éolienne à axe horizontal à l'aide du *modèle de Betz*, modèle « historique » assez ancien<sup>27</sup>, mais présenté ici d'une façon « moderne »... et finalement confronté à des données constructeur correspondant à une éolienne 2 MW typique des parcs 'onshore' installés en France dans les années 2005 - 2010<sup>28</sup>.

25. Voyez le tableau comparatif, tiré d'un rapport du GIEC, de [la page Wikipédia Émission de gaz à effet de serre par source d'énergie électrique](#).

26. Comme décrit de façon bien documentée sur <https://ourworldindata.org/cheap-renewables-growth>, qui émane d'une organisation à but non lucratif liée à l'université d'Oxford.

27. Betz, physicien allemand actif pendant la 1<sup>ère</sup> moitié du XX<sup>ème</sup> siècle, et jusque dans les années 1950, proposa une 1<sup>ère</sup> version de ce modèle dès 1920.

28. Ainsi le *parc du Haut des Ailes*, situé à moins de 50 km de Nancy, que l'on peut visiter dans le cadre de la [Route des énergies renouvelables lorraine](#), est constitué d'éoliennes Senvion MM82 très similaires aux Enercon E-82 E2 que vous allez étudier dans les questions 6.

Comme représenté sur les figures 8.7c,d<sup>29</sup>, Betz modélise d'une façon « moyenne »<sup>30</sup> l'éolienne par un *cyindre*  $\Omega_d$  ou *disque actuateur*  $S_d$  centré sur le moyeu du rotor de l'éolienne, soit le point O origine du repère aux échelles considérées. Si on néglige son épaisseur, en tant que disque,  $S_d$  s'étend jusqu'à la pointe des pales : c'est une surface  $S_d$  d'aire  $A = \pi D^2/4$  avec  $D$  le diamètre du rotor. En tant que cylindre c'est un volume  $\Omega_d$  centré sur  $S_d$  et s'étendant de part et d'autre, dans la direction  $x$  du vent incident, sur une distance<sup>31</sup> très inférieure à  $D$ . Dans ce volume  $\Omega_d$ , considéré fluide, l'action des pales de l'éolienne sur l'air<sup>32</sup> est modélisée par une densité volumique de force uniforme stationnaire  $\bar{\mathbf{f}} = -f\bar{\mathbf{e}}_x$ , dont la résultante est la *puissance*  $\bar{\mathbf{F}} = -F\bar{\mathbf{e}}_x$ . Cette action localisée dans la direction  $x$  a pour résultat une variation rapide de la pression  $p$  qui passe de  $p_+$  à l'entrée du cylindre à  $p_-$  à sa sortie, comme représenté sur la figure 8.7e. Par contre, suffisamment loin en amont et aval, la pression rejoint la pression atmosphérique  $p_{\text{atm}}$  : le fait que l'on soit quasiment à  $p_{\text{atm}}$  définit justement les sections d'entrée  $S_e$  (d'aire  $A_e$ ) et de sortie  $S_s$  (d'aire  $A_s$ ) du grand tube de courant  $\Omega_t$  représenté sur les figures 8.7cd. On suppose même pour simplifier que la pression  $p \simeq p_{\text{atm}}$  sur tout  $\partial\Omega_t$ . L'action de l'éolienne par les forces volumiques uniformes stationnaires  $\bar{\mathbf{f}}$  permet de supposer l'écoulement de l'air quasi stationnaire dans  $\Omega_t$ , et, de plus, quasi uniforme unidirectionnel dans la direction  $x$  sur les 3 surfaces  $S_e$ ,  $S_d$  et  $S_s$ . L'air est ralenti par l'éolienne, ainsi les vitesses correspondantes sont dans la relation

$$\underbrace{U}_{\text{vitesse amont}} > \underbrace{u}_{\text{vitesse au niveau de l'éolienne}} > \underbrace{u_s}_{\text{vitesse en aval dans le sillage}}. \quad (8.37)$$

L'air, considéré comme un *fluide parfait incompressible*, a une température de l'ordre de 20°C, et une masse volumique  $\rho$  uniforme. Dans les bilans dynamiques on néglige l'effet de la pesanteur sur l'air. Enfin, on suppose le rendement de conversion du générateur électrique de l'éolienne égal à 1, i.e., on confond la *puissance mécanique*  $P_m$  fournie par le vent à l'arbre de l'éolienne avec la *puissance électrique*  $P$  fournie au réseau.

## 1 Étude des ordres de grandeur par analyse dimensionnelle

1.1 On définit le *coefficient de puissance*  $c_p$  de l'éolienne, qui dépend en première approximation seulement de  $U$  et de la nature de l'éolienne<sup>33</sup>, de sorte que

$$P = c_p \frac{1}{2} \rho^\alpha A^\beta U^\gamma. \quad (8.38)$$

Calculez par analyse dimensionnelle les valeurs, entières, des exposants  $\alpha, \beta, \gamma$ . Précisez la formule obtenue en indiquant ci-dessous les exposants trouvés,

$$P = \dots \quad (8.39)$$

En introduisant une énergie  $E$  dont  $P = \dot{E}$  serait la dérivée temporelle, et en réagencant l'expression de  $dE = P_m dt$  de façon physique, expliquez ce que mesure  $c_p$  et donnez-en une première borne supérieure.

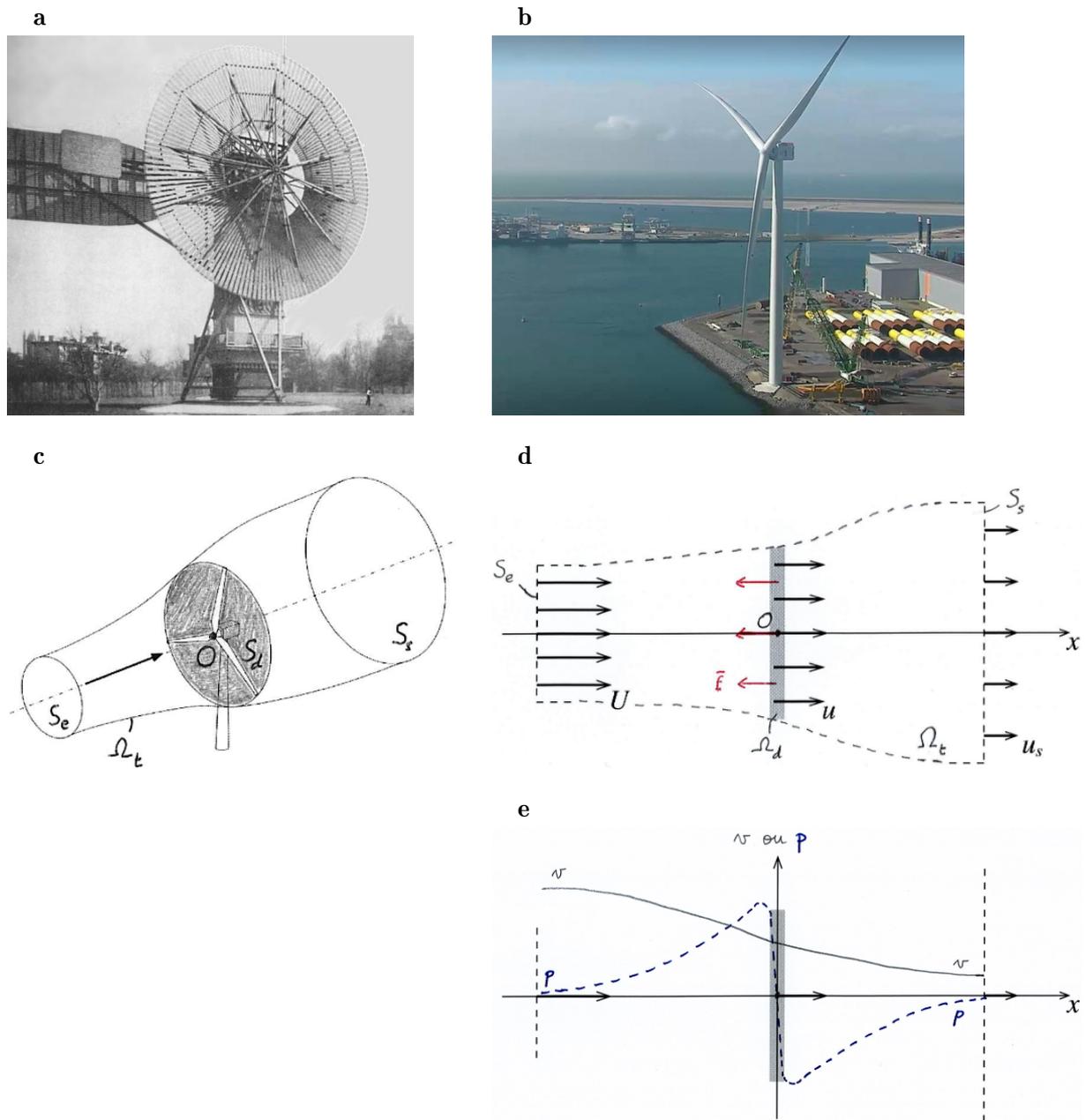
29. L'image originelle de la figure 8.7c est tirée du site <https://openmdao.org>.

30. Les champs de vitesse et de pression du modèle de Betz sont grosso modo une approximation des champs de vitesse et de pression de l'écoulement d'air réel moyennés par rapport au temps.

31. On peut voir cette distance comme étant l'épaisseur moyenne, dans la direction  $x$ , d'une pale.

32. L'action du mât de l'éolienne sur l'air est aussi modélisée dans les forces  $\bar{\mathbf{f}}$  que l'on va décrire, sans compliquer la géométrie « disque actuateur ».

33. La fonction  $c_p(U)$  est ainsi une « donnée constructeur »... dont nous estimerons une borne supérieure avec le modèle de Betz, au vu de toutes les hypothèses « idéales » faites!



**Fig. 8.7** – (en couleurs dans la version PDF) **a** : Première *éolienne à axe horizontal*, créée par Charles Brush, ingénieur américain, en 1888. **b** : Prototype de l'éolienne la plus puissante actuellement, l'Haliade-X de General Electric, installé à Rotterdam fin 2019. **c,d,e** : Schémas de principe du **modèle de Betz** d'une éolienne à axe horizontal. **c,d** : Géométrie tridimensionnelle et en coupe verticale. L'éolienne est orientée de façon optimale i.e. face au vent amont de vitesse  $\bar{v} = U\bar{e}_x$ . Les lignes noires représentent le tube de courant  $\Omega_t$  pour lequel divers « bilans » seront explicités. Ce tube contient notamment le *disque actuateur*  $S_d$  ou *cylindre actuateur*  $\Omega_d$  représentés en gris. Les flèches vers la droite (resp. gauche) représentent des vitesses de vent  $\bar{v}$  (resp. des forces volumiques  $\bar{f}$ ). **e** : Dans la même zone que celle représentée figure d, dont on a repris certains éléments, allure des profils de norme de vitesse  $v = \|\bar{v}\|$  (courbe continue) et pression  $p$  (courbe tiretée) le long de l'axe  $Ox$  de l'éolienne. L'origine de l'axe des vitesses est à  $v = 0$ , celle de l'axe des pressions est à  $p = p_{\text{atm}}$ . Dans  $\Omega_d$ , toujours représenté en gris, la vitesse est quasi uniforme alors que la pression varie très rapidement.

**1.2** Sachant que l'éolienne de Charles Brush (figure 8.7a) avait un rotor de diamètre  $D_B = 17$  m et une *puissance nominale*<sup>34</sup>  $P_B = 12$  kW, atteinte pour  $U \simeq 10$  m/s, estimez son coefficient de puissance  $c_{pB}$  dans ces conditions. Commentez succinctement.

En admettant que les progrès réalisés depuis Charles Brush dans la conception des éoliennes ont permis à l'éolienne la plus puissante actuellement, l'Haliade-X de General Electric (figure 8.7b), d'avoir dans des conditions de vent similaires un coefficient de puissance  $c_{pH} \simeq 6 c_{pB}$ , sachant d'autre part que le diamètre de rotor de l'Haliade-X  $D_H = 220$  m, estimez la puissance nominale  $P_H$  de l'Haliade-X. Écrivez le rapport  $P_H/P_B$  sous la forme d'un produit de deux facteurs d'augmentation de puissance, l'un dû à des progrès effectués en mécanique des fluides, l'autre, lié à la géométrie, donc à des progrès effectués en mécanique des solides. Commentez, en vérifiant aussi sur Internet la pertinence de l'estimation de  $P_H$ .

## §

Pour aller plus loin que l'analyse dimensionnelle, et obtenir une prédiction de la valeur maximale possible du coefficient de puissance, nous nous intéressons maintenant au *modèle de Betz*, qui sera finalement confronté à des données de puissance précises.

## 2 Bilans de masse

Au vu des hypothèses faites pour l'écoulement dans  $\Omega_t$ , identifiez le *débit massique*  $\dot{m}$  correspondant, et donnez-en 3 expressions différentes faisant chacune intervenir l'une des vitesses  $U$ ,  $u$  et  $u_s$ , ainsi que des aires caractéristiques,

$$\dot{m} = \quad = \quad = \quad . \quad (8.40)$$

De même, établissez 3 expressions équivalentes du *débit volumique*  $q$ ,

$$q = \quad = \quad = \quad . \quad (8.41)$$

Déduisez-en une explication physique de l'expansion du tube de courant  $\Omega_t$  entre  $S_e$ ,  $S_d$  et  $S_s$ , visible sur les figures 8.7cd.

## 3 Bilan de quantité de mouvement

Explicitez la loi globale d'évolution de la *quantité de mouvement*  $\bar{\mathbf{p}}$  de l'air contenu dans le domaine  $\Omega_t$ .

Commencez par expliciter l'expression cinématique de  $d\bar{\mathbf{p}}/dt$ , que vous interpréterez physiquement. Explicitez ensuite l'expression dynamique de  $d\bar{\mathbf{p}}/dt$ .

Concluez en exprimant la poussée  $F$  en fonction du débit  $\dot{m}$  et 2 des 3 vitesses ( $U$ ,  $u$ ,  $u_s$ ),

$$F = \quad . \quad (8.42)$$

Commentez succinctement.

## 4 Bilan d'énergie cinétique

Explicitez la loi globale d'évolution de l'*énergie cinétique*  $E_c$  de l'air contenu dans le domaine  $\Omega_t$ .

34. La puissance nominale d'une éolienne est aussi sa puissance maximale, ou « à plein régime »; la valeur caractéristique  $U \simeq 10$  m/s prise dans cette question, de même que le facteur 6 dans la relation  $c_{pH} \simeq 6 c_{pB}$ , doivent être vus comme des ordres de grandeur et non des données précises concernant les éoliennes en jeu.

4.1 Commencez par expliciter l'expression cinématique de  $dE_c/dt$ , et interprétez-la physiquement.

4.2 Donnez ensuite l'expression dynamique de  $dE_c/dt$ , en faisant apparaître la **puissance mécanique**  $P_m$  fournie par l'air à l'éolienne, que vous exprimerez au passage en fonction de  $F$  et d'une vitesse caractéristique,

$$P_m = \quad . \quad (8.43)$$

4.3 Déduisez-en la **puissance électrique**  $P$  en fonction du débit  $\dot{m}$  et 2 des 3 vitesses ( $U, u, u_s$ ),

$$P = \quad . \quad (8.44)$$

Commentez succinctement.

### 5 Résolution

5.1 En égalant une expression de  $F$  déduite des équations (8.40) et (8.42) avec une expression alternative de  $F$  déduite de (8.43,8.44), calculez la vitesse  $u$  en fonction des vitesses  $U$  et  $u_s$ ,

$$u = \quad . \quad (8.45)$$

Commentez succinctement.

5.2 En partant de deux expressions différentes de la puissance  $P$ , (8.39) qui définit le coefficient de puissance  $c_p$ , et (8.44), exprimez le coefficient de puissance en fonction du seul rapport de vitesses

$$r = u_s/U . \quad (8.46)$$

Vous mettrez finalement  $c_p$  sous la forme  $(a + br)^2 (1 - r)$ , notamment parce que le cas extrême  $r = 1$  conduit, pour des raisons physiques que vous expliquerez, à une puissance nulle.

5.3 Représentez la courbe  $c_p(r)$  et montrez qu'elle atteint, dans l'intervalle de valeurs de  $r$  d'intérêt, un maximum que vous calculerez numériquement et analytiquement,

$$\max c_p = \quad \text{pour } r_{\max} = \quad . \quad (8.47)$$

Commentez succinctement la valeur optimale trouvée, dite aussi « **limite de Betz** », et expliquez cette terminologie.

Calculez enfin, à l'optimum, les vitesses  $u$  et  $u_s$  en fonction de  $U$ , et commentez succinctement.

### 6 Comparaison aux données de puissance d'une éolienne Enercon E-82 E2

Les éoliennes E-82 E2 (ci-après désignées simplement E-82-2) décrites sur la page

[www.enercon.de/fr/produits/ep-2/e-82](http://www.enercon.de/fr/produits/ep-2/e-82)

de l'entreprise allemande Enercon, sont caractérisées pour l'une d'entre elles, sur laquelle on se focalise, par les **données de puissance** publiées sur la [page web du module au niveau de la séance 10](#) et sur la table 8.1.

6.1 À l'aide d'un logiciel comme **Excel** ou **Matlab**, représentez sa **courbe de puissance**  $P(U)$  pour  $U$  variant de 0 à 25 m/s, et commentez-la.

6.2 En inversant la formule de définition (8.39) du **coefficient de puissance**  $c_p$ , calculez celui-ci numériquement pour l'éolienne E-82-2, à partir des données  $(U, P)$  pour  $U$  variant de 0 à 25 m/s, et représentez la courbe  $c_p(U)$  dans cet intervalle.

Commentez cette courbe, en faisant le lien avec le modèle de Betz. Concluez.

$U$ [m/s]	$P$ [kW]
0	0
1	0
2	3
3	25
4	82
5	174
6	321
7	532
8	815
9	1180
10	1580
11	1810
12	1980
13	2050

**Tab. 8.1** – *Données de puissance électrique  $P$  d'une éolienne E-82-2 2050 kW, à vitesses de vent modérées  $U \leq 13$  m/s. À vitesses plus élevées  $13 \text{ m/s} \leq U \leq 28$  m/s la puissance sature à sa valeur nominale 2050 kW. Ces données sont extraites d'un catalogue Enercon publié en 2015.*

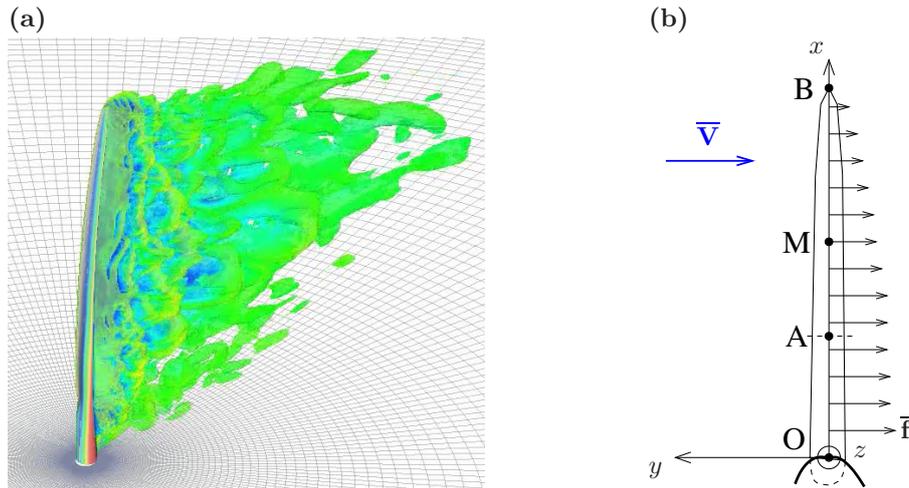
### Compléments : évocation des systèmes de contrôle - commande d'une éolienne

Dès qu'il y a un peu de vent, l'éolienne est orientée face au vent, grâce à un **contrôle - commande en rotation de la nacelle solidaire du rotor** constitué des pales et du moyeu. La saturation de la puissance évoquée dans la légende de la table 8.1 résulte d'un **contrôle - commande de la rotation des pales autour de leur axe** : on modifie leur « angle de calage » (*'pitch angle'* en anglais) ce qui diminue leur prise au vent, et permet ainsi de préserver le générateur électrique en ne le mettant pas en présence d'un couple trop fort. Enfin, au delà de la **vitesse de décrochage**  $U = 28$  m/s, pour des raisons de sécurité on réduit la prise au vent des pales au minimum : elles sont « mises en drapeau ». Notamment, on évite de cette manière le fait qu'une pale trop déformée en flexion par un vent très fort (cf. le problème 8.2!) puisse en conséquence heurter le mât de l'éolienne, ce qui serait catastrophique. On découple aussi le générateur électrique : le rotor est en rotation quasi libre (on freine très légèrement sa rotation) à faible vitesse, tandis que la puissance électrique  $P = 0$ .

### Problème 8.2 Étude d'une pale d'éolienne bloquée soumise à un vent fort

On étudie une **pale d'éolienne** en situation de **tempête**, soumise dans la configuration « actuelle » ou « finale » à un vent de vitesse moyenne  $\bar{V}$ , comme représenté sur la figure 8.8. La rotation de l'éolienne est bloquée. On suppose pour fixer les idées que, dans la configuration de référence sans vent, la pale est orientée dans la direction verticale  $x$ . Elle présente, malheureusement, face au vent orienté dans la direction horizontale  $-y$ , son profil le moins aérodynamique et le plus large. Pour une pale de longueur  $L = 60$  m de l'éolienne dite « NREL 5 MW », définie dans Jonkman et al. (2009), cette situation a été simulée numériquement dans le laboratoire ForWind de l'université d'Oldenburg<sup>35</sup>, cf. la figure 8.8a. La figure 8.8b présente le repère cartésien  $Oxyz$  utilisé. La base orthonormée correspondante est notée  $\{\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z\}$ . Sur la «  **fibre moyenne**  »,

35. [www.forwind.de/en](http://www.forwind.de/en).



**Fig. 8.8** – **a** (en couleurs dans la version PDF) : Image d'une simulation numérique réalisée à ForWind, d'une *pale d'éolienne bloquée soumise à un vent fort*  $V = \|\bar{\mathbf{V}}\| = 50$  m/s. Les structures dans le sillage de la pale sont les zones tourbillonnaires de l'écoulement, visualisées à l'aide d'un critère de calcul tensoriel. **b** : Schéma de principe avec la pale dans la situation de référence, mais le vecteur vitesse du vent  $\bar{\mathbf{V}}$  et la densité de force  $\bar{\mathbf{f}}$  de la configuration finale - échelle non respectée. La ligne pointillée en A représente la coupe virtuelle étudiée en question 3.

définie dans la configuration de référence par le segment

$$\{ A(x,0,0) \quad \text{avec} \quad x \in [0,L] \} , \quad (8.48)$$

figurent le point O à la « *racine* » de la pale, là où elle est fixée sur le moyeu, le point A où on imaginera une coupe virtuelle de la pale, un autre point courant M, et enfin le point B extrémité de la pale. Dans la configuration actuelle, le *vecteur déplacement* du point A est

$$\bar{\mathbf{u}}(x) = v(x) \bar{\mathbf{e}}_y \quad (8.49)$$

avec  $v$  la « *flèche* », que l'on veut calculer. On se place dans l'hypothèse de petits déplacements et petite transformation, et d'une réponse élastique linéaire de la structure de la pale. La température ambiante est de l'ordre de 20°C.

## 1 Modèle géométrique de la section de la pale dans le plan $xOz$

**1.1** Dans le plan  $xOz$  face au vent, la section de la pale est définie par sa frontière dans le demi-plan  $z > 0$ , la courbe

$$z_+(x) = a \sqrt{1 - x/L} \quad \text{avec} \quad a = 2,8 \text{ m} ,$$

et sa frontière dans le demi-plan  $z < 0$ , la courbe

$$z_-(x) = -z_+(x) .$$

Représentez soigneusement sur un même graphe, à l'échelle  $1/400^{\text{ème}}$ , les fonctions  $z_{\pm}(x)$  dans le plan  $xOz$ . Montrez que la frontière peut être décrite par une équation simple reliant  $x$  et  $z^2$ , et déduisez-en un adjectif pour qualifier la forme géométrique de cette section de la pale.

**1.2** On définit le diamètre de la pale face au vent à une distance  $x$  du moyeu comme la distance  $d(x)$  entre les deux points intersection de la frontière précédemment caractérisée avec le plan d'abscisse  $x$ . Rajoutez sur le schéma de la question 1.1 ces deux points, dans un cas quelconque. Dans le cas général, montrez que

$$d(x) = d_0 \sqrt{1 - x/L}. \quad (8.50)$$

Calculez  $d_0$  analytiquement et numériquement.

## 2 Force de traînée aérodynamique par unité de longueur

On admet que les *forces aérodynamiques dominantes* sont celles de *traînée*, qui sont bien décrites par une densité linéique de force  $\bar{\mathbf{f}} = -f_y(x) \bar{\mathbf{e}}_y$ , avec  $f_y$  calculée localement comme dans le cas d'un cylindre. Montrez que

$$f_y(x) = f_0 \sqrt{1 - x/L}. \quad (8.51)$$

Calculez  $f_0$  analytiquement, puis, numériquement, en prenant  $V = 50$  m/s et un coefficient de traînée  $C_t = 1,8$  adapté aux vents forts. Commentez succinctement la valeur et forme de  $f_y(x)$ , et la valeur de  $C_t$ .

## 3 Couple de flexion correspondant

On admet que la *flexion* de la pale est contrôlée essentiellement par le *couple de flexion*  $\bar{\Gamma}(x_A)$  total en « aval » du point A, en lequel on considère une coupe virtuelle de la pale (cf. figure 8.8b). Exprimez le couple élémentaire  $d\bar{\Gamma}$  exercé au point A par la force  $\bar{\mathbf{f}} dx$  appliquée autour M de coordonnées  $(x,0,0)$  avec  $x > x_A$ . En intégrant  $d\bar{\Gamma}$  sur la partie avale de la poutre, montrez que le couple de flexion total au niveau de A prend la forme

$$\bar{\Gamma}(x_A) = \Gamma(x_A) \bar{\mathbf{e}}_z \quad \text{avec} \quad \Gamma(x_A) = -G_0 (L - x_A)^\alpha. \quad (8.52)$$

Calculez la constante  $G_0$  analytiquement en fonction de  $f_0$  et  $L$ , et l'exposant  $\alpha$ , qui est un rationnel. Représentez par des flèches courbes l'allure des couples  $\bar{\Gamma}(x)$  le long de la fibre moyenne de la pale, dans le plan  $xOy$ , et commentez succinctement.

## 4-6 Étude de la flexion, en passant par le coefficient de rigidité en flexion

On admet que, bien que la pale soit de nature composite, la théorie développée dans le problème 5.1 s'applique. Ainsi, la flèche  $v(x)$  est déterminée par l'équation (5.62), dite *d'Euler - Bernoulli*,

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\Gamma(x)}{K(x)} \quad (8.53)$$

où  $K(x)$ , le *coefficient de rigidité en flexion*, dépend du module d'Young des matériaux qui constituent la pale, et de la géométrie de la section de la pale dans le plan d'abscisse  $x$ .

**4.1** Afin de simplifier les calculs et de leur conférer un peu d'universalité, on adimensionne les longueurs par  $L$ ,  $K$  par sa valeur à la racine, soit  $K_0 = K(x = 0)$ , et  $\Gamma$  par  $\Gamma_0 = K_0^\beta L^\gamma$ . Déterminez les valeurs (entières) des exposants  $\beta$  et  $\gamma$  par analyse dimensionnelle.

**4.2** On définit le couple adimensionné  $g$  en fonction de l'abscisse adimensionnée  $X = x/L$  par les équations

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 g(x/L) \quad \iff \quad g(X) = \Gamma(LX)/\Gamma_0. \quad (8.54)$$

Montrez, à l'aide des résultats de la question 3, que

$$g(X) = -g_0 (1 - X)^\alpha \quad (8.55)$$

et calculez  $g_0$  analytiquement en fonction de  $f_0$ ,  $K_0$  et  $L$ .

5 On admet que le coefficient de rigidité adimensionné  $k$ , défini par les équations

$$K(x) = K_0 k(x/L) \iff k(X) = K(LX)/K_0, \quad (8.56)$$

est donné par

$$k(X) = \frac{(1 - X)^{5/2}}{1 + 7X + 17X^2 - 25X^3} = \frac{(1 - X)^{3/2}}{1 + 8X + 25X^2}. \quad (8.57)$$

Représentez la fonction  $k(X)$  et commentez succinctement ce graphe.

6.1 En introduisant finalement la flèche adimensionnée  $w$  à l'aide des équations

$$v(x) = L w(x/L) \iff w(X) = v(LX)/L, \quad (8.58)$$

adimensionnez l'équation (8.53). Résolvez-la analytiquement, en écrivant aussi des conditions limites simples pour exprimer qu'en  $x = 0$  la pale est encastree dans le moyeu fixe. Montrez que

$$w(X) = -g_0 \frac{X^2}{12} P(X) \quad (8.59)$$

et calculez le polynôme  $P(X)$ .

6.2 Représentez le graphe de la fonction  $w(X)/g_0$ . Commentez succinctement.

6.3 Revenant à la flèche dimensionnelle  $v(x)$ , calculez sa valeur absolue maximale  $v_{\max}$ , et dites où elle est atteinte. Vous donnerez l'expression analytique de  $v_{\max}$  en fonction de  $f_0$ ,  $L$  et  $K_0$ , et expliquerez physiquement la dépendance de  $v_{\max}$  par rapport à ces trois paramètres.

6.4 Dans le cas où  $V = 50$  m/s, sachant d'autre part que la rigidité à la racine  $K_0 = 19 \cdot 10^9$  N m<sup>2</sup>, calculez la valeur numérique de  $v_{\max}$ . Représentez dans le plan  $xOy$ , sur une figure à l'échelle 1/400ème, l'allure de la fibre moyenne déformée par le vent et du champ de vecteurs déplacement  $\bar{\mathbf{u}}(x)$  le long de la fibre moyenne. Concluez sur la qualité du modèle proposé.

## 7 Étude sommaire des contraintes

On admet qu'en première approximation, la partie la plus rigide de la section de la pale à sa racine est une structure creuse légère qui occupe une surface  $\Sigma_0$  centrée en O dans le plan  $x = 0$ . On admet que sur  $\Sigma_0$  le tenseur des contraintes  $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \sigma_{xx} \bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_x$  avec  $\sigma_{xx} = -\Gamma(0) y/I$  où le moment quadratique  $I = 0,1$  m<sup>4</sup>.

7.1 Donnez l'expression analytique de  $\sigma_{xx}$  en fonction de  $f_0$ ,  $y$ ,  $L$  et  $I$ . Sur  $\Sigma_0$  vue comme une coupe virtuelle de la pale à sa racine, calculez le vecteur contrainte  $\bar{\mathbf{T}}$  exercé par la pale sur sa racine encastree. Représentez dans le plan  $xOy$  l'allure du champ  $\bar{\mathbf{T}}$ . Expliquez la physique des efforts correspondants.

7.2 Dans le cas  $V = 50$  m/s, sachant que la valeur maximale de  $|y|$  sur  $\Sigma_0$  est  $b = 1$  m, calculez la valeur absolue maximale de la contrainte  $\sigma_{xx}$  sur  $\Sigma_0$ , analytiquement puis numériquement. Commentez succinctement. Comment pourrait-on prolonger de façon pertinente cette étude?

## 8.5 Notes personnelles

# Bibliographie

- ALLAIN, S. & BOUAZIZ, O. 2010 A quantitative modeling of the unloading behavior of metals during a tensile test. *Int. J. Mat. Res.* **101**, 1497–1502.
- ANDRIEU, S. 2008 *Physique quantique : de la base aux nouvelles technologies*. Cours de Mines Nancy (1A).
- APPEL, W. 2005 *Mathématiques pour la physique et les physiciens!* H & K Éditions.
- ASHBY, M. F. & JONES, D. R. H. 1998 *Matériaux 1. Propriétés et applications*. Dunod.
- AVILA, K., MOXEY, D., DE LOZAR, A., AVILA, M., BARKLEY, D. & HOF, B. 2011 The onset of turbulence in pipe flow. *Science* **333**, 192–196.
- BARRAT, S. 2012 *Transformations de la matière et de l'énergie*. Cours de Mines Nancy (1A).
- BELLET, D. & BARRAU, J. J. 1990 *Cours d'élasticité*. CEPADUES-ÉDITIONS.
- BONNIN, J. 1983 Écoulement des fluides dans les tuyauteries. *Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique* **A738**.
- CHASSAING, P. 2000 *Mécanique des fluides - Éléments d'un premier parcours*. CÉPADUÈS Éditions.
- DUPEUX, M. 2009 *Introduction à la mécanique des matériaux et des structures*. Dunod.
- FEIDT, M. 1996 *Thermodynamique et optimisation énergétique*. Lavoisier Tec & Doc.
- FOREST, S. & AMESTOY, M. 2020 *Mécanique des milieux continus*. Cours de Mines ParisTech, [http://mms2.ensmp.fr/mmc\\_paris/mmc\\_paris.php](http://mms2.ensmp.fr/mmc_paris/mmc_paris.php).
- GAUDRY, E. 2019 *Physique statistique*. Cours de Mines Nancy (1A).
- GAY, D. 2015 *Matériaux composites*. Lavoisier.
- GUEDJ, D. 2000 *Le Mètre du Monde*. Seuil.
- GUYON, E., HULIN, J. P. & PETIT, L. 2012 *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences.
- HAALAND, S. E. 1983 Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow. *J. Fluids Eng.* **105**, 89–90.
- HAGER, W. H. 2003 Blasius : A life in research and education. *Exp. Fluids* **34**, 566–571.
- HOF, B., WESTERWEEL, J., SCHNEIDER, T. M. & ECKHARDT, B. 2006 Finite lifetime of turbulence in shear flows. *Nature* **443**, 59–62.
- HUERRE, P. 1998 *Mécanique des fluides*. Cours de l'école polytechnique.
- IDEL'CIK, I. E. 1999 *Memento des pertes de charge*. Éditions Eyrolles.
- JEDRZEJEWSKI, F. 2002 *Histoire universelle de la mesure*. Ellipses.
- JENNY, M. 2019 *Méthodes numériques pour la mécanique - énergétique*. Cours de Mines Nancy (2A).

- JOHNSON, K. L. 1985 *Contact mechanics*. Cambridge University Press.
- JONKMAN, J., BUTTERFIELD, S., MUSIAL, W. & SCOTT, G. 2009 Definition of a 5-MW Reference Wind Turbine for Offshore System Development. *Tech. Rep.* TP-500-38060. National Renewable Energy Laboratory, [www.nrel.gov/docs/fy09osti/38060.pdf](http://www.nrel.gov/docs/fy09osti/38060.pdf).
- KUNDU, P. K. 1990 *Fluid Mechanics*. Academic Press.
- LE TALLEC, P. 2009 *Modélisation et calcul des milieux continus*. Cours de l'école polytechnique.
- LEMAITRE, J., BOUCARD, P. A. & HILD, F. 2007 *Résistance mécanique des solides*. Dunod.
- LIDE, D. R. 2001 *Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press.
- MAGNAN, J.-P. 2000 Déformabilité des sols. Tassements. Consolidation. *Techniques de l'Ingénieur, traité Construction C214*.
- MCKEON, B. J., ZAGAROLA, M. V. & SMITS, A. J. 2005 A new friction factor relationship for fully developed pipe flow. *J. Fluid Mech.* **538**, 429–443.
- PATANKAR, S. V. 1980 *Numerical heat transfer and fluid flow*. McGraw-Hill.
- PLAUT, E. 2018 *Mécanique des fluides : des bases à la turbulence*. Cours de Mines Nancy (2A), <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisp>.
- PLAUT, E. 2021a *Le calcul tensoriel et différentiel : outil mathématique pour la physique des milieux continus*. Cours de Mines Nancy (1A), <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisp>.
- PLAUT, E. 2021b *Mécanique des fluides 2 : ondes, couches limites et turbulence*. Cours de Mines Nancy (2A), <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisp>.
- PLAUT, E. 2021c *Transition to turbulence in thermoconvection and aerodynamics*. Cours de Mines Nancy (3A), <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisp>.
- PLAUT, E., PEINKE, J. & HÖLLING, M. 2021 *Turbulence & Wind Energy*. Cours de Mines Nancy (3A), <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisp>.
- POLUBARINOVA-KOCHINA, P. Y. 1962 *Theory of ground water movement*. Princeton University Press.
- REMENIERAS, G. 1986 *L'hydrologie de l'ingénieur*. Éditions Eyrolles.
- REYNOLDS, O. 1883 An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **174**, 935–982.
- SALENÇON, J. 1996 *Mécanique des milieux continus*. Cours de l'école polytechnique. Ellipses.
- SCHNEIDER, T. M., ECKHARDT, B. & YORKE, J. A. 2007 Turbulence Transition and the Edge of Chaos in Pipe Flow. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 034502,1–4.
- SONIN, A. A. 2001 *The physical basis of dimensional analysis*. MIT Lecture Notes, [http://web.mit.edu/2.25/www/pdf/DA\\_unified.pdf](http://web.mit.edu/2.25/www/pdf/DA_unified.pdf).
- TRITTON, D. J. 1988 *Physical fluid dynamics*. Oxford Science Publications.
- VLIEGENTHART, G. A. & GOMPPER, G. 2011 Compression, crumpling and collapse of spherical shells and capsules. *New J. Phys.* **13**, 045020, <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/13/4/045020>.
- WHITE, F. M. 1994 *Fluid mechanics*. McGraw-Hill.
- ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L. 2000 *The finite element method*. Butterworth - Heinemann.

# Annexe A

## Fondements de la cinématique

La « *cinématique* », ou science du mouvement, requiert évidemment un observateur de ces mouvements, supposé « immobile », « assis sur un fauteuil rigide », pour ne pas compliquer les choses. Cet observateur omniscient, capable de mesurer « à l'oeil » des distances et des temps pour caractériser le mouvement qu'il observe, est exactement un « *référentiel* », et le fauteuil rigide est un cas particulier de « *solide indéformable* »...

On le comprend, réfléchir aux bases de la cinématique, normalement posées en classes préparatoires aux grandes écoles<sup>1</sup>, requiert d'affronter des notions pas totalement triviales. Le but de cette annexe est justement de permettre un « *échauffement* » et « *démarrage en douceur* » du module de mécanique des milieux continus solides et fluides, en étudiant ces notions avec une approche intermédiaire entre celle des classes préparatoires et celle que nous utiliserons dans ce module, une fois à « plein régime », avec du calcul tensoriel relativement formel. Bien entendu on se place résolument dans le cadre de la *mécanique classique*, celle des hommes - ingénieurs terriens évoqués au début du chapitre 1. En particulier, les notions de distance et de temps sont absolues...

Nous vous demandons de lire cette annexe tôt, idéalement, dès la réception de ce photocopié, avant de vous plonger dans le photocopié de calcul tensoriel, ou, en tout cas, en parallèle de la lecture du photocopié de calcul tensoriel... Le contenu de cette annexe sera d'ailleurs objet de la toute 1<sup>ère</sup> séance de cet enseignement, en « passerelle scientifique »...

### A.1 Mouvements de solide indéformable : approche par étude des déformations

Dans cette section, complémentaire de la section 2.1.5, on introduit la notion de solide indéformable à partir d'un critère de conservation du produit scalaire entre vecteurs ou segments de ce solide. Cette conservation est écrite en faisant usage d'une dérivée temporelle, qui va faire apparaître le champ de vitesse<sup>2</sup> et son gradient, puis, sa partie symétrique... c'est-à-dire le tenseur des taux de déformation !..

Nous travaillons dans un référentiel « donné » réputé « absolu »  $\mathcal{R}$  d'origine O.

---

1. De façon plus ou moins rigoureuse, et peu générale, puisque des restrictions ont été posées, le plus souvent, sur les mouvements relatifs possibles.

2. L'approche ici est plutôt « eulérienne », alors que celle de la section 2.1.5 est franchement « lagrangienne » ; sur ces termes, voir la section 1.2.

### A.1.1 Établissement de la forme « champ de moments » du champ de vitesse

Pour définir la notion d'indéformabilité d'un solide, on étudie la façon dont évolue le produit scalaire entre deux petits segments matériels issus d'un même point A, soient les segments AM et AM' avec <sup>3</sup>

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} + d\bar{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}' = \mathbf{A} + d\bar{\mathbf{x}}'. \quad (\text{A.1})$$

Si le solide est indéformable, le produit scalaire correspondant, d'après sa signification géométrique, doit être conservé, ce que l'on peut écrire de façon différentielle sous la forme

$$\forall t, \quad \frac{d}{dt} (\overline{\mathbf{AM}} \cdot \overline{\mathbf{AM}}') = 0, \quad (\text{A.2})$$

la dérivée par rapport au temps étant bien sûr prise en suivant le mouvement des points matériels A, M et M'. Par définition, O étant un point fixe de  $\mathcal{R}$ , le **champ de vitesse eulerien  $\bar{\mathbf{v}}$  du solide** vérifie

$$\forall t, \quad \frac{d\overline{\mathbf{OA}}}{dt} = \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OA}}, t), \quad \frac{d\overline{\mathbf{OM}}}{dt} = \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OM}}, t), \quad \frac{d\overline{\mathbf{OM}'}}{dt} = \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OM}'}, t). \quad (\text{A.3})$$

En utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$\frac{d\overline{\mathbf{AM}}}{dt} = \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OM}}, t) - \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OA}}, t) \quad \text{et} \quad \frac{d\overline{\mathbf{AM}'}}{dt} = \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OM}'}, t) - \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OA}}, t).$$

Introduisons l'« **application linéaire tangente** »  $\overline{\overline{\mathbf{K}}}$  au champ  $\bar{\mathbf{v}}$  au point A et à l'instant  $t$ , que les mécaniciens notent  $\overline{\overline{\nabla}}_A \bar{\mathbf{v}}$  appellent le « **gradient de** »  $\bar{\mathbf{v}}$ , et qui est définie précisément au début du chapitre 2 du document de cours de calcul tensoriel. Par définition même de cette application, en omettant de rappeler la dépendance temporelle pour alléger les notations, on a

$$\frac{d\overline{\mathbf{AM}}}{dt} = \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OM}}) - \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OA}}) = \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OA}} + d\bar{\mathbf{x}}) - \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OA}}) = \overline{\overline{\mathbf{K}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} + o(d\bar{\mathbf{x}}), \quad (\text{A.4a})$$

$$\frac{d\overline{\mathbf{AM}'}}{dt} = \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OM}'}) - \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OA}}) = \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OA}} + d\bar{\mathbf{x}}') - \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OA}}) = \overline{\overline{\mathbf{K}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}' + o(d\bar{\mathbf{x}}'). \quad (\text{A.4b})$$

En utilisant un repère orthonormé (direct)  $R = O x_1 x_2 x_3$  et sa base orthonormée (directe) associée  $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ , l'équation (A.4a) s'écrit en composantes

$$dv_i = v_i(\overline{\mathbf{OA}} + d\bar{\mathbf{x}}) - v_i(\overline{\mathbf{OA}}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{OA}}) dx_j + o(d\bar{\mathbf{x}}). \quad (\text{A.5})$$

Ainsi la matrice représentative de l'**endomorphisme**  $\overline{\overline{\mathbf{K}}} = \overline{\overline{\nabla}}_A \bar{\mathbf{v}}$  est

$$\text{Mat}(\overline{\overline{\mathbf{K}}}, \{\bar{\mathbf{e}}_i\}) = \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{OA}}) \right]. \quad (\text{A.6})$$

En conséquence l'équation (A.2) s'écrit, à des termes en  $o(d\bar{\mathbf{x}})$ ,  $o(d\bar{\mathbf{x}}')$  près, que nous négligeons à l'ordre le plus bas,

$$\overline{\mathbf{AM}} \cdot \frac{d\overline{\mathbf{AM}'}}{dt} + \frac{d\overline{\mathbf{AM}}}{dt} \cdot \overline{\mathbf{AM}'} = d\bar{\mathbf{x}} \cdot (\overline{\overline{\mathbf{K}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}') + (\overline{\overline{\mathbf{K}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}) \cdot d\bar{\mathbf{x}}' = 0. \quad (\text{A.7})$$

3. Sur les notations utilisées dans ce document,  $\bar{\mathbf{x}}$  au lieu de  $\vec{\mathbf{x}}$ , voyez le tout début du chapitre 1 du document de cours de calcul tensoriel [Plaut \(2021a\)](#).

Par définition de la transposition d'un endomorphisme, la dernière équation s'écrit aussi

$$d\bar{x} \cdot (\bar{\mathbf{K}} \cdot d\bar{x}') + d\bar{x} \cdot (\bar{\mathbf{K}}^T \cdot d\bar{x}') = d\bar{x} \cdot [(\bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}^T) \cdot d\bar{x}'] = 0. \quad (\text{A.8})$$

La *forme bilinéaire*

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (d\bar{x}, d\bar{x}') &\longmapsto \bar{\mathbf{D}}(d\bar{x}, d\bar{x}') = \frac{1}{2} d\bar{x} \cdot [(\bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}^T) \cdot d\bar{x}'] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

est donc nulle... C'est en fait le « *tenseur des taux de déformation* » au point A et à l'instant  $t$ , que nous rencontrerons à nouveau dans le chapitre 2 de ce cours. Cette forme bilinéaire est nulle si et seulement si l'endomorphisme associé

$$\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}^T)$$

est nul, soit en composantes, d'après (A.6),

$$\forall i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,3\}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Il importe de noter que cette équation aux dérivées partielles est vérifiée dans tout le domaine connexe occupé par le solide, le point A choisi au tout début étant en fait quelconque. La résolution de cette équation se fait en travaillant d'abord sur ses composantes diagonales,

$$\forall i \in \{1,2,3\}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

En intégrant par rapport à  $x_i$  on obtient

$$v_1 = v_1(x_2, x_3), \quad v_2 = v_2(x_3, x_1), \quad v_3 = v_3(x_1, x_2). \quad (\text{A.11})$$

La composante d'indices 1 2 de (A.10) donne

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_2, x_3) = -\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_3, x_1).$$

À  $x_3$  fixé le premier membre ne dépend que de  $x_2$  alors que le second membre ne dépend que de  $x_1$ ; comme ces variables sont indépendantes on en déduit

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_2, x_3) = -\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_3, x_1) = f(x_3),$$

d'où, en intégrant par rapport à  $x_2$ , puis  $x_1$ ,

$$v_1 = x_2 f(x_3) + g(x_3), \quad v_2 = -x_1 f(x_3) + h(x_3). \quad (\text{A.12})$$

La composante d'indices 1 3 de (A.10) donne

$$x_2 f'(x_3) + g'(x_3) = -\frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x_1, x_2).$$

À  $x_2$  fixé le premier membre ne dépend que de  $x_3$  alors que le second membre ne dépend que de  $x_1$ ; comme ces variables sont indépendantes on en déduit

$$x_2 f'(x_3) + g'(x_3) = -\frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x_1, x_2) = i(x_2), \quad (\text{A.13})$$

d'où le fait que  $f'(x_3)$  et  $g'(x_3)$  sont constantes, c'est-à-dire que  $f(x_3)$  et  $g(x_3)$  sont affines<sup>4</sup>. Alors  $i(x_2)$  aussi est affine, et en reprenant (A.12) et (A.13) on obtient

$$\begin{aligned} v_1 &= Ax_2x_3 + Bx_2 + Cx_3 + D, \\ v_2 &= -Ax_1x_3 - Bx_1 + h(x_3), \\ v_3 &= -Ax_2x_1 - Cx_1 + j(x_2). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

La composante d'indices 2 3 de (A.10) donne enfin

$$-Ax_1 + h'(x_3) = Ax_1 - j'(x_2).$$

À  $x_1$  fixé le premier membre ne dépend que de  $x_3$ , le second membre que de  $x_2$ , donc

$$-Ax_1 + h'(x_3) = Ax_1 - j'(x_2) = k(x_1).$$

On en déduit que  $h(x_3)$  et  $j(x_2)$  sont affines, puis que  $A = 0$ , puis que  $h'(x_3) = -j'(x_2)$ . Au bilan

$$v_1 = Bx_2 + Cx_3 + D, \quad v_2 = -Bx_1 + Ex_3 + F, \quad v_3 = -Cx_1 - Ex_2 + G, \quad (\text{A.15})$$

d'où, en introduisant les vecteurs

$$\bar{\mathbf{v}}_0 = D\bar{\mathbf{e}}_1 + F\bar{\mathbf{e}}_2 + G\bar{\mathbf{e}}_3 \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\omega}} = -E\bar{\mathbf{e}}_1 + C\bar{\mathbf{e}}_2 - B\bar{\mathbf{e}}_3, \quad (\text{A.16})$$

$$\bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OM}}) = \bar{\boldsymbol{\omega}} \wedge (x_1\bar{\mathbf{e}}_1 + x_2\bar{\mathbf{e}}_2 + x_3\bar{\mathbf{e}}_3) + \bar{\mathbf{v}}_0 = \bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overline{\mathbf{OM}}. \quad (\text{A.17})$$

Cette structure est celle d'un *champ de moments*; en soustrayant les formules donnant  $\bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OM}})$  et  $\bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OA}})$ , et en rappelant la dépendance en temps, on écrit plutôt

$$\boxed{\forall A, M \text{ points du solide indéformable, } \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OM}}, t) = \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OA}}, t) + \bar{\boldsymbol{\omega}}(t) \wedge \overline{\mathbf{AM}}}. \quad (\text{A.18})$$

Le premier terme correspond à un mouvement de *translation* globale, le second à un mouvement de *rotation*, le vecteur  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  étant le *vecteur vitesse de rotation instantanée*<sup>5</sup> du solide.

### A.1.2 Interprétation du vecteur vitesse de rotation instantanée

Si le solide admet un point fixe, ou dans un référentiel où c'est le cas (typiquement, un référentiel lié à ce solide, par exemple, le référentiel de Koenig lié à son centre d'inertie, et d'axes fixes dans le référentiel absolu), en notant A ce point il vient

$$\forall M \text{ point du solide indéformable, } \bar{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{OM}}, t) = \bar{\boldsymbol{\omega}}(t) \wedge \overline{\mathbf{AM}}. \quad (\text{A.19})$$

On peut montrer que ce champ de vitesse est celui d'un solide « coïncidant » en rotation autour de l'axe passant par A et de direction  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ , dont la vitesse angulaire de rotation est  $\|\bar{\boldsymbol{\omega}}\|$ .

Dans ce but, considérons le cas plus simple où le mouvement du solide est une rotation autour d'un axe fixe Az. En notant  $\phi(t)$  l'angle de la rotation effectuée entre les instants 0 et  $t$ , les positions instantanées sont données par l'action de l'opérateur de rotation correspondant  $\overline{\overline{\mathbf{R}}}_{Az, \phi(t)}$  selon

$$\overline{\mathbf{AM}}(t) = \overline{\overline{\mathbf{R}}}_{Az, \phi(t)} \cdot \overline{\mathbf{AM}}(0)$$

4. Une fonction  $f$  affine de  $x$  est un polynôme de degré 1 en  $x$ .

5. Ou, de façon plus concise, *vecteur rotation*.

avec, dans la base fixe  $\{\bar{\mathbf{e}}_X, \bar{\mathbf{e}}_Y, \bar{\mathbf{e}}_z\}$ ,

$$\text{Mat} \left( \bar{\mathbf{R}}_{Az, \phi(t)}, \{\bar{\mathbf{e}}_X, \bar{\mathbf{e}}_Y, \bar{\mathbf{e}}_z\} \right) = \begin{bmatrix} \cos \phi(t) & -\sin \phi(t) & 0 \\ \sin \phi(t) & \cos \phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Par dérivation de  $\bar{\mathbf{AM}}(t)$  par rapport au temps on obtient pour le champ de vitesse instantané

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{AM}}, t) = \dot{\phi}(t) \bar{\mathbf{e}}_z \wedge \bar{\mathbf{AM}}(t) .$$

Par identification avec (A.18) on voit que le vecteur rotation instantané vaut dans ce cas

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}(t) = \dot{\phi}(t) \bar{\mathbf{e}}_z \quad (\text{A.20})$$

où le point désigne la dérivée par rapport au temps. Ainsi, la direction de  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  est la **direction de l'axe de rotation**. De plus, si la rotation se fait à vitesse angulaire constante,  $\phi(t) = \omega t$ , on obtient

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}(t) = \omega \bar{\mathbf{e}}_z . \quad (\text{A.21})$$

Dans ce cas,  $\omega$  est la **fréquence angulaire de rotation** du solide. Plus généralement,  $\|\bar{\boldsymbol{\omega}}\|$  peut être vue comme la **vitesse angulaire de rotation** du solide, et doit donc se mesurer en SI en rad/s.

## A.2 Composition des mouvements par changement de référentiel

Maintenant que nous savons caractériser un solide indéformable pas la forme de son champ de vitesse, nous pouvons définir clairement un référentiel puis les règles de changement de référentiel, i.e., de « composition des mouvements ».

### A.2.1 Référentiels

Un **référentiel** est un observateur réputé immobile qui mesure des mouvements. Se donner un référentiel c'est donc se donner un **mouvement solide indéformable de référence**, à savoir le mouvement du fauteuil sur lequel l'observateur imaginaire est assis.

Le mouvement d'un **référentiel relatif**  $\mathcal{R}$  dans un **référentiel absolu**  $\mathcal{R}_0$  d'origine O est en conséquence un mouvement de solide indéformable, caractérisé par une **translation**, mouvement en bloc avec la vitesse

$$\bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A \in \mathcal{R}, t) = \left. \frac{d\bar{\mathbf{OA}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \quad (\text{A.22})$$

d'un point particulier A de  $\mathcal{R}$ , et une **rotation**, caractérisée par le **vecteur vitesse de rotation instantané**

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}(t) = \bar{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) . \quad (\text{A.23})$$

Le champ des vitesses des points M de  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{R}_0$  est ainsi le **champ de moments**

$$\bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(M \in \mathcal{R}, t) = \bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A \in \mathcal{R}, t) + \bar{\boldsymbol{\omega}}(t) \wedge \bar{\mathbf{AM}}(t) . \quad (\text{A.24})$$

### A.2.2 Composition des dérivées temporelles de vecteurs

Soit  $\bar{\mathbf{w}}(t)$  un vecteur de nature physique (vecteur matériel éventuellement, mais aussi, peut-être, vecteur vitesse, vecteur accélération, vecteur force, etc...) évoluant au cours du temps. On se pose la question de savoir comment les deux observateurs précédemment nommés peuvent relier leurs mesures de

$$\frac{d\bar{\mathbf{w}}(t)}{dt} .$$

Pour cela on part de l'écriture de  $\bar{\mathbf{w}}(t)$  dans une base « relative »  $\{\bar{\mathbf{e}}_x(t), \bar{\mathbf{e}}_y(t), \bar{\mathbf{e}}_z(t)\}$  liée au mouvement solide de  $\mathcal{R}$  :

$$\bar{\mathbf{w}}(t) = x(t)\bar{\mathbf{e}}_x(t) + y(t)\bar{\mathbf{e}}_y(t) + z(t)\bar{\mathbf{e}}_z(t) . \quad (\text{A.25})$$

Par définition, puisque cette base est fixe pour  $\mathcal{R}$ ,

$$\left. \frac{d\bar{\mathbf{w}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}(t)\bar{\mathbf{e}}_x(t) + \dot{y}(t)\bar{\mathbf{e}}_y(t) + \dot{z}(t)\bar{\mathbf{e}}_z(t) . \quad (\text{A.26})$$

Dans  $\mathcal{R}_0$  par contre non seulement les composantes de  $\bar{\mathbf{w}}(t)$  mais aussi les vecteurs  $\bar{\mathbf{e}}_x(t)$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_y(t)$  et  $\bar{\mathbf{e}}_z(t)$  évoluent dans le temps, et pour calculer

$$\left. \frac{d\bar{\mathbf{w}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}$$

il faut en conséquence déterminer les valeurs des dérivées

$$\left. \frac{d\bar{\mathbf{e}}_x(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}, \quad \left. \frac{d\bar{\mathbf{e}}_y(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \quad \text{et} \quad \left. \frac{d\bar{\mathbf{e}}_z(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} .$$

Pour cela on peut noter que chacun de ces vecteurs de base peut être vu comme un bipoint reliant l'origine  $A(t)$  de  $\mathcal{R}$  à un point fixe de  $\mathcal{R}$ , par exemple

$$\bar{\mathbf{e}}_x(t) = \overline{\mathbf{AB}}(t) .$$

En appliquant l'équation (A.24) on obtient

$$\left. \frac{d\bar{\mathbf{e}}_x(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(B \in \mathcal{R}, t) - \bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A \in \mathcal{R}, t) = \bar{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overline{\mathbf{AB}}(t) = \bar{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \bar{\mathbf{e}}_x(t) , \quad (\text{A.27})$$

cette forme de relation étant en fait valable pour n'importe quel vecteur fixe de  $\mathcal{R}$ , d'où en particulier

$$\left. \frac{d\bar{\mathbf{e}}_y(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \bar{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \bar{\mathbf{e}}_y(t) , \quad (\text{A.28})$$

$$\left. \frac{d\bar{\mathbf{e}}_z(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \bar{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \bar{\mathbf{e}}_z(t) . \quad (\text{A.29})$$

En appliquant la formule de Leibniz à (A.25) on obtient la *loi de composition des dérivées temporelles de vecteurs* :

$$\boxed{\left. \frac{d\bar{\mathbf{w}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\bar{\mathbf{w}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \bar{\mathbf{w}}(t)} \quad (\text{A.30})$$

### A.2.3 Composition des vitesses

Considérons maintenant le problème consistant à relier les observations de vitesse d'un certain point matériel mobile  $M(t)$  faites

- par l'observateur immobile lié au référentiel absolu  $\mathcal{R}_0$  :

$$\bar{\mathbf{v}}_a(M,t) = \left. \frac{d\overline{\mathbf{OM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \text{ vitesse absolue de } M(t) ; \quad (\text{A.31})$$

- d'autre part par l'observateur mobile, lié au référentiel relatif  $\mathcal{R}$  :

$$\bar{\mathbf{v}}_r(M,t) = \left. \frac{d\overline{\mathbf{AM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \text{ vitesse relative de } M(t) . \quad (\text{A.32})$$

On a utilisé une notation affine pour la dépendance de la vitesse par rapport à l'espace, car il s'agit bien de suivre un point matériel  $M$  dans différents référentiels donc différents repères : ici, la confusion entre l'espace affine et l'espace vectoriel, que nous nous sommes permise en section A.1, serait très dangereuse. Par transitivité puis application de (A.30) on obtient

$$\bar{\mathbf{v}}_a(M,t) = \left. \frac{d\overline{\mathbf{OA}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} + \left. \frac{d\overline{\mathbf{AM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A \in \mathcal{R},t) + \left. \frac{d\overline{\mathbf{AM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \overline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overline{\mathbf{AM}}(t) .$$

Il apparaît

$$\bar{\mathbf{v}}_e(M,t) = \bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A \in \mathcal{R},t) + \overline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overline{\mathbf{AM}}(t) = \bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(M \in \mathcal{R},t) \quad (\text{A.33})$$

vitesse du point du référentiel mobile  $\mathcal{R}$  coïncidant à l'instant  $t$  avec  $M(t)$  (cf. l'équation A.24) ;  $\bar{\mathbf{v}}_e(t)$  est la *vitesse d'entraînement* du point  $M(t)$ . Au bilan on obtient la *loi de composition des vitesses*, dite aussi « *loi de Galilée* »<sup>6</sup> :

$$\boxed{\bar{\mathbf{v}}_a(M,t) = \bar{\mathbf{v}}_r(M,t) + \bar{\mathbf{v}}_e(M,t)} \quad (\text{A.34})$$

*vitesse absolue = vitesse relative + vitesse d'entraînement.*

### A.2.4 Universalité de la notion de solide indéformable

La cinématique définie ici n'est cohérente que si la notion de solide indéformable est « universelle » i.e. ne dépend pas du référentiel considéré. Dans le cas contraire, la notion même de référentiel et changement de référentiel deviendrait discutable, puisque ce que certains pourraient considérer comme « référentiel » ne le serait pas pour d'autres.

Considérons donc, dans les deux référentiels absolu et relatifs déjà introduits, un milieu matériel  $S$  en mouvement, indéformable pour le référentiel relatif. On a donc un champ de vitesse relatif champ de moments, de la forme (A.17),

$$\bar{\mathbf{v}}_r(M \in S,t) = \bar{\mathbf{v}}_0 + \overline{\boldsymbol{\omega}}_{S/\mathcal{R}} \wedge \overline{\mathbf{AM}} .$$

En utilisant la loi de Galilée et la formule (A.33), il vient, pour le champ de vitesse absolu de  $S$ ,

$$\bar{\mathbf{v}}_a(M \in S,t) = \bar{\mathbf{v}}_0 + \overline{\boldsymbol{\omega}}_{S/\mathcal{R}} \wedge \overline{\mathbf{OM}} + \bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A \in \mathcal{R},t) + \overline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overline{\mathbf{AM}} = \bar{\mathbf{v}}_1 + \overline{\boldsymbol{\omega}}_{S/\mathcal{R}_0} \wedge \overline{\mathbf{OM}}$$

qui est bien un champ de moments ; de plus on identifie la *loi de composition des vecteurs vitesse de rotation instantanée*

$$\boxed{\overline{\boldsymbol{\omega}}_{S/\mathcal{R}_0} = \overline{\boldsymbol{\omega}}_{S/\mathcal{R}} + \overline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}} . \quad (\text{A.35})$$

6. Ou, parfois, « *loi de transformation de Galilée* ».

### A.2.5 Composition des accélérations

Posons maintenant la question du lien entre

- l'**accélération absolue** d'un point mobile  $M(t)$  vue par l'observateur immobile lié au référentiel  $\mathcal{R}_0$  :

$$\bar{\gamma}_a(M,t) = \left. \frac{d^2 \overline{\mathbf{OM}}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_0}, \quad (\text{A.36})$$

- et l'**accélération relative** de ce même point mobile  $M(t)$  vue par l'observateur mobile lié au référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$\bar{\gamma}_r(M,t) = \left. \frac{d^2 \overline{\mathbf{AM}}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}}. \quad (\text{A.37})$$

Dans ce but partons de l'équation (A.34), que l'on explicite sous la forme

$$\left. \frac{d \overline{\mathbf{OM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d \overline{\mathbf{AM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d \overline{\mathbf{OA}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} + \bar{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overline{\mathbf{AM}}(t).$$

Par dérivation par rapport au temps dans le référentiel  $\mathcal{R}_0$  et utilisation de la loi de dérivation composée (A.30) on obtient

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_a(M,t) &= \bar{\gamma}_r(M,t) + \bar{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \left. \frac{d \overline{\mathbf{AM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d^2 \overline{\mathbf{OA}}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_0} \\ &+ \dot{\bar{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overline{\mathbf{AM}}(t) + \bar{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \left. \frac{d \overline{\mathbf{AM}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}. \end{aligned}$$

Après application au dernier terme de la loi (A.30) on voit apparaître

- l'accélération du point du référentiel mobile  $\mathcal{R}$  coïncidant à l'instant  $t$  avec  $M(t)$ , **accélération d'entraînement** du point  $M$  :

$$\bar{\gamma}_e(M,t) = \left. \frac{d^2 \overline{\mathbf{OA}}(t)}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_0} + \dot{\bar{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overline{\mathbf{AM}}(t) + \bar{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge [\bar{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \overline{\mathbf{AM}}(t)], \quad (\text{A.38})$$

que l'on obtient par dérivation par rapport au temps de (A.24) ;

- l'**accélération de Coriolis** du point  $M$  :

$$\bar{\gamma}_c(M,t) = 2\bar{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}(t) \wedge \bar{\mathbf{v}}_r(M,t). \quad (\text{A.39})$$

Au bilan on peut écrire la **loi de composition des accélérations** :

$$\boxed{\bar{\gamma}_a(M,t) = \bar{\gamma}_r(M,t) + \bar{\gamma}_e(M,t) + \bar{\gamma}_c(M,t)} \quad (\text{A.40})$$

*accélération absolue = accélération relative + accélération d'entraînement + accélération de Coriolis.*

### A.2.6 Référentiels galiléens ou non - Forces d'inertie

On rappelle qu'un référentiel **galiléen**<sup>7</sup> est un référentiel dans lequel les seules forces à distance, à distinguer des forces de contact, qui joueront un rôle crucial en mécanique des milieux continus, sont, en l'absence d'effets électromagnétiques, les forces de pesanteur. Ainsi, en anticipant sur le

7. Certains disent « *inertiel* ».

chapitre 3, et en nommant notre référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$  « absolu », le bilan global de quantité de mouvement pour un milieu contenu dans l'ouvert  $\Omega_t$  s'écrit

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}_0} = \iiint_{\Omega_t} d^3m \bar{\gamma}_a(M,t) = \iiint_{\Omega_t} d^3m \bar{\mathbf{g}} + \iint_{\partial\Omega_t} d^2\bar{\mathbf{f}}, \quad (\text{A.41})$$

avec  $d^3m = \rho d^3x$  la masse de l'élément de volume  $d^3x$ ,  $\rho$  la masse volumique du milieu,  $d^2\bar{\mathbf{f}}$  la force de contact exercée par l'extérieur sur un élément de surface  $d^2S$  du bord de l'ouvert. Le champ  $\bar{\mathbf{g}}$  est le champ de gravité auquel est soumis le milieu, le plus souvent, celui de notre planète Terre.

Si on se place dans un autre référentiel  $\mathcal{R}$  « relatif », par composition des accélérations, un bilan de même forme est valable à condition d'altérer  $\bar{\mathbf{g}}$  :

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} = \iiint_{\Omega_t} d^3m \bar{\gamma}_r(M,t) = \iiint_{\Omega_t} d^3m \bar{\mathbf{g}}' + \iint_{\partial\Omega_t} d^2\bar{\mathbf{f}} \quad (\text{A.42})$$

avec

$$\bar{\mathbf{g}}' = \bar{\mathbf{g}} - \bar{\gamma}_e(M,t) - \bar{\gamma}_c(M,t). \quad (\text{A.43})$$

Si  $\bar{\mathbf{g}}'$  est sensiblement différent de  $\bar{\mathbf{g}}$ , on dit que le référentiel  $\mathcal{R}$  est *non galiléen*<sup>8</sup>. Les forces nouvelles  $-d^3m \bar{\gamma}_e(M,t)$  et  $-d^3m \bar{\gamma}_c(M,t)$  dans (A.42) sont les *forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis* ; les forces volumiques associées sont  $-\rho\bar{\gamma}_e(M,t)$  et  $-\rho\bar{\gamma}_c(M,t)$ .

**Exercice A.1 Force d'inertie d'entraînement associée à un référentiel tournant**

Dans cet exercice élémentaire, on considère le cas où  $\mathcal{R}$  est en mouvement de rotation autour d'un axe  $Oz$  fixe dans  $\mathcal{R}_0$ , le vecteur rotation  $\bar{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}$  étant constant égal à  $\omega\bar{\mathbf{e}}_z$ . Par un choix judicieux du point A dans la formule (A.38), et en faisant usage de la formule du double produit vectoriel établie dans le chapitre 1 du cours de calcul tensoriel, simplifiez l'expression de l'accélération d'entraînement  $\bar{\gamma}_e(M,t)$  d'un point quelconque M de  $\mathcal{R}$ . Vous montrerez qu'en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe  $Oz$ ,  $\bar{\gamma}_e(M,t)$  est colinéaire à l'un des vecteurs de la base locale  $\{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\}$ ,

$$\bar{\gamma}_e(M,t) = \dots \quad (\text{A.44})$$

Au vu de son effet physique, qualifiez la force volumique d'inertie correspondante

$$\bar{\mathbf{f}}_e = -\rho\bar{\gamma}_e(M,t) = \dots = \text{force d'inertie} \ll \dots \gg, \quad (\text{A.45})$$

et donnez au moins un exemple de système utilisant cette force pour une application.

**Exercice A.2 Étude d'écoulements atmosphériques - Modèle du vent géostrophique**

Dans cet exercice plus sophistiqué, en ce qu'il fait appel à des notions des chapitres 1, 3 et 7, on étudie l'effet des forces d'inertie liée à la rotation de la Terre sur les écoulements atmosphériques, considérés sur des échelles régionales  $\simeq 100$  km. Comme représenté sur la figure A.1a, on travaille au voisinage d'un point M situé à la surface de la Terre à une latitude  $\phi$  dans l'hémisphère nord. Le référentiel lié à M ou « référentiel terrestre » (relatif) est en rotation diurne dans le référentiel géocentrique (absolu) lié au centre O de la Terre, et d'axes fixes par rapport à des étoiles lointaines.

8. Certains disent « *non inertiel* ». La distinction entre référentiel galiléen (ou inertiel) et non galiléen (ou non inertiel) peut dépendre du type de mouvement étudié...

1 Rappelez la valeur de la fréquence angulaire  $\omega$  de rotation diurne de la Terre, et évaluez-la numériquement en rad/s.

2 Le référentiel terrestre, en rotation autour de l'axe sud-nord  $OZ$ , que l'on peut considérer fixe, a donc un vecteur rotation dans le référentiel géocentrique, réputé galiléen,

$$\bar{\omega} = \omega \bar{\mathbf{e}}_Z . \quad (\text{A.46})$$

Dans ce référentiel terrestre, le mouvement de l'air, de masse volumique  $\rho$ , est affecté par des forces d'inertie. Simplifiez par un calcul l'expression de la force volumique d'entraînement  $\bar{\mathbf{f}}_e = -\rho\bar{\gamma}_e(M)$ , en utilisant le repère  $OXYZ$  de la figure A.1a. Qualifiez la physiquement. Vérifiez que l'on peut négliger cette force devant celle de pesanteur, en calculant précisément la valeur maximale du rapport  $\|\bar{\gamma}_e(M)\|/g$ . En quels points du globe cette valeur maximale est-elle atteinte ?

3 En conséquence, on retient que la seule force volumique d'inertie agissant sur l'air en écoulement à la vitesse  $\bar{\mathbf{v}}$  dans le référentiel terrestre est celle de Coriolis

$$\bar{\mathbf{f}}_c = -\rho\bar{\gamma}_c = 2\rho\bar{\mathbf{v}} \wedge \bar{\omega} . \quad (\text{A.47})$$

On admet que l'écoulement de l'air est essentiellement horizontal, i.e.

$$\bar{\mathbf{v}} \simeq \bar{\mathbf{v}}_h = v_x \bar{\mathbf{e}}_x + v_y \bar{\mathbf{e}}_y \quad \text{dans le repère } Mxyz . \quad (\text{A.48})$$

Calculez la force volumique d'inertie projetée sur le plan horizontal  $Mxy$  et montrez que, dans l'hémisphère nord, pour  $0 < \phi < 90$ , elle induit une « *dévi*ation vers la droite » lorsque l'air est observé de l'espace.

4 Aux échelles qui nous intéressent, l'air atmosphérique peut en première approximation être considéré comme un fluide parfait en écoulement faiblement accéléré. Dans le repère et référentiel  $Mxyz$ , l'équation d'évolution de la quantité de mouvement sous forme locale s'écrit donc

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} \simeq \bar{\mathbf{0}} = \rho\bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{f}}_c - \bar{\nabla}p \quad (\text{A.49})$$

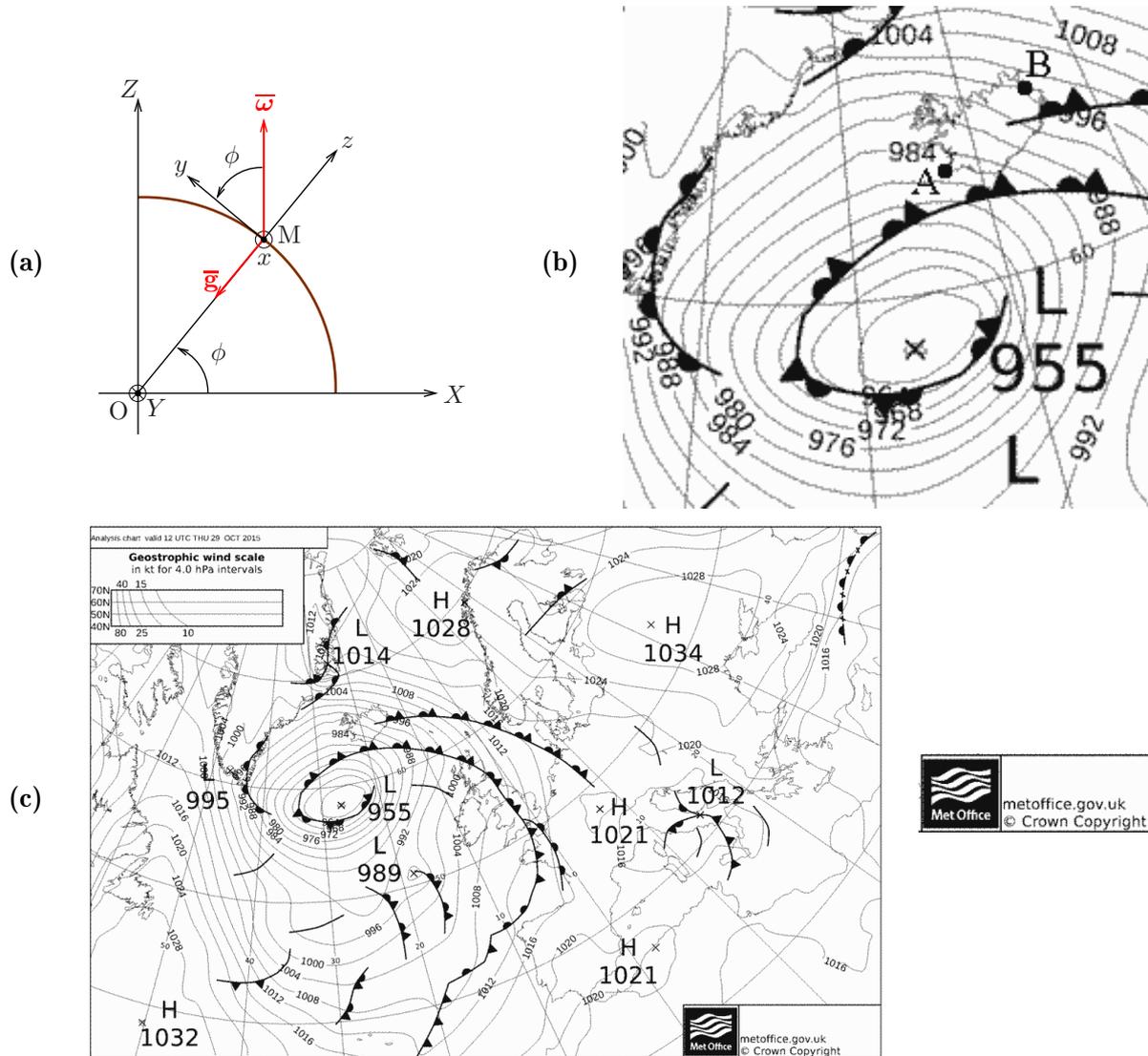
avec  $p$  la pression. Expliquez la physique du terme correspondant. En prenant le produit vectoriel de (A.49) avec le vecteur vertical  $\bar{\mathbf{e}}_z$ , montrez que le champ  $\bar{\mathbf{v}}_h$  est donné (approximativement) par le « *vent géostrophique* »

$$\boxed{\bar{\mathbf{v}}_h = \frac{1}{\rho f} \bar{\mathbf{e}}_z \wedge \bar{\nabla}p} , \quad (\text{A.50})$$

où  $f$  est le paramètre de Coriolis, que vous calculerez analytiquement, puis, numériquement, à nos latitudes. Expliquez la physique de cette formule, et en conséquence l'étymologie de « cyclone » (resp. « anticyclone ») pour désigner les régions de pression minimale (resp. maximale).

5 On s'intéresse justement à une carte météorologique (figure A.1c) représentant les isobares, lignes d'isovaleurs de la pression. Justifiez qu'elles sont aussi les lignes de courant du vent géostrophique.

6 On effectue sur la figure A.1b un zoom sur la dépression au sud de l'Islande. Esquissez par quelques flèches de couleurs différentes les champs  $\bar{\mathbf{f}}_v = -\bar{\nabla}p$  et  $\bar{\mathbf{v}}_h$  associés. Plus précisément, sachant que le « diamètre » de l'Islande, segment  $AB$ , est  $\simeq 450$  km, estimez par des mesures sur carte et un calcul le gradient de pression puis la vitesse du vent au niveau de A. On prendra  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ . Expliquez et commentez physiquement.



**Fig. A.1** – **a** : Schéma du système terrestre étudié dans l'exercice A.2. Le point O est le centre de la Terre, boule de rayon  $R = 6400$  km. Le repère cartésien OXYZ est lié au référentiel terrestre, l'axe OZ pointe du sud vers le nord. On s'intéresse à des écoulements au voisinage d'un point M situé à la surface, repéré par sa latitude  $\phi$ . Le repère cartésien Mxyz est aussi lié au référentiel terrestre. L'axe Mz est vertical, i.e., l'accélération de la pesanteur, au voisinage de M,  $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ , l'axe My pointe vers le nord, l'axe Mx vers l'est. Le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique est représenté. **b** : Zoom sur la carte météorologique. **c** : Carte météorologique : champ de pression « au niveau de la mer » résultant d'une « analyse », synthèse entre modèles et mesures, effectuée par le service de météorologie britannique le 29 octobre 2015. Les cercles fins sont les méridiens i.e. les iso- $\phi$  séparés de  $10^\circ$ . Les courbes fines sont les isobares séparées de 4 hPa. L = 'Low' repère un minimum, H = 'High pressure' repère des maxima de pression. Les courbes épaisses représentent des « fronts » air chaud - air froid, et seront ignorées ici.



## Annexe B

# Pédagogie : de l'art de rédiger

Savoir *rédiger* importe<sup>1</sup>, mais c'est un art difficile, d'autant plus lorsqu'il s'agit d'un *document scientifique*... Pour vous aider à progresser dans cet art, on vous recommande de rédiger volontairement un TD de ce module et vous devrez rédiger sommairement au test intermédiaire, de façon détaillée au test final<sup>2</sup>. Cette *nomenclature des annotations* a un but double. Premièrement vous permettre de comprendre les annotations portées sur vos copies. Deuxièmement - mieux vaut prévenir que guérir - vous montrer quels sont les points auxquels vous devez être attentifs en rédigeant. Voici donc notre inventaire des abréviations utilisées c'est-à-dire des fautes possibles rencontrées, sauf pour la 1<sup>ère</sup> (soyons positifs pour commencer) :

**BR** = Bien rédigé!

**CMNP** = Commentaire Mathématique Non Physique

Exemple : il s'agit de commenter la loi de Newton écrite sous la forme  $a = F/m$ .

«  $a = F/m$  signifie que quand  $m$  augmente,  $a$  diminue. » est un **CMNP**; au contraire «  $a = F/m$  signifie que quand la masse  $m$  augmente, l'accélération  $a$  diminue parce que le mobile, plus lourd, ayant ainsi plus d'inertie, est moins sensible à une force  $F$  donnée. » est un **CP** - Commentaire Physique!

**DR** = Défaut de rédaction

Quand la réponse à une question est constituée uniquement de symboles mathématiques sans phrase de rédaction, ou quand la rédaction est déficiente. Il s'agit là d'un point *crucial* car la caractéristique fondamentale d'une démarche scientifique est d'être une démarche raisonnée, or le *raisonnement* ne peut se traduire que par un *discours*, qui se doit d'être *convaincant*.

Exemple : «  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  donc  $E_p = mgz$  »; il n'y a aucun lien de cause à effet entre ces deux équations donc le « donc » est inadéquat.

**EC** = Erreur de calcul

**EÉ** = Erreur d'étourderie

Quand on se trompe dans la recopie d'un calcul, introduisant une faute. Il faut se relire ligne par ligne : j'écris une ligne, je me relis avec un regard critique.

**EL** = Erreur logique

Quand par exemple on utilise dans une démonstration le résultat à démontrer pour le démontrer, ou que l'on ne s'aperçoit pas d'une erreur de raisonnement conduisant à une flagrante contradiction!

---

1. Les ingénieurs sont très souvent appelés à écrire des « rapports » sur leur travail...

2. Vous aurez aussi à rendre, pour le contrôle continu, une rédaction de TD, d'un type différent toutefois des rédactions classiques de test, cf. [la page web du module](#).

**EP = Erreur physique**

Quand on écrit des formules ou tient un raisonnement mathématiquement plausibles, mais physiquement erronés.

Exemple 1 : on étudie un système dont la masse est répartie dans un volume  $\Omega$  de bord  $S = \partial\Omega$ , et on écrit que sa quantité de mouvement  $\langle \bar{\mathbf{p}} = \iint_S \bar{\mathbf{v}} d^2m \rangle$ . Cette formule est homogène dimensionnellement et tensoriellement (cf. ci-dessous les items  $\langle \text{INH D} \rangle$  et  $\langle \text{INHT} \rangle$ ), mais physiquement elle ne veut rien dire puisque la masse du système n'est pas concentrée sur sa frontière.

Exemple 2 :  $\langle \text{dans un bassin d'eau de 9 mètres de profondeur, la pression est uniforme} \rangle$ .

**ES = Erreur de syntaxe**

Exemple :  $\langle E_c = \frac{1}{2} \iiint v_x^2 + v_y^2 d^3m \rangle$ ; manquent des parenthèses!..

**F = Français**, quand il y a des fautes d'orthographe ou de grammaire...

**HS = Hors sujet****INHCI = Inhomogénéité au sens du calcul infinitésimal**

Exemple : telle composante du tenseur des dilatations de Cauchy  $\langle C_{xx} = (dx)^2 \rangle$ ... serait toujours nulle (!) car  $dx$  est infiniment petit i.e. doit pouvoir tendre vers 0.

**INH D = Inhomogénéité dimensionnelle**

Exemples :  $\langle \text{l'énergie cinétique } E_c = \frac{1}{2}mv \rangle$ ;  $\langle \text{la masse volumique } \rho = 1,2 \text{ kg/m}^2 \rangle$ .

**INHT = Inhomogénéité tensorielle**

Quand on ajoute un vecteur à un scalaire, un tenseur d'ordre 2 à un vecteur, etc... En général cela va de pair avec une **INH D**, mais pas toujours.

Exemple :  $\langle \text{le gradient de pression } \bar{\nabla}p = \frac{\partial p}{\partial x} \rangle$ .

**N = Notations**

Quand on ne respecte pas les notations de l'énoncé ou du cours, ou que l'on emploie des notations inadéquates.

Exemple : alors que  $V(t)$  est fonction de la seule variable  $t$ , on écrit  $\partial V/\partial t$  au lieu de  $dV/dt$ .

**PDM = Pattes de mouches**

Quand l'écriture est illisible, ou que son résultat consiste en des « gribouillis »...

**PE = Propagation d'erreur**

Quand la réponse à la question  $n$  est fausse car c'était faux en question  $n - k$  avec  $k > 0$ ...

**QK = Qésako ?**

Quand apparaît une quantité non définie ni dans l'énoncé ni par le rédacteur de la copie; en effet *un scientifique doit définir précisément tous les symboles qu'il manipule*.

Exemple : l'énoncé définit un système fluide sans définir de repère de travail, et vous demande d'explicitier l'équation de Navier-Stokes. Vous devez alors définir votre repère de travail, sous peine de récolter des QK à la première apparition de  $x$ ,  $y$  ou  $z$ .

**T = Terminologie**

Quand on ne respecte pas la terminologie consacrée, ou que l'on appelle un chat un chien.

Exemple :  $\langle \text{Le plan } Oxz \text{ est un axe de symétrie} \rangle$ .

## Annexe C

# Éléments sur la photoélasticité

Le but de cette annexe est de donner quelques éléments théoriques sur la *photoélasticité*, qui est utilisée dans l'**expérience d'amphi et de TD** sur le barreau en flexion pure correspondant au problème 4.1.

### C.1 Généralités

La *photoélasticité* est la science qui étudie en physique les effets sur la lumière des contraintes et déformations appliquées à des corps solides élastiques. La *technique expérimentale* qui sert à mesurer les contraintes par photoélasticité est la *photoélasticimétrie*.

Il existe deux procédés de photoélasticimétrie :

- la *photoélasticimétrie par transmission*, où l'on réalise une reproduction de la forme à étudier, qui doit être plane, dans un matériau photoélastique. Ce modèle est observé par transparence, c'est à dire placé entre des filtres polarisants pendant qu'on lui applique des efforts.
- la *photoélasticimétrie par réflexion*, où l'on commence par rendre réfléchissante la surface du solide à étudier (non transparent en général!), à l'aide d'une peinture ou d'une colle chargée de poudre métallique. On recouvre alors cette surface d'une mince couche de produit photoélastique. La lumière traverse le revêtement photoélastique, est réfléchié et traverse une seconde fois le revêtement. Les filtres polarisants sont placés côte à côte.

Les principes de la théorie étant identiques dans les deux cas, nous présentons ici uniquement la *photoélasticimétrie par transmission* utilisée par le système de visualisation *Stress-Opticon* de VISHAY MEASUREMENTS GROUP, lors de l'expérience correspondant au problème 4.1. Nous nous restreignons de plus au cas d'observations en lumière polarisée circulairement, comme dans ce système.

Un exposé complet sur la photoélasticité, ses principes et ses applications, est donné dans la partie sur les méthodes expérimentales de [Bellet & Barrau \(1990\)](#).

## C.2 Rappels d'optique - Biréfringence

La lumière se propage par superposition d'ondes sinusoïdales possédant un champ électrique de la forme

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}_0 \cos(\omega t - \bar{\mathbf{k}} \cdot \bar{\mathbf{x}} + \phi_0) \quad (\text{C.1})$$

où  $t$  est le *temps*,  $\omega$  la *fréquence angulaire*,  $\bar{\mathbf{x}}$  le *vecteur position*,  $\bar{\mathbf{k}}$  le *vecteur d'onde*. Sa norme est le *nombre d'onde*

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (\text{C.2})$$

$\lambda$  étant la *longueur d'onde* du rayonnement considéré. Cette longueur d'onde est caractéristique de la couleur de l'onde *monochromatique* (C.1), qui peut être obtenue directement à l'aide d'une source de lumière monochromatique où indirectement par filtrage de la lumière naturelle à travers un filtre monochromatique. Dans l'ordre décroissant des longueurs d'ondes de 0.7 à 0.4  $\mu\text{m}$ , les ondes (C.1) sont rouge, orangé, jaune, verte, bleu, indigo puis violette, la lumière blanche naturelle comprenant elle toutes les longueurs d'ondes précédentes. L'onde (C.1) est dite aussi *polarisée rectilignement*,  $\bar{\mathbf{E}}_0$  perpendiculaire à  $\bar{\mathbf{k}}$  étant sa *direction de polarisation*. La lumière naturelle n'est pas polarisée en général ; on peut la polariser à l'aide d'un filtre polarisant ou polariseur qui ne laisse passer que les champs électriques parallèles à son axe de polarisation. Deux filtres polarisants successifs d'axes parallèles laissent passer de la lumière ; deux filtres polarisants croisés c'est à dire à axes perpendiculaires ne laissent passer aucune lumière. Un montage optique comporte en général deux filtres polarisants, l'un en entrée du trajet de la lumière appelé *polariseur* et noté  $\mathbf{P}$ , l'autre à la sortie du trajet de la lumière (i.e. juste avant l'observateur) appelé *analyseur* et noté  $\mathbf{A}$ .

Dans le *vide* ou dans l'*air*, les équations de Maxwell mènent à l'équation de propagation

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} = \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \bar{\mathbf{E}},$$

d'où la relation de dispersion

$$k = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \omega = \frac{\omega}{c}. \quad (\text{C.3})$$

Dans un *milieu matériel isotrope*, la principale modification des propriétés optiques est en général liée à des propriétés diélectriques. Elles font que l'excitation électrique  $\bar{\mathbf{D}}$  n'est plus seulement  $\bar{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \bar{\mathbf{E}}$  mais plutôt

$$\bar{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \epsilon_r \bar{\mathbf{E}},$$

où  $\epsilon_r$  est la constante diélectrique relative du milieu. On obtient alors<sup>1</sup> la relation de dispersion plus générale

$$k = \sqrt{\epsilon_r} \frac{\omega}{c} = nk_0 \quad (\text{C.4})$$

où  $k_0 = \omega/c$  est le nombre d'onde de l'onde lumineuse de même pulsation se propageant dans le vide. Dans l'équation (C.4),

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (\text{C.5})$$

est l'*indice de réfraction* du milieu. La longueur d'onde

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda_0}{n} \quad (\text{C.6})$$

où  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$  est la longueur d'onde de l'onde lumineuse de même pulsation se propageant dans le vide.

1. Les équations de Maxwell conduisant maintenant à l'équation de propagation  $\Delta \bar{\mathbf{E}} = \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \partial_t^2 \bar{\mathbf{E}}$ .

Dans un *milieu matériel anisotrope*, l'excitation électrique

$$\bar{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \bar{\epsilon}_r \cdot \bar{\mathbf{E}}$$

où  $\bar{\epsilon}_r$  est le tenseur diélectrique relatif du milieu. Ce tenseur devant être symétrique se diagonalise sur une base orthonormale ; les directions correspondantes sont les *axes optiques* du milieu. Dans tout ce qui suit, on suppose que les ondes arrivent toujours sous la même incidence normale, i.e.  $\bar{\mathbf{k}} \parallel \bar{\mathbf{e}}_z$  fixé, et que le milieu est homogène dans la direction  $z$ . Ce sont alors les propriétés du milieu dans le plan perpendiculaire à  $\bar{\mathbf{e}}_z$  qui importent, i.e. on est dans un cas « bidimensionnel ». Pour des raisons de symétrie,  $\bar{\epsilon}_r$  restreint à ce plan peut s'y diagonaliser. Notant  $\bar{\mathbf{e}}_{x'}$  et  $\bar{\mathbf{e}}_{y'}$  les axes optiques correspondants, on écrit donc

$$\text{Restr} \left( \bar{\epsilon}_r \right)_{\text{plan}(x,y)} = \epsilon_{re} \bar{\mathbf{e}}_{x'} \otimes \bar{\mathbf{e}}_{x'} + \epsilon_{ro} \bar{\mathbf{e}}_{y'} \otimes \bar{\mathbf{e}}_{y'} .$$

En conséquence on obtient à nouveau<sup>2</sup> une relation de dispersion de la forme (C.4), mais où la constante diélectrique à utiliser est  $\epsilon_{re}$  si  $\bar{\mathbf{E}}$  est parallèle à  $\bar{\mathbf{e}}_{x'}$ ,  $\epsilon_{ro}$  si  $\bar{\mathbf{E}}$  est parallèle à  $\bar{\mathbf{e}}_{y'}$ . On observe le phénomène de *biréfringence* : l'indice d'une onde lumineuse dépend de l'orientation de la direction de polarisation de l'onde relativement aux axes optiques du milieu. On choisit en général d'appeler *extraordinaire* l'onde, polarisée suivant  $\bar{\mathbf{e}}_{x'}$ , qui se propage avec l'indice le plus fort

$$n_e = \sqrt{\epsilon_{re}} ,$$

correspondant à un nombre d'onde

$$k_e = n_e k_0 ,$$

et d'appeler *ordinaire* l'onde, polarisée suivant  $\bar{\mathbf{e}}_{y'}$ , qui se propage avec l'indice le plus faible

$$n_o = \sqrt{\epsilon_{ro}} ,$$

correspondant à un nombre d'onde

$$k_o = n_o k_0 .$$

Le *degré de biréfringence* (ou encore, abusivement, la biréfringence tout court) du milieu est alors défini comme la différence

$$\delta n = n_e - n_o \tag{C.7}$$

que l'on peut considérer comme nulle dans un milieu non biréfringent. Si on envoie sur ce milieu une onde

$$\bar{\mathbf{E}} = a \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_{x'} + b \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_{y'}$$

on obtiendra après traversée d'une épaisseur  $e$

$$\bar{\mathbf{E}} = a \cos(\omega t - k_e e) \bar{\mathbf{e}}_{x'} + b \cos(\omega t - k_o e) \bar{\mathbf{e}}_{y'} .$$

Il est apparu un déphasage

$$\phi = (k_e - k_o)e = \delta n k_0 e = 2\pi \delta n \frac{e}{\lambda_0} \tag{C.8}$$

qui peut être à la source de phénomènes d'interférences intéressants.

2. Les équations de Maxwell conduisent à deux équations de propagation différentes selon la direction de  $\bar{\mathbf{E}}$  dans le plan  $(x,y)$ , à savoir  $\Delta E_{x'} = \epsilon_0 \epsilon_{re} \mu_0 \partial_t^2 E_{x'}$  et  $\Delta E_{y'} = \epsilon_0 \epsilon_{ro} \mu_0 \partial_t^2 E_{y'}$ .

Par exemple, une *lame quart d'onde* est une lame constituée d'un tel milieu de degré de biréfringence connu, et d'épaisseur  $e$  contrôlée de façon à ce que le déphasage précédent vaille exactement  $\frac{\pi}{2}$ . Pour le même champ d'entrée,

$$\bar{\mathbf{E}} = a \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_{x'} + b \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_{y'} ,$$

on observera alors en sortie<sup>3</sup> :

$$\bar{\mathbf{E}} = a \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \bar{\mathbf{e}}_{x'} + b \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_{y'} = a \sin(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_{x'} + b \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_{y'} .$$

Si on place une telle lame à la sortie d'un filtre polarisant d'axe  $\bar{\mathbf{e}}_x = \bar{\mathbf{e}}_{x'}$ , on passera seulement de  $\bar{\mathbf{E}} = a \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_x$  à  $\bar{\mathbf{E}} = a \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \bar{\mathbf{e}}_x$ , ce qui est sans effet pour l'optique. Par contre, si la lame se trouve orientée à  $\frac{\pi}{4}$  par rapport au filtre polarisant, i.e.  $\bar{\mathbf{e}}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\mathbf{e}}_{x'} - \bar{\mathbf{e}}_{y'})$ , on passera de  $\bar{\mathbf{E}} = a \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_x$  à :

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{a}{\sqrt{2}} [\sin(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_{x'} - \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_{y'}] \quad (\text{C.9})$$

qui correspond à une onde *polarisée circulairement*.

À cause de la difficulté de la mesure des facteurs de transmission et de sensibilité, la définition d'une *intensité lumineuse* absolue est très délicate. On se contente en général de définir des intensités lumineuses relatives, comme étant proportionnelles à l'énergie lumineuse moyenne donc à la valeur moyenne par rapport au temps de  $\bar{\mathbf{E}}^2$ ,

$$I(\bar{\mathbf{x}}) = \langle \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{x}}, t)^2 \rangle_t . \quad (\text{C.10})$$

### C.3 Biréfringence accidentelle

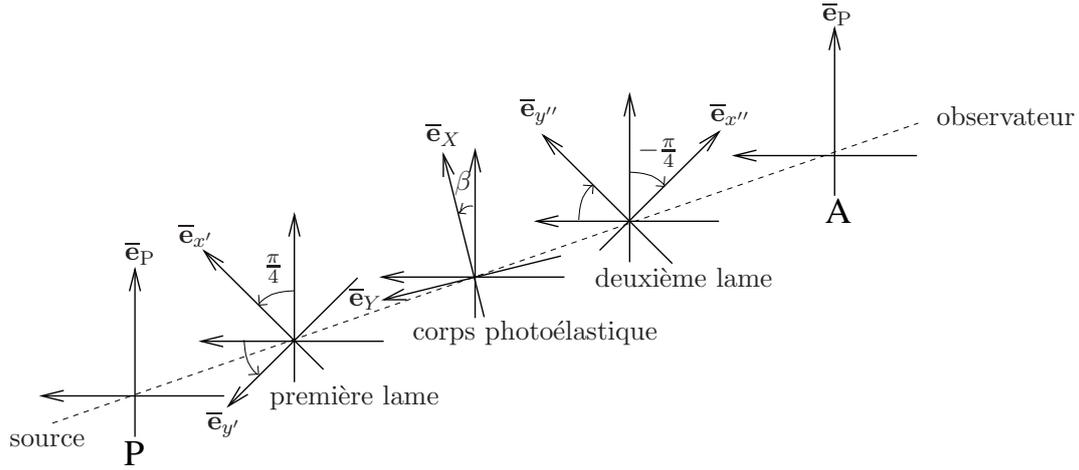
Un matériau *photoélastique* présente le phénomène de *biréfringence accidentelle* : isotrope et non biréfringent s'il n'est pas sollicité mécaniquement, il devient au contraire anisotrope et biréfringent lorsqu'il est soumis à des contraintes. On se place toujours dans le cas « bidimensionnel »  $xy$  avec des ondes d'incidence normale par rapport au plan  $xy$ , dans lequel le matériau est sollicité, i.e. en général  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_x$  et  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_y$  ne sont pas tous deux nuls. On suppose de plus que le matériau n'est pas sollicité dans la direction normale  $z$ , i.e.  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_z = \bar{\mathbf{0}}$ . Dans le plan  $xy$ , les *axes optiques* de biréfringence sont alors les *directions principales*  $\bar{\mathbf{e}}_X$  et  $\bar{\mathbf{e}}_Y$  *des contraintes*, correspondant aux valeurs propres du tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma_X \geq \sigma_Y$ . De plus le degré de biréfringence dans le plan, qui doit s'annuler si la sollicitation mécanique est isotrope dans le plan,  $\sigma_X = \sigma_Y$ , peut être en bonne approximation décrit par une loi linéaire en l'anisotropie des contraintes principales  $\delta\sigma = \sigma_X - \sigma_Y$ . On introduit la *constante de Brewster*  $C$  du matériau, quotient du degré de biréfringence par l'*anisotropie de contrainte*<sup>4</sup>, de sorte que

$$\delta n = C \delta\sigma = C (\sigma_X - \sigma_Y) . \quad (\text{C.11})$$

La constante  $C$  a la dimension de l'inverse d'une contrainte donc de l'inverse d'une pression. Notons que  $\delta\sigma = \sigma_X - \sigma_Y$  est liée à la valeur maximale du cisaillement dans le plan  $xy$  au point considéré,

3. Comme seule la phase *relative* des deux ondes se propageant suivant  $\bar{\mathbf{e}}_{x'}$  et  $\bar{\mathbf{e}}_{y'}$  importe, on redéfinit souvent la phase absolue des ondes de façon à ce que le déphasage n'apparaisse que sur l'une des deux ondes seulement.

4. En toute rigueur c'est plutôt l'*anisotropie de déformation* qui gouverne l'anisotropie optique, cependant dans un matériau élastique linéaire intrinsèquement isotrope considéré ici, les anisotropies de contrainte et de déformation sont directement liées en vertu de la relation (4.37).



**Fig. C.1** – Principe du montage photoélastique en lumière polarisée circulairement du *Stress-Opticon*.

soit  $\delta\sigma/2 = (\sigma_X - \sigma_Y)/2$ .

Par application de (C.8), si en entrée

$$\bar{\mathbf{E}} = a \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_X + b \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_Y, \quad (\text{C.12})$$

on récupère en sortie

$$\bar{\mathbf{E}} = a \cos(\omega t - \phi) \bar{\mathbf{e}}_X + b \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_Y \quad (\text{C.13})$$

où le déphasage  $\phi$  est donné par la *loi de Maxwell*,

$$\boxed{\phi = 2\pi C \delta\sigma \frac{e}{\lambda_0}}, \quad (\text{C.14})$$

$e$  étant l'épaisseur du matériau traversé. On notera bien que  $\bar{\mathbf{e}}_X$  est associé à  $n_e$  et  $\sigma_X$  tandis que  $\bar{\mathbf{e}}_Y$  est associé à  $n_o$  et  $\sigma_Y$ .

Le *Stress-Opticon* utilise un polariseur **P**, de direction de polarisation notée  $\bar{\mathbf{e}}_P$ , une première lame quart d'onde orientée à  $\pi/4$  par rapport à celui-ci, avant le corps photoélastique, dont les directions principales des contraintes sont orientées à un angle  $\beta$  par rapport à  $\bar{\mathbf{e}}_P$ , puis une deuxième lame quart d'onde à  $-\pi/4$  par rapport au polariseur, et enfin un analyseur **A** parallèle au polariseur, comme représenté sur la Fig. C.1.

▷ Juste à la sortie du polariseur nous avons

$$\bar{\mathbf{E}} = a\sqrt{2} \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_P = a \cos(\omega t) (\bar{\mathbf{e}}_{x'} - \bar{\mathbf{e}}_{y'}).$$

À la sortie de la première lame quart d'onde nous avons donc

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &= a \sin(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_{x'} - a \cos(\omega t) \bar{\mathbf{e}}_{y'} \\ &= a \sin(\omega t) \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \bar{\mathbf{e}}_X + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \bar{\mathbf{e}}_Y \right] - a \cos(\omega t) \left[ -\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \bar{\mathbf{e}}_X + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \bar{\mathbf{e}}_Y \right] \\ &= a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \beta\right) \bar{\mathbf{e}}_X - a \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \beta\right) \bar{\mathbf{e}}_Y \\ \bar{\mathbf{E}} &= a \sin(\phi_0) \bar{\mathbf{e}}_X - a \cos(\phi_0) \bar{\mathbf{e}}_Y \end{aligned}$$

en notant  $\phi_0 = \omega t + \frac{\pi}{4} - \beta$ . D'après l'équation (C.13), après la traversée du matériau photoélastique, on a

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= a \sin(\phi_0 - \phi) \bar{\mathbf{e}}_X - a \cos(\phi_0) \bar{\mathbf{e}}_Y \\ &= a \sin(\phi_0 - \phi) \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \bar{\mathbf{e}}_{x''} + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \bar{\mathbf{e}}_{y''} \right] - a \cos(\phi_0) \left[ -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \bar{\mathbf{e}}_{x''} + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \bar{\mathbf{e}}_{y''} \right] \\ \bar{\mathbf{E}} &= a \left[ \cos\frac{\phi}{2} \cos\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) - \sin\frac{\phi}{2} \cos\left(\omega t - 2\beta - \frac{\phi}{2}\right) \right] \bar{\mathbf{e}}_{x''} \\ &\quad + a \left[ \cos\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) + \sin\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - 2\beta - \frac{\phi}{2}\right) \right] \bar{\mathbf{e}}_{y''} .\end{aligned}$$

À la sortie de la deuxième lame quart d'onde il vient donc

$$\bar{\mathbf{E}} = a \left[ \cos\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) - \sin\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - 2\beta - \frac{\phi}{2}\right) \right] \bar{\mathbf{e}}_{x''} + a \left[ \cos\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) + \sin\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - 2\beta - \frac{\phi}{2}\right) \right] \bar{\mathbf{e}}_{y''} .$$

L'analyseur étant parallèle au polariseur, il sélectionne les vibrations parallèles à  $\bar{\mathbf{e}}_P = (\bar{\mathbf{e}}_{x''} + \bar{\mathbf{e}}_{y''})/\sqrt{2}$  selon

$$E = \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_P = a\sqrt{2} \cos\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) .$$

De façon remarquable, l'angle  $\beta$  d'orientation des directions principales des contraintes n'intervient plus. L'*intensité lumineuse* correspondante est d'après (C.10)

$$I = \langle E^2 \rangle_t = a^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} = a^2 \cos^2 \left( \pi \frac{\delta\sigma}{\sigma_0} \right) \quad (\text{C.15})$$

en utilisant la loi de Maxwell (C.14), et en posant

$$\sigma_0 = \frac{\lambda_0}{e} \frac{1}{C} . \quad (\text{C.16})$$

L'intensité est maximale si

$$\delta\sigma = n \sigma_0 \text{ pour } n \in \mathbb{N} , \quad (\text{C.17})$$

ce qui définit les *franges isochromatiques claires*. En lumière blanche donc polychromatique, la frange d'ordre  $n = 0$  sera blanche, car la condition correspondante d'isotropie  $\delta\sigma = 0$  ne dépend pas de la longueur d'onde, par contre les franges d'ordre  $n \geq 1$  seront colorées, puisque la condition de frange  $\delta\sigma = n\lambda_0/(eC)$  dépend de la longueur d'onde  $\lambda_0$ . Au contraire, l'intensité est minimale si

$$\delta\sigma = \left( n + \frac{1}{2} \right) \sigma_0 \text{ pour } n \in \mathbb{N} , \quad (\text{C.18})$$

ce qui définit les *franges isochromatiques sombres*. En lumière blanche donc polychromatique, toutes les franges sombres seront colorées, puisque la condition (C.18) dépend toujours de la longueur d'onde. Toujours en lumière polychromatique, toutes les franges en dehors de la frange claire  $n = 0$  ne seront pas très « nettes » à cause de la superposition des images dues à chaque longueur d'onde. Des franges « nettes » pourront par contre être obtenues en lumière monochromatique... comparez sur ce sujet les figures 4.3a et b...

Terminons en remarquant que, dans le cas du barreau étudié dans le problème 4.1, et avec les notations de l'énoncé correspondant, soit  $\sigma_1 = \sigma_X > 0$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_Y = 0$  (cas  $y > 0$ ), soit  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_X = 0$ ,  $\sigma_3 = \sigma_Y < 0$  (cas  $y < 0$ ), donc dans tous les cas

$$\delta\sigma = \sigma_X - \sigma_Y = \sigma_1 - \sigma_3 . \quad (\text{C.19})$$

Cette constatation combinée avec l'équation (C.17) conduit bien à l'équation (4.75).

## Annexe D

# Éléments de correction des exercices et problèmes - Compléments

Ces *éléments de correction* sont plus ou moins imprécis, selon le niveau de difficulté des exercices et problèmes, le fait qu'ils sont abordés ou non en TD, etc... Lire un énoncé puis son corrigé est totalement inutile voire contre-productif. La seule bonne façon de profiter de ces corrigés est de chercher *d'abord* à résoudre l'exercice ou problème par soi-même, puis *ensuite* seulement de consulter les corrigés... pour vous débloquer ou mieux vérifier que votre solution est correcte... Pour éviter d'être tenté, je vous recommande de ne pas imprimer ces corrigés, mais de les consulter seulement sous leur forme électronique.

Des *compléments* sont donnés à la fin de la solution de certains exercices ou problèmes.

### D.1 Corrigés du chapitre 1 - Cinématique élémentaire

**Problème 1.1** *Étude de l'écoulement potentiel autour d'un mobile cylindrique*

1.1 Description *eulerienne* ; mouvement *stationnaire*.

1.2  $c = -2b$ .

1.3  $b = a^2$ .

1.4  $y = a^2 \frac{y}{r^2} + y_\infty$  puis  $r = \frac{y_\infty}{2 \sin \theta} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4a^2 \sin^2 \theta}{y_\infty^2}} \right]$ .

2.1  $v_x = Ua^2 \frac{[y^2 - (x + Ut)^2]}{[(x + Ut)^2 + y^2]^2}$ ,  $v_y = -2Ua^2 \frac{(x + Ut)y}{[(x + Ut)^2 + y^2]^2}$ .

2.2  $r = 2R \sin \theta \longleftrightarrow$  cercles.

2.3 Écoulement *instationnaire*, *incompressibilité*.

---

**Problème 1.2** *Étude d'un problème d'advection-diffusion*

1.1 Symétrie, analyse dimensionnelle et séparation des variables.

1.3  $A = m_a / [8(\pi D)^3]$ .

1.5  $t > 200$  ans!..

2.1 Advection joue maintenant.

2.2  $t \simeq 6$  minutes...

## D.2 Corrigés du chapitre 2 - Cinématique avancée

**Exercice 2.1** *Interprétation des composantes du tenseur des dilatations de Cauchy*

1 Ce qui importe est de savoir si les valeurs propres sont plus petites ou plus grandes que 1.

2 Il suffit de calculer de deux façons différentes le produit scalaire  $d\bar{\mathbf{x}}_1 \cdot d\bar{\mathbf{x}}_2$ .

**Exercice 2.2** *Interprétation des vecteurs propres du tenseur des dilatations de Cauchy*

Calculer  $R^2$  connaissant notamment  $d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}$ ,  $d\bar{\mathbf{X}}$  étant écrit en composantes dans la base propre,  $d\bar{\mathbf{X}} = dX_i \bar{\mathbf{u}}_i$ .

**Problème 2.1** *Étude d'un mouvement de cisaillement pur*

1.1  $k(t_0) = 0$ ,  $D_t = D_0$ .

1.3  $\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \bar{\bar{\mathbf{I}}} + k\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2$ .

1.4  $J = 1 \iff$  mouvement *isovolume*.

1.5  $\bar{\bar{\mathbf{C}}} = \bar{\bar{\mathbf{I}}} + k(\bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2) + k^2\bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2$ .

1.6  $k = 0$  (trivial).

1.7  $\bar{\bar{\mathbf{C}}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3 \iff$  pas de mouvement dans la 3ème direction.

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}} \cdot \bar{\mathbf{X}}_{\pm} = \lambda_{\pm} \bar{\mathbf{X}}_{\pm} \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{X}}_{\pm} = \bar{\mathbf{e}}_2 - \frac{k}{2}\bar{\mathbf{e}}_1 \pm \sqrt{1 + \frac{k^2}{4}}\bar{\mathbf{e}}_1 \quad \text{et} \quad \lambda_{\pm} = 1 + \frac{k^2}{2} \pm k\sqrt{1 + \frac{k^2}{4}}.$$

$\lambda_+ > 1$  alors que  $\lambda_- < 1$ ...

1.8  $\bar{\bar{\mathbf{e}}} = \frac{k}{2}(\bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2) + \frac{k^2}{2}\bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2$ .

1.9 Cf. 1.7...

1.10  $k \ll 1$ .

1.11  $\bar{\mathbf{u}} = kX_2\bar{\mathbf{e}}_1 \implies \bar{\bar{\mathbf{e}}} = \frac{k}{2}(\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1)$ .

1.12 Deux méthodes : calcul direct,

$$\bar{\bar{\mathbf{e}}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{0}}, \quad \bar{\bar{\mathbf{e}}} \cdot \bar{\mathbf{Y}}_{\pm} = \pm \frac{k}{2}\bar{\mathbf{Y}}_{\pm} \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{Y}}_{\pm} = \bar{\mathbf{e}}_2 \pm \bar{\mathbf{e}}_1;$$

ou alors faire tendre  $k$  vers 0 dans les résultats de la question 1.9.

1.13 Comme la transformation est homogène,

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \bar{\mathbf{X}}$$

$$\text{avec } \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \bar{\mathbf{X}} = \frac{k}{2}(X_2 \bar{\mathbf{e}}_1 + X_1 \bar{\mathbf{e}}_2) \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \bar{\mathbf{X}} = \frac{k}{2}(X_2 \bar{\mathbf{e}}_1 - X_1 \bar{\mathbf{e}}_2) \dots$$

2.1  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = k'(t)x_2 \bar{\mathbf{e}}_1.$

2.2  $\bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} = k' \bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 = \dot{\bar{\mathbf{F}}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-1}.$

2.3  $\text{div} \bar{\mathbf{v}} = 0 \dots$

2.4  $\bar{\mathbf{D}} = \frac{k'}{2}(\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1) = (\bar{\mathbf{F}}^T)^{-1} \cdot \dot{\bar{\mathbf{e}}} \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-1}.$

2.5 Cf 1.12...

2.6 Comme  $\bar{\mathbf{v}}$  dépend linéairement des coordonnées,

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{x}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \wedge \bar{\mathbf{x}}$$

$$\text{avec } \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \frac{k'}{2}(x_2 \bar{\mathbf{e}}_1 + x_1 \bar{\mathbf{e}}_2) \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\omega}} \wedge \bar{\mathbf{x}} = \frac{k'}{2}(x_2 \bar{\mathbf{e}}_1 - x_1 \bar{\mathbf{e}}_2) \dots$$

### D.3 Corrigés du chapitre 3 - Bilans et contraintes

**Exercice 3.1** *Représentation de Mohr d'un état de contraintes planes*

1, 2 Symétrie de  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \dots$

3.2  $\bar{\mathbf{T}} = \sigma_1 \cos \alpha \bar{\mathbf{n}}_1 + \sigma_2 \sin \alpha \bar{\mathbf{n}}_2,$

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha,$$

$$\tau = (\cos \alpha \bar{\mathbf{n}}_2 - \sin \alpha \bar{\mathbf{n}}_1) \cdot (\sigma_1 \cos \alpha \bar{\mathbf{n}}_1 + \sigma_2 \sin \alpha \bar{\mathbf{n}}_2) \dots$$

3.3  $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$  atteint pour  $-2\alpha = \pi/2$  i.e.  $\alpha = -\pi/4.$

**Exercice 3.2** *Retour sur le mouvement de cisaillement pur : calcul des contraintes*

1  $k \ll 1.$

2  $\bar{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{0}} \dots$

3 En  $X_2 = a,$

$$\bar{\mathbf{T}} = \tau \bar{\mathbf{e}}_1 \iff \begin{cases} \sigma_{12} = \tau \\ \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{32} = 0 \end{cases}$$

avec  $\tau = F/S$  le quotient de la force tangentielle appliquée par l'aire de la surface.

En  $X_2 = -a,$

$$\bar{\mathbf{T}} = -\tau \bar{\mathbf{e}}_1 \iff \begin{cases} \sigma_{12} = \tau \\ \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{32} = 0 \end{cases},$$

forme analogue à celle des conditions en  $X_2 = a.$

4 En  $X_3 = \pm b$ , interfaces libres  $\bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{0}} \iff \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ .

5  $\sigma_{11} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$  partout, puis

$$\sigma_{12} = \tau \iff \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \tau(\bar{\mathbf{e}}_1 \otimes \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_2 \otimes \bar{\mathbf{e}}_1).$$

6 Représentez  $\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{e}}_1)$  et  $\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{e}}_2)$ , et constatez que, d'après la règle du  $-2\alpha$  établie à l'exercice 3.1, leurs points représentatifs sont diamétralement opposés sur le cercle de Mohr...

## D.4 Corrigés du chapitre 4 - Solides élastiques

**Problème 4.1** *Étude d'un barreau parallélépipédique en flexion pure*

1 Avec  $\bar{\mathbf{F}} = F\bar{\mathbf{e}}_y$ , à gauche

$$\bar{\Gamma} = \overline{\mathbf{OP}}_1 \wedge (-\bar{\mathbf{F}}) + \overline{\mathbf{OP}}_2 \wedge \bar{\mathbf{F}} = (b-a) F \bar{\mathbf{e}}_z,$$

à droite

$$-\bar{\Gamma} = \overline{\mathbf{OP}}_3 \wedge \bar{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{OP}}_4 \wedge (-\bar{\mathbf{F}}) = (a-b) F \bar{\mathbf{e}}_z.$$

2.1 Frontières libres (négliger la pression de l'air ambiant ou l'inclure dans la configuration de référence) :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_y = \bar{\mathbf{0}} \text{ sur les frontières } y = \text{constante}, \quad \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_z = \bar{\mathbf{0}} \text{ sur les frontières } z = \text{constante}.$$

2.2 Sur  $S_{\pm} = \{(x,y,z) \in \{\pm a_0\} \times [-h,h] \times [-e,e]\}$ ,

$$\iint_{S_{\pm}} d^2\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{0}} \quad \text{et} \quad \iint_{S_{\pm}} \overline{\mathbf{OM}} \wedge d^2\bar{\mathbf{f}} = \mp \bar{\Gamma}.$$

3  $\overline{\text{div}} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \bar{\mathbf{0}}$ .

5.1  $B = 0$ .

5.2  $A = 0$ ,  $C = \frac{3}{4} \frac{\Gamma}{eh^3}$ ,  $D = 0$ .

6  $Y > 0 \iff$  traction pure,  $Y < 0 \iff$  compression pure.

7  $y > 0 \iff$  isochromatique si  $y = 2n\tau_0/C$ ,  $y < 0 \iff$  isochromatique si  $y = -2n\tau_0/C$ .

8 Avec  $\sigma = Cy$ ,

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} = \frac{\sigma}{E} \bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_x - \frac{\nu}{E} \sigma (\bar{\mathbf{e}}_y \otimes \bar{\mathbf{e}}_y + \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z).$$

9 Oui.

10 Avec  $C' = C/E$ ,

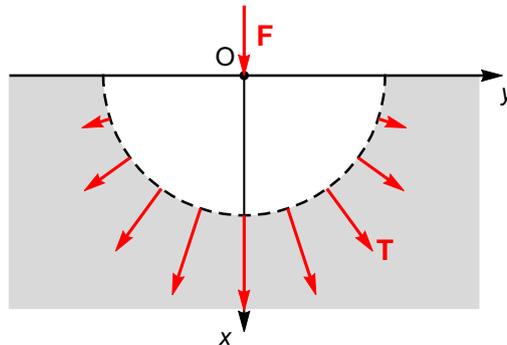
$$u_x = C'xy, \quad u_y = \frac{C'}{2}(\nu z^2 - \nu y^2 - x^2), \quad u_z = -\nu C'yz.$$

**Problème 4.2** *Étude de contacts rectilignes avec forces de compression*

**I Contact rectiligne avec une force de compression localisée**

1 Sur  $S_\ell$ ,  $\cos \theta = 0$  donc  $\bar{\sigma} = \bar{\mathbf{0}}$ .

2 Sur  $S$ ,  $\bar{\mathbf{T}} = -A \frac{\cos \theta}{r_0} \bar{\mathbf{e}}_r$ , d'où la représentation :



Force de compression  $\bar{\mathbf{F}}$  crée des contraintes internes de compression, transmises par la partie « externe » (en blanc) sur la partie « interne » (en gris).

Contraintes d'autant plus intenses que le rayon  $r_0$  est petit, i.e., que la coupe virtuelle se rapproche de la ligne de contact Oz.

Cette figure dessinée dans le plan  $z = 0$  vaut aussi pour d'autres valeurs de  $z$ ...

3 On oublie la pesanteur, pour une bonne raison...

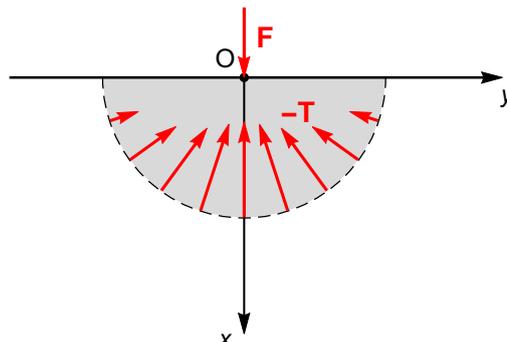
Portion de solide coupée en équilibre sous l'action de diverses forces :

- sur sa frontière plane dans le plan  $xOy$  : la force totale  $\bar{\mathbf{F}} = F' L_z \bar{\mathbf{e}}_x$  ;
- sur la frontière  $S$ , d'après la loi de l'action - réaction : des forces surfaciques  $-\bar{\mathbf{T}} d^2S$  sont exercées par le solide situé « au-dessous » sur la figure précédente ; la résultante de ces forces est le terme intégral dans l'équation de l'énoncé ;
- sur les frontières  $S_z^\pm$  situées en  $z = \pm L_z/2$ , les vecteurs contraintes exercés par le solide extérieur

$$\bar{\mathbf{T}}_\pm = \mp B \frac{\cos \theta}{r} \bar{\mathbf{e}}_z ;$$

par symétrie, la résultante de ces forces sur la frontière  $S_z^+$  compense exactement la résultante sur la frontière  $S_z^-$ ...

D'où la représentation :



Par symétrie

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} &= \iint_S -\bar{\mathbf{T}} d^2S = R_x \bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{avec} \quad R_x = -AL_z \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta \bar{\mathbf{e}}_r \cdot \bar{\mathbf{e}}_x d\theta = -AL_z \frac{\pi}{2} \\ &\implies \boxed{A = \frac{2F'}{\pi}}. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

4

$$[\epsilon] = \text{Mat}(\bar{\bar{\epsilon}}, \{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\}) = \frac{1}{2}([G] + [G^T]) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & 0 \\ \times & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & 0 \\ \times & \times & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

5

$$\epsilon_{zz} = 0 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{rr} + \sigma_{zz}) \iff \sigma_{zz} = \nu \sigma_{rr} \implies \boxed{B = \nu A}. \quad (\text{D.3})$$

6.a

$$\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_{zz} = -\nu p_0, \quad \sigma_3 = \sigma_{rr} = -p_0 \quad \text{avec} \quad p_0 = A \frac{\cos \theta}{r}.$$

*Contraintes planes, compression, anisotropes.*

6.b

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = p_0 = A \frac{\cos \theta}{r} = n\sigma_0 \iff Ar \cos \theta = n\sigma_0 r^2.$$

Vvaleur  $n = 0$  interdite. Équation des franges d'ordre  $n > 0$  :

$$r^2 = 2A_n r \cos \theta \quad \text{avec} \quad A_n = \frac{A}{2n\sigma_0},$$

soit

$$x^2 + y^2 = 2A_n x \iff (x - A_n)^2 + y^2 = A_n^2,$$

soit un cercle de centre  $(A_n, 0)$  et de rayon  $A_n$ ...

7 Équation de l'équilibre local du solide, en ne considérant pas la pesanteur incluse dans la configuration de référence :

$$\bar{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\mathbf{0}}.$$

Cela est bien car

$$\bar{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} = \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} \right) \bar{\mathbf{e}}_r + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \bar{\mathbf{e}}_z = \left( A \frac{\cos \theta}{r^2} - A \frac{\cos \theta}{r^2} \right) \bar{\mathbf{e}}_r = \bar{\mathbf{0}}, \quad \text{CQFD.}$$

8 D'après la loi de Hooke

$$\epsilon_{rr} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{rr} - \frac{\nu}{E} (1+\nu) \sigma_{rr} = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_{rr},$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{\theta\theta} &= 0 - \frac{\nu}{E}(1+\nu)\sigma_{rr} = -\frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_{rr}, \\ \epsilon_{r\theta} &= 0.\end{aligned}$$

En identifiant avec les coefficients de la matrice  $[\epsilon]$  (D.2) calculée question 3 :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \epsilon_{rr} = -\frac{1-\nu^2}{E}A\frac{\cos\theta}{r}, \quad (D.4a)$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_r\right) = \epsilon_{\theta\theta} = \frac{\nu(1+\nu)}{E}A\frac{\cos\theta}{r}, \quad (D.4b)$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - u_\theta\right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = 2\epsilon_{r\theta} = 0. \quad (D.4c)$$

Ce système considéré seul ne détermine pas uniquement  $\bar{\mathbf{u}}!$ .

9 Puisque  $F'$  est une force linéique, on a bien

$$u_x \equiv u_y \equiv \frac{F'}{E} \equiv \frac{F/\ell}{F/\ell^2} \equiv \ell.$$

Comme  $\nu \in ]0, 1/2[$  le coefficient de  $\ln|y|$  dans  $u_x$  est négatif, tandis que le coefficient  $(1-2\nu)(1+\nu)$  dans  $u_y$  est positif, d'où les représentations de la figure D.1.

Ces champs décrivent de façon raisonnable un mouvement vers le « bas » i.e. dans la direction de  $\bar{\mathbf{F}}$ , assez localisé, sous l'effet de cette force de compression localisée au centre.

Ce mouvement est en fait « trop localisé » puisque  $u_x$  diverge au centre, en  $y = 0$ ; de même  $u_y$  est discontinue en  $y = 0$  : la ligne de contact est une ligne *singulière*, où les déplacements et les contraintes (puisque  $r = 0$ ) sont « infinis ».

Ceci est sans doute lié à l'hypothèse d'un contact sur une ligne sans épaisseur, incompatible avec l'approche du milieu continu : le contact aurait lieu sur une région de taille inférieure à celle d'un volume élémentaire représentatif, échelle au-dessous de laquelle on ne peut descendre en mécanique des milieux continus. La validité de ce modèle est sûrement restreinte à une grande partie du solide excluant un voisinage de la ligne de contact singulière.

## II Contact sur une bande avec une force de compression répartie

10 Comme  $p$  et  $E$  sont des pressions, on a bien

$$u_x \equiv u_y \equiv a \equiv y \equiv \ell.$$

Pour les représentations, cf. la figure D.2.

Ce champ décrit de façon raisonnable un mouvement vers le « bas » i.e. dans la direction de  $\bar{\mathbf{F}}$ , sous l'effet des forces de pression appliquées dans la bande, avec des déplacements, dans la direction  $x$  de ces forces, plus amples (resp. maximum) sous la bande de contact (resp. au centre de la bande de contact).

Par rapport au cas de la partie I, du fait de la répartition non localisée des forces, on a maintenant un champ  $\bar{\mathbf{u}}(y)$  *continu* sur  $\mathbb{R}$ , la singularité rencontrée en partie I a disparu, ce qui suggère que ce modèle est très pertinent, et décrit la réalité physique dans tout le domaine solide.

On peut enfin noter qu'en dehors de la zone  $y \in [-a, a]$ , les champs ressemblent à ceux de la figure D.1.

**Complément**

Les élèves intéressés trouveront dans Johnson (1985) le détail des calculs, assez lourds, qui conduisent, à partir des équations (D.4), aux champs  $u_r$  et  $u_\theta$  dans l'intérieur du solide en situation I, puis, aux champs donnés dans l'énoncé question 9 ; bien entendu le passage de la situation I à la situation II est aussi expliqué dans ce livre...

**Problème 4.3 Étude d'un système d'accouplement élastique**

**I.1** Loi d'évolution du moment cinétique dans le référentiel de travail, où  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}$ , pour le manchon :

$$\bar{\mathbf{0}} = \iint_{\partial\Omega} \overline{\mathbf{OM}} \wedge \bar{\mathbf{T}} d^2S = \iint_{S_a} \overline{\mathbf{OM}} \wedge \bar{\mathbf{T}} d^2S + \iint_{S_b} \overline{\mathbf{OM}} \wedge \bar{\mathbf{T}} d^2S ,$$

avec  $\bar{\mathbf{n}}$  normale unitaire sortante sur  $\partial\Omega$ ,  $S_a$  frontière en  $r = a$ ,  $S_b$  frontière en  $r = b$ . Autres frontières sont surfaces libres donc sans couple appliqué. Ainsi

$$\bar{\mathbf{\Gamma}} = \iint_{S_a} \overline{\mathbf{OM}} \wedge \bar{\mathbf{T}} d^2S = -\bar{\mathbf{\Gamma}}' = -\iint_{S_b} \overline{\mathbf{OM}} \wedge \bar{\mathbf{T}} d^2S .$$

**I.2** Loi d'évolution du moment cinétique pour l'arbre :

$$\bar{\mathbf{0}} = \sum \bar{\mathbf{\Gamma}}_{\text{extérieurs à l'arbre}} = \bar{\mathbf{\Gamma}}_{\text{manchon} \rightarrow \text{arbre}} + \bar{\mathbf{\Gamma}}_a .$$

Loi de l'action-réaction  $\implies \bar{\mathbf{\Gamma}}_{\text{manchon} \rightarrow \text{arbre}} = -\bar{\mathbf{\Gamma}}_{\text{arbre} \rightarrow \text{manchon}} = -\bar{\mathbf{\Gamma}}$ , donc

$$\bar{\mathbf{\Gamma}} = \bar{\mathbf{\Gamma}}_a .$$

**I.3** Loi d'évolution du moment cinétique pour la bague :

$$\bar{\mathbf{0}} = \sum \bar{\mathbf{\Gamma}}_{\text{extérieurs à la bague}} = \bar{\mathbf{\Gamma}}_{\text{manchon} \rightarrow \text{bague}} + \bar{\mathbf{\Gamma}}_b = -\bar{\mathbf{\Gamma}}' + \bar{\mathbf{\Gamma}}_b \iff \bar{\mathbf{\Gamma}}' = \bar{\mathbf{\Gamma}}_b .$$

**I.4** On a bien grâce au manchon transmission du couple  $\bar{\mathbf{\Gamma}}_a$  de l'arbre vers la bague, puisque

$$\bar{\mathbf{\Gamma}}_a = \bar{\mathbf{\Gamma}} = -\bar{\mathbf{\Gamma}}' = -\bar{\mathbf{\Gamma}}_b .$$

La bague est couplée à un système extérieur sur lequel elle exerce un couple  $-\bar{\mathbf{\Gamma}}_b = \bar{\mathbf{\Gamma}}_a$ , le manchon a bien permis la transmission du couple  $\bar{\mathbf{\Gamma}}_a$ .

**II.1** Causes du mouvement = densités de forces surfaciques évoquées dans l'énoncé,

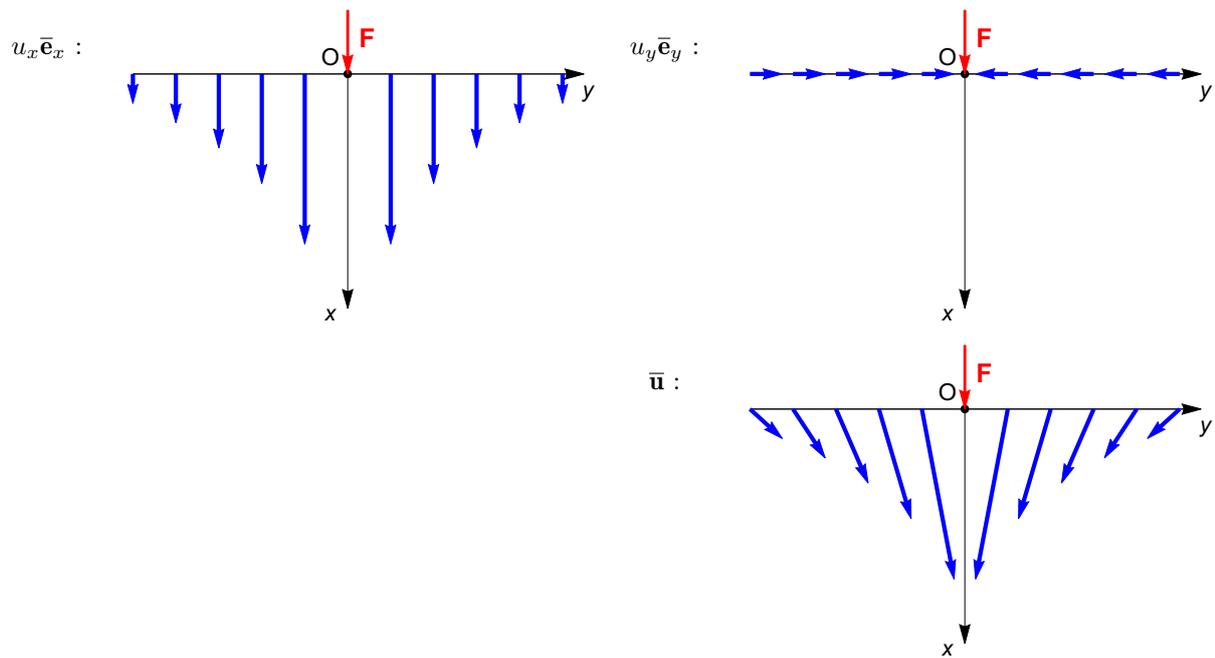
$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{d^2\bar{\mathbf{f}}}{d^2S} = \tau \bar{\mathbf{e}}_\theta \text{ sur la frontière intérieure, } \bar{\mathbf{T}} = -\tau' \bar{\mathbf{e}}_\theta \text{ sur la frontière extérieure.}$$

Les symétries « cylindriques » de ces champs se transportent d'après le *principe de Curie* sur le champ effet  $\bar{\mathbf{u}} \implies \bar{\mathbf{u}} = u(r) \bar{\mathbf{e}}_\theta$ .

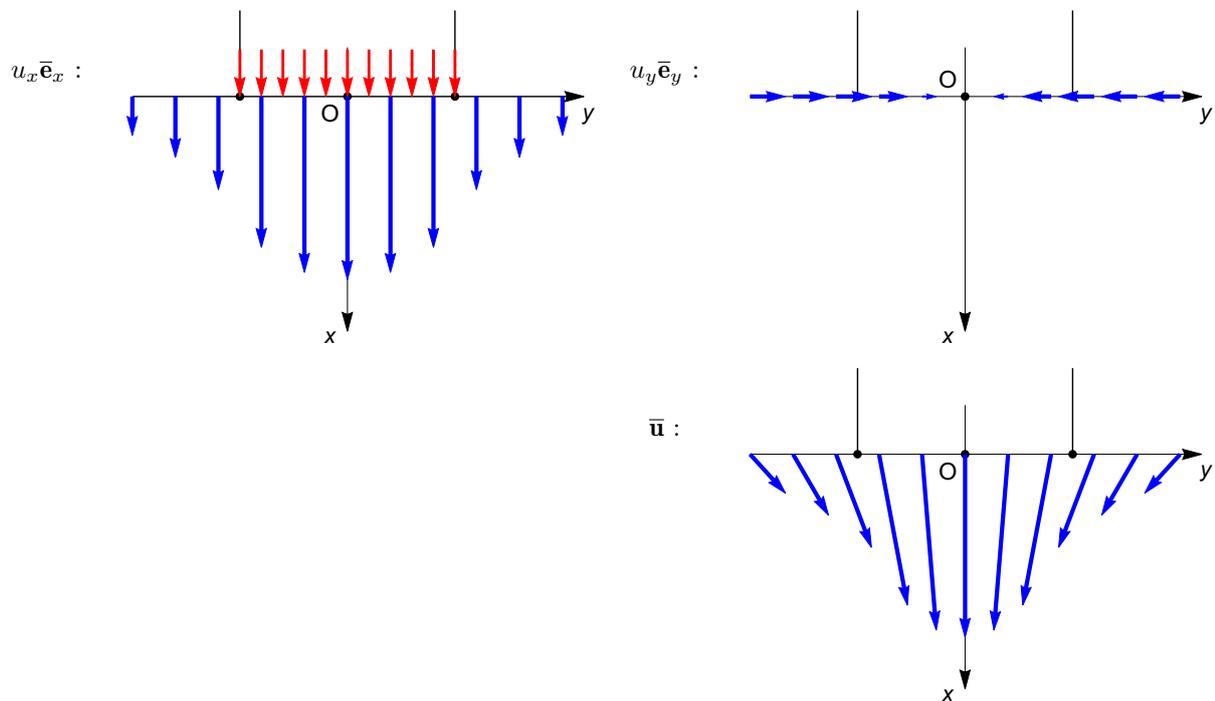
**II.2** En notant  $u'$  la dérivée de  $u$  par rapport à  $r$ ,

$$\overline{\overline{\nabla}} \bar{\mathbf{u}} = -\frac{u_\theta}{r} \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \frac{du_\theta}{dr} \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_r = -\frac{u}{r} \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + u' \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_r .$$

**II.3**  $\text{div} \bar{\mathbf{u}} = 0$  s'explique par le fait que  $\bar{\mathbf{u}}$  est un champ « tournant », donc ni convergent ni divergent. Conséquence mécanique importante : le mouvement est *incompressible*, puisque la dilatation volumique  $J = 1$ .



**Fig. D.1** – Dans la situation de la partie I du problème 4.2, champs de déplacements projetés sur les axes  $x$  ou  $y$ , et champ de déplacement total.



**Fig. D.2** – Dans la situation de la partie II du problème 4.2, champs de déplacements projetés sur les axes  $x$  ou  $y$ , et champ de déplacement total.

**II.4**  $\bar{\mathbf{0}} = \mu \bar{\Delta \mathbf{u}} \iff (\bar{\Delta \mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{e}}_\theta = \Delta u - \frac{u}{r^2} = u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = 0$ , équation différentielle ordinaire linéaire homogène<sup>1</sup> d'ordre 2, à coefficients non constants.

**II.5**  $u = r^\alpha$  solution  $\iff \alpha = \pm 1$ , donc  $u = Ar + B/r$ .  
Condition limite en déplacement au niveau du cylindre extérieur :

$$u(r = b) = 0 \implies B = -Ab^2 \implies \boxed{u = A(r - b^2/r)}.$$

Condition limite en déplacement au niveau du cylindre intérieur :

$$u(r = a) = a\theta_0 \iff \boxed{A = \theta_0 a^2 / (a^2 - b^2)}.$$

**II.6**

$$\boxed{\bar{\nabla \mathbf{u}} = -A(1 - b^2/r^2) \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + A(1 + b^2/r^2) \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_r}$$

$$\boxed{\bar{\bar{\epsilon}} = (Ab^2/r^2) (\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_r)}$$

**II.7**

$$\boxed{\bar{\bar{\sigma}} = (2\mu Ab^2/r^2) (\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_r)}$$

**II.8**  $\bar{\mathbf{T}} = \bar{\bar{\sigma}}(r = a) \cdot (-\bar{\mathbf{e}}_r) = \tau \bar{\mathbf{e}}_\theta$  avec  $\tau = -2\mu Ab^2/a^2 > 0$  puisque  $A < 0$ .

**II.9**

$$\bar{\Gamma} = - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h (a\bar{\mathbf{e}}_r + z\bar{\mathbf{e}}_z) \wedge (2\mu Ab^2/a^2) \bar{\mathbf{e}}_\theta a d\theta dz = \Gamma \bar{\mathbf{e}}_z$$

avec

$$\Gamma = -4\pi\mu Ab^2 h = 4\pi\mu \frac{a^2 b^2 h}{b^2 - a^2} \theta_0 \iff \boxed{\theta_0 = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2 h} \Gamma}.$$

Le coefficient de proportionnalité entre  $\theta_0$  et  $\Gamma$  est bien l'inverse d'un couple :

$$\frac{1}{4\pi\mu} \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2 h} \equiv \frac{1}{F} \frac{l^2}{l^{-2} l^5} \equiv \frac{1}{F l}$$

en notant  $F$  la dimension physique d'une force.

Pas surprenant car en élasticité linéaire on a d'après la loi de Hooke que les contraintes, proportionnelles à  $\Gamma$ , sont une réponse linéaire aux déformations, proportionnelles à  $\theta_0$ .

**II.10**

$$\bar{\Gamma}' = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h (b\bar{\mathbf{e}}_r + z\bar{\mathbf{e}}_z) \wedge (2\mu Ab^2/b^2) \bar{\mathbf{e}}_\theta b d\theta dz = 2\mu Ab^2 \bar{\mathbf{e}}_z 2\pi h = 4\pi\mu Ab^2 h \bar{\mathbf{e}}_z = -\bar{\Gamma}$$

comme le prédisait le bilan de moment cinétique.

Le fait que les contraintes tangentielles (comme les déformations) ont diminué d'un facteur  $a^2/b^2$  entre  $r = a$  et  $r = b$  est compensé par l'augmentation du bras de levier d'un facteur  $b/a$  et de la surface d'application du couple du même facteur  $b/a$ .

1. Sans second membre.

II.11 Le second coefficient de Lamé

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 0,333 \text{ GPa} \implies \boxed{\theta_0 = 0,012 \text{ rad} = 0,67^\circ},$$

valeur très petite compatible avec l'hypothèse de petits déplacements. On est aussi en petite transformation, puisque

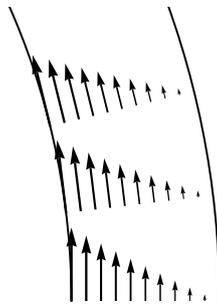
$$A = -0,027 \ll 1 \implies \left\| \overline{\nabla \mathbf{u}} \right\| \simeq |A| \ll 1.$$

II.12 Étude de la fonction  $u(r) = |A|(b^2/r - r)$  compte tenu de ce que  $A < 0$  :

$$u'(r) = |A|(-b^2/r^2 - 1) < 0 \quad \forall r \in [a,b] \implies u(r) \text{ strictement décroissante ;}$$

$$u''(r) = 2|A|b^2/r^3 > 0 \quad \forall r \in [a,b] \implies u(r) \text{ convexe.}$$

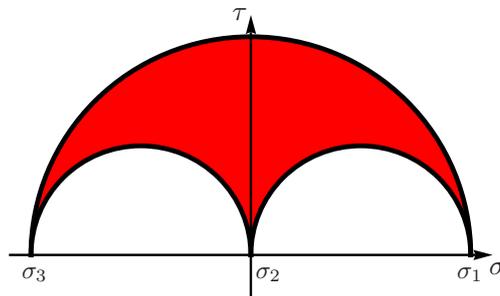
Avec Mathematica, on obtient le schéma suivant (on a pris  $\theta_0 = 0,1$  rad pour voir quelque chose) :



Effets de courbure très faibles :  $u$  dépend presque de façon affine de  $r \implies$  sur un rayon fixé, *champ de déplacement très similaire à celui du cisaillement pur* étudié en TD.

III.1  $\bar{\mathbf{n}}_1 = (\bar{\mathbf{e}}_r - \bar{\mathbf{e}}_\theta)/\sqrt{2}$  est propre pour la valeur propre  $\sigma_1 = 2\mu|A|b^2/r^2$ ,  
 $\bar{\mathbf{n}}_2 = \bar{\mathbf{e}}_z$  est propre pour la valeur propre  $\sigma_2 = 0$ ,  
 $\bar{\mathbf{n}}_3 = (\bar{\mathbf{e}}_r + \bar{\mathbf{e}}_\theta)/\sqrt{2}$  est propre pour la valeur propre  $\sigma_3 = -2\mu|A|b^2/r^2$ .

III.2 Cercles de Mohr caractéristiques d'un état de *cisaillement pur* :



III.3  $\max_{\bar{\mathbf{n}}} \tau(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 2\mu|A|\frac{b^2}{r^2} \implies$  *région la plus sollicitée en cisaillement*  
 = *région en contact avec l'arbre  $r = a$*

$$\implies \tau_{\max} = \max_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}} \tau(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}) = 2\mu|A|\frac{b^2}{a^2} = 2\mu\theta_0\frac{b^2}{b^2 - a^2} = \frac{\Gamma}{2\pi a^2 h}.$$

III.4 Si  $\bar{\mathbf{x}} = a\bar{\mathbf{e}}_x$ ,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{n}}_1 &= (\bar{\mathbf{e}}_x - \bar{\mathbf{e}}_y)/\sqrt{2} \text{ pour la valeur propre } \sigma_1 = \tau_{\max}, \\ \bar{\mathbf{n}}_2 &= \bar{\mathbf{e}}_z \text{ pour la valeur propre } \sigma_2 = 0, \\ \bar{\mathbf{n}}_3 &= (\bar{\mathbf{e}}_x + \bar{\mathbf{e}}_y)/\sqrt{2} \text{ pour la valeur propre } \sigma_3 = -\tau_{\max}.\end{aligned}$$

Normales correspondant au cisaillement maximal = bissectrices du secteur angulaire formé par  $\bar{\mathbf{n}}_1$  et  $\bar{\mathbf{n}}_3$  :

$$\bar{\mathbf{n}}_+ = \bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{n}}_- = \bar{\mathbf{e}}_y.$$

On peut le vérifier directement :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\tau_{\max} (\bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_y + \bar{\mathbf{e}}_y \otimes \bar{\mathbf{e}}_x) \implies \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_x = -\tau_{\max} \bar{\mathbf{e}}_y \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_y = -\tau_{\max} \bar{\mathbf{e}}_x$$

qui correspondent bien à des contraintes tangentielles seulement égales à  $\tau_{\max}$ .

III.5  $\tau_{\max} = 2,5 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 250 \text{ bars}$  soit une contrainte tangentielle très importante; c'est que le couple à transmettre,  $\Gamma = 1000 \text{ N m}$ , est plutôt « grand » pour une aussi petite pièce.

### Compléments

- De fait l'analyse dimensionnelle permet d'estimer que le cisaillement maximum

$$\tau_{\max} \simeq \frac{\Gamma}{d^3}$$

avec  $d$  taille caractéristique du système, en accord avec (3.65). En prenant  $d = 2 \text{ cm}$  on obtient bien

$$\tau_{\max} \simeq \frac{10^3}{8 \cdot 10^{-6}} \text{ Pa} \simeq 10^8 \text{ Pa}$$

soit le bon ordre de grandeur.

- On pourrait se demander pourquoi l'énoncé ne proposait pas d'aller plus loin qu'une étude de l'état de contrainte, pour proposer un critère de rupture. La réponse est que la rupture d'un matériau caoutchoutique (ou « élastomère ») se produit en général pour des très grandes déformations, pour lesquelles le modèle utilisé ici n'est plus valable. D'une part on n'est plus en petite transformation, d'autre part la réponse du matériau devient non linéaire; on doit donc écrire une loi de comportement plus compliquée, dite « hyperélastique ». La modélisation de ces effets d'« hyperélasticité » et la formulation d'un critère de rupture approprié sortent largement du cadre de ce module.

### Problème 4.4 Dimensionnement d'un tuyau contenant un fluide sous pression

1 Poids déjà présent et pris en compte dans la configuration de référence, hyp. de réponse élastique *linéaire*, travail en différence entre 2 configurations  $\implies$  poids n'a pas à être inclus dans l'étude  $\implies$

$$\bar{\mathbf{0}} = \overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\lambda + \mu) \overline{\nabla} \text{div} \bar{\mathbf{u}} + \mu \overline{\Delta} \bar{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \overline{\nabla} \text{div} \bar{\mathbf{u}} - \mu \overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \bar{\mathbf{u}}).$$

2 À l'extérieur, en  $r = b$ ,  $\bar{\mathbf{T}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_r = \bar{\mathbf{0}}$ .

À l'intérieur, en  $r = a$ ,  $\bar{\mathbf{T}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (-\bar{\mathbf{e}}_r) = (-\delta p)(-\bar{\mathbf{e}}_r) \iff \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_r = -\delta p \bar{\mathbf{e}}_r.$

**3**  $(\lambda + 2\mu)\overline{\nabla}\text{div } \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{0}} \iff \text{div } \bar{\mathbf{u}} = \text{constante} = 2A$

$$\iff \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru) = 2A \iff ru = Ar^2 + B \iff \boxed{u = Ar + B/r}$$

**4.1**  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \overline{\nabla}\bar{\mathbf{u}} = u' \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + (u/r) \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta = (A - B/r^2) \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + (A + B/r^2) \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda (\text{tr}\bar{\boldsymbol{\epsilon}}) \bar{\mathbf{1}} + 2\mu \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = [2(\lambda + \mu)A - 2\mu B/r^2] \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + [2(\lambda + \mu)A + 2\mu B/r^2] \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + 2\lambda A \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z$$

**4.2**  $\sigma_{rr}(r = b) = 0 \iff 2(\lambda + \mu)A - 2\mu B/b^2 = 0$

$$\sigma_{rr}(r = a) = -\delta p \iff 2(\lambda + \mu)A - 2\mu B/a^2 = -\delta p$$

$$\implies \boxed{A = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{\delta p}{\lambda + \mu}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{\delta p}{\mu}},$$

$$A \equiv \frac{\ell^2 p}{\ell^2 p} \equiv 1 \quad \text{et} \quad B \equiv \frac{\ell^4 p}{\ell^2 p} \equiv \ell^2.$$

**5**  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z$  avec  $\sigma > 0$  la contrainte de traction  $\implies \sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \implies$  contrainte tangentielle maximale

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}.$$

Limite d'élasticité  $\iff \sigma = \sigma_0 = 170 \text{ MPa} \iff \boxed{\tau_{\max} = \tau_{\text{lim}} = \frac{\sigma_0}{2} = 85 \text{ MPa}}.$

**6.1**

- Direction radiale propre pour la valeur propre  $\epsilon_{rr} = A - B/r^2$ . Dans le domaine solide

$$r^2 \leq b^2 \implies r^2 < b^2 \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{B}{A} \iff A - \frac{B}{r^2} < 0.$$

Déplacements radiaux, tous positifs, mais décroissants ( $\epsilon_{rr} = u' < 0$ )  $\implies$  contraction de petits segments radiaux de matière.

- Direction azimutale propre pour la valeur propre  $\epsilon_{\theta\theta} = A + B/r^2 > 0$ .  
Déplacements radiaux, tous positifs  $\implies$  dilatation de petits segments azimutaux de matière.
- Direction axiale propre pour la valeur propre  $\epsilon_{zz} = 0$ .  
Mouvement dans les plans perpendiculaires à l'axe, aucun mouvement dans la direction  $z \implies$  petits segments axiaux de matière restent de longueur inchangée.

$$\epsilon_1 = \epsilon_{\theta\theta} = A + B/r^2, \quad \epsilon_2 = \epsilon_{zz} = 0, \quad \epsilon_3 = \epsilon_{rr} = A - B/r^2.$$

**6.2** Loi de Hooke,  $\mu > 0 \implies \forall i \in \{1,2,3\}, \sigma_i = 2\lambda A + 2\mu\epsilon_i$

$$\implies \sigma_1 = \sigma_{\theta\theta} = 2\lambda A + 2\mu(A + B/r^2), \quad \sigma_2 = \sigma_{zz} = 2\lambda A, \quad \sigma_3 = \sigma_{rr} = 2\lambda A + 2\mu(A - B/r^2)$$

$$\implies \tau_{\max} = \frac{2\mu B}{r^2}.$$

**6.3** Max  $\tau_{\max}(r)$  atteint en  $r = a$ , paroi la plus sollicitée  $\implies$

$$\boxed{\max \tau = \frac{\delta p}{1 - a^2/b^2}}.$$

- $\max \tau$  grande si  $a$  est petit : faible rayon intérieur  $\implies$  « concentre » les contraintes ;
- $\max \tau$  petite si  $b$  grand : grand rayon extérieur  $\implies$  meilleure répartition des contraintes, dans volume solide plus grand ;
- Tuyau très mince,  $b \rightarrow a^+ \implies$  danger !

7.1  $\delta p = 15,4$  MPa.

$$7.2 \quad \max \tau(b) = \frac{\delta p}{1 - a^2/b^2} \leq \tau_0 = 63,75 \text{ MPa} .$$

À l'égalité

$$b = \frac{a}{\sqrt{1 - \delta p/\tau_0}}$$

soit numériquement

$$b = 40,2 \text{ cm} \iff d = 5,2 \text{ cm}$$

8

$$A = 1,30 \cdot 10^{-4} \quad \text{et} \quad B = 0,476 \text{ cm}^2$$

Déplacement maximal atteint pour  $r = a$  ; hypothèse des petits déplacements justifiée.

$$9 \quad \left\| \overline{\nabla \mathbf{u}} \right\| \ll 1 \iff \left\| \overline{\boldsymbol{\epsilon}} \right\| \ll 1 \iff \epsilon_{rr} \ll 1 \quad \text{et} \quad \epsilon_{\theta\theta} \ll 1 ,$$

que l'on peut valider numériquement...

### Compléments

- Il est intéressant de faire l'hypothèse de petite épaisseur  $d$  ou  $e = b - a = \varepsilon a$  avec  $\varepsilon \ll 1$ . On trouve, à l'ordre le plus bas en  $\varepsilon$ ,

$$\max \tau = \frac{\delta p}{2\varepsilon} = \frac{\delta p a}{2e} , \quad (\text{D.5})$$

qui montre bien le danger d'une épaisseur trop faible. Une interprétation mécanique de cette formule est donnée par l'analyse de l'« *effet de voute* » correspondant, qui est proposée dans le problème suivant 4.5.

- Des effets thermiques existent, puisque même en « branche froide » l'eau du circuit primaire est, en régime nominal, à environ 290°C. Des effets « *thermoélastiques* » (dilatation du matériau due à la chaleur, etc...) sont donc à prendre en compte...
- Les valeurs des rayons intérieur et extérieur sont typiques du circuit primaire d'un réacteur à eau pressurisé français de 1300 MW électriques. Plus précisément, d'après des données transmises par Denis Buisine d'EdF, que je remercie, on a dans ces circuits, en branche froide,

$$a = 35 \text{ cm} \quad \text{et} \quad b = 41 \text{ cm} .$$

Le rayon extérieur est supérieur à celui calculé ici non pas tant à cause des effets thermiques évoqués ci-dessus, ni parce que la marge de sécurité vis-à-vis de la résistance à la surpression serait plus grande, mais plutôt parce que l'on prend en compte, pour le dimensionnement, des accidents éventuels, qui modifient notablement le fonctionnement des circuits et le type de sollicitations mécaniques qu'ils subissent.

**Problème 4.5** *Étude et dimensionnement de coques sous pression pour un sous-marin***I** *Étude et dimensionnement de la coque sphérique*

1  $\delta p = p_{\text{extérieure}} - p_{\text{intérieure}} \simeq \rho g H \simeq 1100$  bars, ce qui est considérable; sur une surface de  $1 \text{ m}^2$ , la force exercée est  $mg$  avec  $m \simeq 11000$  t.

$$2.a \quad \overline{\nabla \mathbf{u}} = u' \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + (u/r)(\bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\varphi).$$

2.b  $\overline{\nabla \mathbf{u}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ; sa partie antisymétrique et son rotationnel sont nuls.

3.a En différence entre la configuration initiale à la surface et la configuration actuelle au fond, comme le poids agit dans ces deux configurations, on n'a pas à l'inclure dans l'étude. Donc l'équation de Navier  $\iff \bar{\mathbf{0}} = (\lambda + 2\mu)\overline{\nabla \text{div} \mathbf{u}} \iff \text{div} \bar{\mathbf{u}} = 3A$ .

$$3.b \quad \boxed{u = Ar + B/r^2}.$$

$$4 \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = (A - 2B/r^3) \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + (A + B/r^3) (\bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\varphi).$$

$$5 \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = [(3\lambda + 2\mu)A - 4\mu B/r^3] \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + [(3\lambda + 2\mu)A + 2\mu B/r^3] (\bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\varphi).$$

$$6.a \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}(r=a) \cdot (-\bar{\mathbf{e}}_r) = \bar{\mathbf{0}} \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}(r=b) \cdot \bar{\mathbf{e}}_r = -\delta p \bar{\mathbf{e}}_r.$$

$$6.b \quad \boxed{A = -\frac{b^3}{b^3 - a^3} \frac{\delta p}{3\lambda + 2\mu}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = -\frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} \frac{\delta p}{4\mu}}.$$

$$A \equiv \frac{\ell^3 p}{\ell^3 p} \equiv 1 \quad \text{et} \quad B \equiv \frac{\ell^6 p}{\ell^3 p} \equiv \ell^3 \quad \text{en cohérence avec} \quad u = Ar + B/r^2 \equiv \ell.$$

$A < 0$  et  $B < 0 \implies$  la fonction déplacement radial  $u < 0$ : la coque sous pression extérieure, i.e., soumise à des forces surfaciques centripètes, a un mouvement centripète.

$$7.a \quad \sigma_1 = \sigma_{rr} = (3\lambda + 2\mu)A - 4\mu B/r^3, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = (3\lambda + 2\mu)A + 2\mu B/r^3$$

$$\implies \tau_{\max}(r) = \frac{3\mu|B|}{r^3} \quad \text{fonction décroiss. de } r \implies \text{max. en } r = a : \max \tau = \frac{3}{4} \frac{\delta p}{1 - a^3/b^3}.$$

7.b

$$\boxed{\max \tau \sim \frac{\delta p}{4\varepsilon} = \frac{\delta p a}{4 e}}. \quad (\text{D.6})$$

Proportionnalité  $/\delta p$  caractéristique d'une réponse linéaire. Il est physique, de plus, que  $\delta p \uparrow \implies$  matériau plus sollicité  $\iff \max \tau \uparrow$ .

Épaisseur relative  $\varepsilon \rightarrow 0 \implies \max \tau \rightarrow +\infty$ , la sollicitation mécanique du matériau devient extrême, car il doit supporter le passage de  $\delta p$  à 0 sur une très petite épaisseur.

7.c

$$\boxed{e = \frac{a \delta p}{4 \tau_{\text{lim}}} = 6,3 \text{ cm}}. \quad (\text{D.7})$$

- 8
- hypothèse de petits déplacements,  $u \ll a$  partout;
  - hypothèse de petite transformation,  $\|\overline{\nabla \mathbf{u}}\| \ll 1$  partout;
  - hypothèse de petite épaisseur,  $e \ll a$ .

## II Étude et dimensionnement d'une coque cylindrique

$$9 \quad \boxed{\sigma = -\frac{b^2}{b^2 - a^2} \delta p} \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma' = -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \delta p} .$$

10 Comme représenté figure D.3a, sur la couronne  $z = a$ , d'aire  $S = \pi(b^2 - a^2)$ , le vecteur contrainte exercé par le couvercle sur la coque

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_z = -F/S \bar{\mathbf{e}}_z \iff \sigma_{zz} = -F/S .$$

On a une situation symétrique sur la couronne  $z = -a$ , i.e.

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot (-\bar{\mathbf{e}}_z) = +F/S \bar{\mathbf{e}}_z \iff \sigma_{zz} = -F/S .$$

Au bilan  $\boxed{\sigma_{zz} = \sigma}$  .

11  $\sigma_1 = \sigma_{rr} = \sigma - \sigma'/r^2$  ,  $\sigma_2 = \sigma_{zz} = \sigma$  ,  $\sigma_3 = \sigma_{\theta\theta} = \sigma + \sigma'/r^2 \implies \tau_{\max}(r) = \frac{|\sigma'|}{r^2}$   
fonction décroissante de  $r \implies$  maximum en  $r = a$  :

$$\boxed{\max \tau = \frac{\delta p}{1 - a^2/b^2} \sim \frac{\delta p}{2\varepsilon} = \frac{\delta p a}{2 e}} \quad (\text{D.8})$$

d'où l'épaisseur de la coque cylindrique

$$\boxed{e_c = \frac{a \delta p}{2 \tau_{\text{lim}}} = 2e_s = 12,6 \text{ cm}} \quad (\text{D.9})$$

avec  $e_s$  l'épaisseur de la coque sphérique (D.7). **La coque cylindrique résiste moins bien à la pression que la coque sphérique**, puisqu'elle doit être **deux fois plus épaisse** pour assurer une protection identique. Choisir pour le sous-marin une coque cylindrique aurait requis **beaucoup plus d'acier** : le volume d'acier serait passé grosso modo, en oubliant les couvercles ce qui est défavorable, à

$$V_{\text{acier cylindrique}} \simeq \pi(b^2 - a^2) 2a \simeq 4\pi a^3 \varepsilon_c$$

avec  $\varepsilon_c = e_c/a$ , à comparer à

$$V_{\text{acier sphérique}} \simeq \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) \simeq 4\pi a^3 \varepsilon_s$$

avec  $\varepsilon_s = e_s/a = \varepsilon_c/2$ . Il aurait donc fallu doubler le volume d'acier, au moins, d'où un **surcoût** et surtout une **augmentation sensible de la masse de l'habitacle**

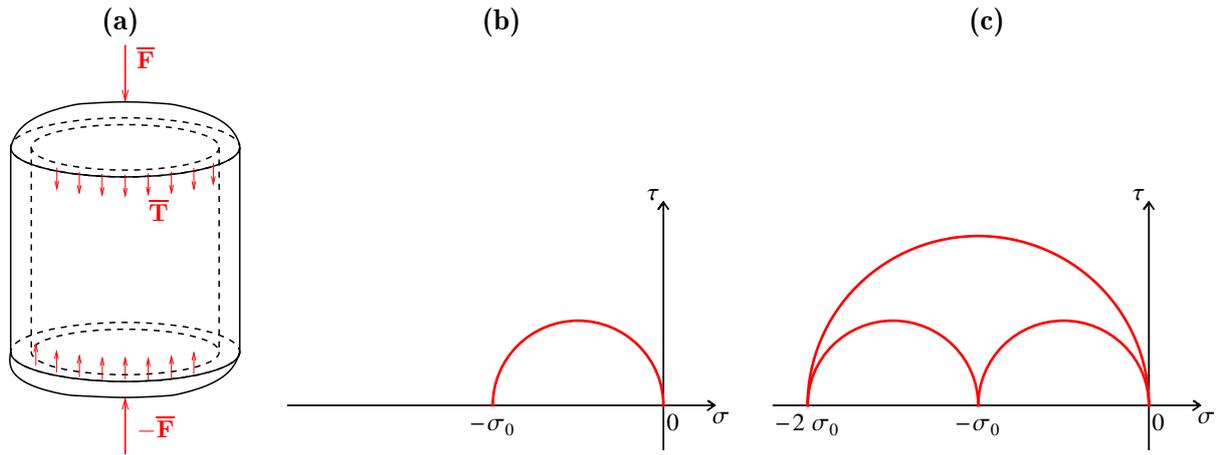
$$\delta m = \rho_{\text{acier}} (V_{\text{acier cylindrique}} - V_{\text{acier sphérique}}) \simeq \rho_{\text{acier}} 4\pi a^3 \varepsilon_s \simeq 1,9 \text{ t} .$$

Cela serait considérable, pour un petit sous-marin comme le *Deepsea Challenger* ; on comprend donc le choix d'une coque sphérique.

## III Comparaison analytique des deux géométries dans la limite de coques très minces

12.a Dans la *coque sphérique*,

$$\boxed{\sigma_{rr} \sim -\delta p r^*} \quad (\text{D.10})$$



**Fig. D.3** – Problème 4.5. **a** : en réponse à la question 10, schéma de la coque cylindrique étudiée, avec ses couvercles, les forces  $\bar{\mathbf{F}}$  et  $-\bar{\mathbf{F}}$  subies par ces couvercles à cause de l'eau extérieure, les vecteurs contraintes  $\bar{\mathbf{T}}$  sur les couronnes terminant la coque. **b** : en réponse à la question 12.a, cercles de Mohr du tenseur des contraintes dans une *coque sphérique* infiniment mince (D.12); ils sont dégénérés puisque l'opposé de  $\sigma_0 = \delta p / (2\varepsilon)$  est valeur propre double. **c** : en réponse à la question 12.b, cercles de Mohr du tenseur des contraintes dans une *coque cylindrique* infiniment mince (D.14).

qui exprime le passage de  $-\delta p$  en  $r^* = 1$  (frontière extérieure) à 0 en  $r^* = 0$  (frontière intérieure).

$$\boxed{\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} \sim -\frac{\delta p}{2\varepsilon}} \quad (\text{D.11})$$

À l'ordre dominant, on a donc, comme représenté figure D.3b,

$$\boxed{\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \sim -\frac{\delta p}{2\varepsilon} (\bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \bar{\mathbf{e}}_\varphi)} \quad (\text{D.12})$$

**12.b** Dans la coque *cylindrique*, la formule (D.10) est encore valable. De plus

$$\boxed{\sigma_{\theta\theta} \sim -\frac{\delta p}{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma_{zz} \sim -\frac{\delta p}{2\varepsilon}} \quad (\text{D.13})$$

À l'ordre dominant, on a donc

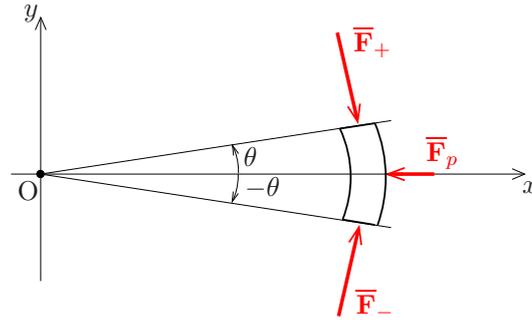
$$\boxed{\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \sim -\frac{\delta p}{\varepsilon} \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta - \frac{\delta p}{2\varepsilon} \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z}, \quad (\text{D.14})$$

d'où la représentation de la figure D.3c.

On visualise sur les figures D.3b et D.3c à la même échelle la supériorité de la coque sphérique, moins sollicitée en cisaillement à chargement égal / la coque cylindrique.

**13.a** Un petit élément de *coque cylindrique*, situé dans le secteur angulaire  $[-\theta, +\theta]$  avec  $\theta$  infinitésimal, et dans le domaine de coordonnée axiale  $[-z/2, z/2]$ , est représenté figure D.4. Les forces auxquelles il est soumis, dans le plan  $xOy$ , sont

- la force due à la surpression extérieure  $\bar{\mathbf{F}}_p = -\delta p a 2\theta z \bar{\mathbf{e}}_x$ ;



**Fig. D.4** – En réponse à la question 13.a du problème 4.5, équilibre d'un élément de coque cylindrique dans le plan  $xOy$ .

- la force due aux contraintes azimutales (D.13) sur la frontière en  $+\theta$ ,  $\bar{\mathbf{F}}_+ = -\sigma_0 e z \bar{\mathbf{e}}_\theta(+\theta)$  avec  $\sigma_0 = \delta p/\varepsilon$  ;
- la force due aux contraintes azimutales (D.13) sur la frontière en  $-\theta$ ,  $\bar{\mathbf{F}}_- = \sigma_0 e z \bar{\mathbf{e}}_\theta(-\theta)$  ;

on a noté

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{e}}_\theta(+\theta) &= -\sin\theta \bar{\mathbf{e}}_x + \cos\theta \bar{\mathbf{e}}_y \simeq -\theta \bar{\mathbf{e}}_x + \bar{\mathbf{e}}_y \\ \bar{\mathbf{e}}_\theta(-\theta) &= \sin\theta \bar{\mathbf{e}}_x + \cos\theta \bar{\mathbf{e}}_y \simeq \theta \bar{\mathbf{e}}_x + \bar{\mathbf{e}}_y\end{aligned}$$

les vecteurs azimutaux des bases locales en  $\theta$  et  $-\theta$ , qui donnent les directions normales aux frontières. Au bilan les composantes dans la direction  $x$  des forces  $\bar{\mathbf{F}}_+$  et  $\bar{\mathbf{F}}_-$  compensent bien la force extérieure  $\bar{\mathbf{F}}_p$ ,

$$\bar{\mathbf{F}}_+ + \bar{\mathbf{F}}_- \simeq 2 \frac{\delta p}{e/a} e z \bar{\mathbf{e}}_x = -\bar{\mathbf{F}}_p. \quad (\text{D.15})$$

On a un « *effet d'arche* », les contraintes azimutales élevées dans la coque cylindrique équilibrent la surpression extérieure, « de proche en proche ».

Dans la direction  $z$  perpendiculaire au plan de la figure D.4, on a simplement transmission « rectiligne » de la contrainte axiale  $\sigma_{zz} = -F/S$  avec les notations de la question 10, de proche en proche.

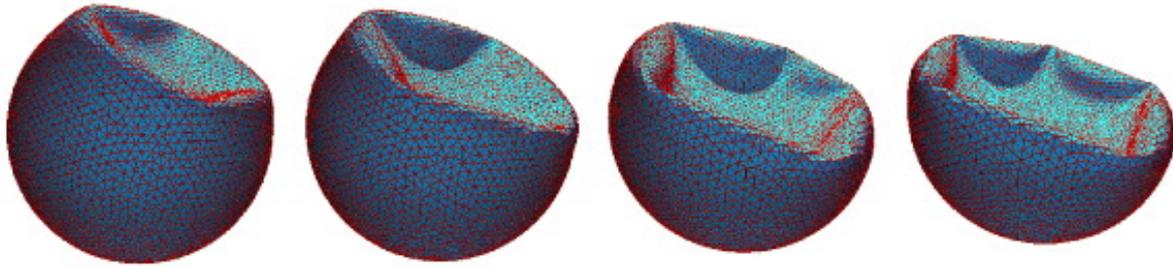
**13.b** Dans une *coque sphérique*, au contraire *l'effet d'arche existe dans les deux directions perpendiculaires  $\theta$  et  $\varphi$*  (on pourrait faire 2 figures analogues à la figure D.4, l'une dans la direction  $\theta$ , l'autre dans la direction  $\varphi$ ), en conséquence les contraintes correspondantes, nécessaires pour équilibrer la même surpression, sont moitié en valeur absolue,

$$|\sigma_{\theta\theta}| = |\sigma_{\varphi\varphi}| = \sigma_0/2 \quad (\text{D.16})$$

avec toujours  $\sigma_0 = \delta p/\varepsilon$ . Ceci explique la « *double efficacité* » de la *coque sphérique*, par rapport à la coque cylindrique.

### Compléments

- Consultez [la page Wikipedia sur le Deepsea Challenger](#), qui renvoie à un site web dédié. Vous y apprendrez que l'épaisseur de la coque sphérique est 6,35 cm, et que la masse totale du sous-marin est environ 12 t : le surcroît de masse de presque 2 t envisagé ci-dessus est donc proportionnellement très important...
- L'hypothèse de petite épaisseur n'est pas très bonne ici, et ne devrait pas être utilisée pour le dimensionnement. Elle a été choisie, cependant, pour obtenir des formules et des



**Fig. D.5** – Exemples de coquilles initialement sphériques ayant subi un « *flambement* » sous l’effet d’une compression ; calculs numériques de [Vliegenthart & Gompper \(2011\)](#).

tendances simples. Calculer  $e$  sans cette approximation n’est pas beaucoup plus compliqué (faites-le!)... Je dois d’ailleurs avouer avoir réglé la valeur de  $\pi_{\text{im}}$  pour obtenir l’épaisseur réelle de la coque avec un calcul en coque mince, ce qui est discutable...

- On peut s’interroger sur les hypothèses de la question 10, concernant les couvercles et leurs effets sur une coque cylindrique. La géométrie étudiée étant peu élancée (hauteur = diamètre), le principe de Saint Venant ne s’applique sûrement pas. De plus, les couvercles peuvent dans leurs plans se dilater sous l’effet de la surpression qu’ils subissent... Optimiser la forme et la conception d’une telle coque cylindrique avec couvercles est un problème difficile, qui ne peut être résolu précisément que numériquement.
- Le critère de dimensionnement utilisé ici a une certaine pertinence, mais il faut aussi prendre en compte des phénomènes plus compliqués possibles, comme un « *flambement* » des coques, qui peut les conduire à un *changement de forme* (plus ou moins) brutal, avec perte de la symétrie sphérique. Le calcul de ces phénomènes relevant des *instabilités* est beaucoup plus complexe, comme en témoigne l’existence d’une publication très récente sur ce sujet, à savoir l’article de [Vliegenthart & Gompper \(2011\)](#), dont la figure D.5 est tirée... On recommande aux lecteurs les plus curieux la consultation de cet article, en accès libre...

#### Problème 4.6 *Équilibre d’un disque en rotation rapide*

1  $\bar{\mathbf{f}}_e = \alpha r \bar{\mathbf{e}}_r$ , avec  $\alpha = \rho \omega^2$ , est une force *centrifuge* qui tend à éloigner la matière du disque de son axe de rotation, ce d’autant plus que l’on s’éloigne de l’axe.

2.1 Invariance par rotations autour de  $Oz$ .

2.2 Invariance par symétrie par rapport à n’importe quel plan passant par l’axe  $Oz$ .

3  $\sigma_{zz} = 0$  et  $\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = 0$ .

4.1

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

4.2

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} .$$

$$4.3 \quad \sigma_{r\theta} = 2\mu \epsilon_{r\theta} = 0 \implies \bar{\sigma} = \sigma_{rr}(r,z) \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + \sigma_{\theta\theta}(r,z) \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta .$$

5 Composante radiale :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \alpha r = 0 ,$$

soit une équation aux dérivées partielles linéaire non homogène.

$$6 \quad n = 3, \beta = (3 + \nu)\alpha .$$

7  $f$  vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$r \frac{d^2 f}{dr^2} + 3 \frac{df}{dr} + (3 + \nu)\alpha r = 0$$

d'ordre 2, linéaire, inhomogène.

Solution de l'équation homogène associée : avec  $F = df/dr$ ,

$$r \frac{dF}{dr} = -3F \iff F = A_1 r^{-3} \iff f = A r^{-2} + B ,$$

ces solutions constituent bien un espace vectoriel de dimension 2 ; ainsi  $m = 2$ .Solution particulière de l'équation complète : sous la forme d'un monôme  $f = \gamma r^2$ ,

$$\gamma = -\frac{3 + \nu}{8} \alpha .$$

8 Le domaine solide comprend en particulier l'axe  $r = 0$ .

$$9 \quad \delta = -\frac{1 + 3\nu}{8} \alpha .$$

10

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{3(\nu - 1)(\nu + 1)}{8E} \alpha r^2 + \frac{1 - \nu}{E} B(z) , \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{(\nu - 1)(\nu + 1)}{8E} \alpha r^2 + \frac{1 - \nu}{E} B(z) , \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\nu(1 + \nu)}{2E} \alpha r^2 - \frac{2\nu}{E} B(z) . \end{aligned}$$

11

$$u_r = r \epsilon_{\theta\theta} = \frac{(\nu - 1)(\nu + 1)}{8E} \alpha r^3 + \frac{1 - \nu}{E} r B(z) . \quad (\text{D.18})$$

12

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \epsilon_{zz} = \frac{\nu(1 + \nu)}{2E} \alpha r^2 - \frac{2\nu}{E} B(z) \implies u_z = \frac{\nu(1 + \nu)}{2E} \alpha r^2 z - \frac{2\nu}{E} B_1(z) + C(r) . \quad (\text{D.19})$$

$$13.1 \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1 - \nu}{E} r B'(z) + \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \alpha r z + C'(r) = 0$$

$$\implies \frac{1 - \nu}{E} r B''(z) + \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \alpha r = 0 \iff B''(z) = \frac{\nu(1 + \nu)}{\nu - 1} \alpha$$

$$\iff B(z) = \frac{\nu(1+\nu)}{2(\nu-1)} \alpha z^2 + b_1 z + b_0$$

$$\iff B_1(z) = \frac{\nu(1+\nu)}{6(\nu-1)} \alpha z^3 + \frac{1}{2} b_1 z^2 + b_0 z + b_{-1}.$$

$$13.2 \quad C(r) = \frac{\nu-1}{2E} b_1 r^2 + c_0.$$

$$14 \quad u_z = \frac{\nu(1+\nu)}{2E} \alpha r^2 z - \frac{\nu^2(1+\nu)}{3(\nu-1)E} \alpha z^3 - \frac{2\nu}{E} \left( \frac{1}{2} b_1 z^2 + b_0 z + b_{-1} \right) + \frac{\nu-1}{2E} b_1 r^2 + c_0$$

$$\implies u_z(r, z=0) = -\frac{2\nu}{E} b_{-1} + \frac{\nu-1}{2E} b_1 r^2 + c_0,$$

donc l'hypothèse de symétrie qui annule cette fonction de  $r$  se traduit notamment par  $b_1 = 0$ . Ainsi

$$B(z) = \frac{\nu(1+\nu)}{2(\nu-1)} \alpha z^2 + b_0.$$

**16.1**  $h \ll a \iff$  disque est très « plat » ou « élancé », d'« intérieur » éloigné de sa frontière latérale. *Principe de Saint Venant* : la solution approchée que nous allons obtenir avec la condition de frontière libre globale seulement est proche de la solution exacte dès que l'on s'éloigne de la frontière latérale i.e. à l'« intérieur » du disque.

**16.2**

$$\int_{z=-h}^h \sigma_{rr}(a, z) dz = 0 \iff b_0 = \frac{3+\nu}{8} \alpha a^2 - \frac{\nu(1+\nu)}{6(\nu-1)} \alpha h^2.$$

$$\iff \sigma_{rr} = \frac{3+\nu}{8} \alpha (a^2 - r^2) + \frac{\nu(1+\nu)}{2(\nu-1)} \alpha (z^2 - h^2/3). \quad (D.20)$$

**17**

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\alpha}{8} [(3+\nu)a^2 - (1+3\nu)r^2] + \frac{\nu(1+\nu)}{2(\nu-1)} \alpha (z^2 - h^2/3). \quad (D.21)$$

**18** À l'« intérieur » du disque  $r = Ra$  avec  $R$  un réel d'ordre 1,  $z = Zh$  avec  $Z \in [0,1]$ , ainsi

$$\sigma_{rr} = \frac{3+\nu}{8} \alpha a^2 (1 - R^2) + \frac{\nu(1+\nu)}{2(\nu-1)} \alpha h^2 (Z^2 - 1/3).$$

Comme  $\nu$  est un réel d'ordre 1,  $a^2 \gg h^2$ , le second terme de cette somme, d'ordre  $\alpha h^2$ , est bien négligeable devant le premier, d'ordre  $\alpha a^2$ .

Pour  $\sigma_{\theta\theta}$  : raisonnement similaire.

$$19.1 \quad \frac{\sigma_{rr}}{\alpha} = \frac{13}{32} (a^2 - r^2) \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\alpha} = \frac{1}{32} (13a^2 - 7r^2) \quad \text{d'où les graphes de la figure D.6.}$$

**19.2**  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta} > 0 \implies$  plus petite valeur propre de  $\bar{\sigma}$  est toujours  $\sigma_3 = 0$ .

$\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr} \implies$  plus grande valeur propre est toujours  $\sigma_1 = \sigma_{\theta\theta}$ .

Donc

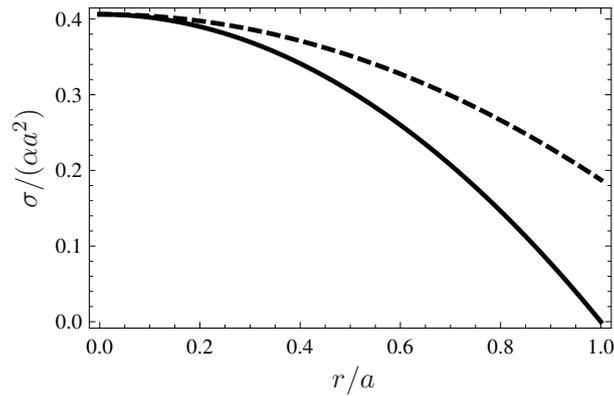
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2} = \frac{1}{64} \alpha (13a^2 - 7r^2),$$

maximale sur l'axe, valant alors

$$\tau_{\max} = \frac{13}{64} \rho \omega^2 a^2.$$

Critère de Tresca :

$$\tau_{\max} = \tau_{\lim} \iff \omega_{\lim} = \frac{8}{\sqrt{13}} \sqrt{\frac{\tau_{\lim}}{\rho}} \frac{1}{a}.$$



**Fig. D.6** – Dans le disque en rotation rapide du problème 4.6, profils des contraintes  $\sigma_{rr}/(\alpha a^2)$  en trait continu,  $\sigma_{\theta\theta}/(\alpha a^2)$  en trait pointillé, d’après le modèle de l’équation (4.83).

- $\rho \uparrow \Rightarrow \omega_{\text{lim}} \downarrow$  car dans un matériau plus dense les forces centrifuges sont plus intenses.
- $a \uparrow \Rightarrow \omega_{\text{lim}} \downarrow$  car si le disque est plus grand la valeur maximale des forces centrifuges est plus élevée.
- $\tau_{\text{lim}} \uparrow \Rightarrow \omega_{\text{lim}} \uparrow$  car si le matériau est plus résistant il supporte mieux les forces centrifuges.

**19.3**  $\omega_{\text{lim}} = 2480 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \simeq 23700 \frac{\text{tours}}{\text{min}}$  très élevée.

### Compléments

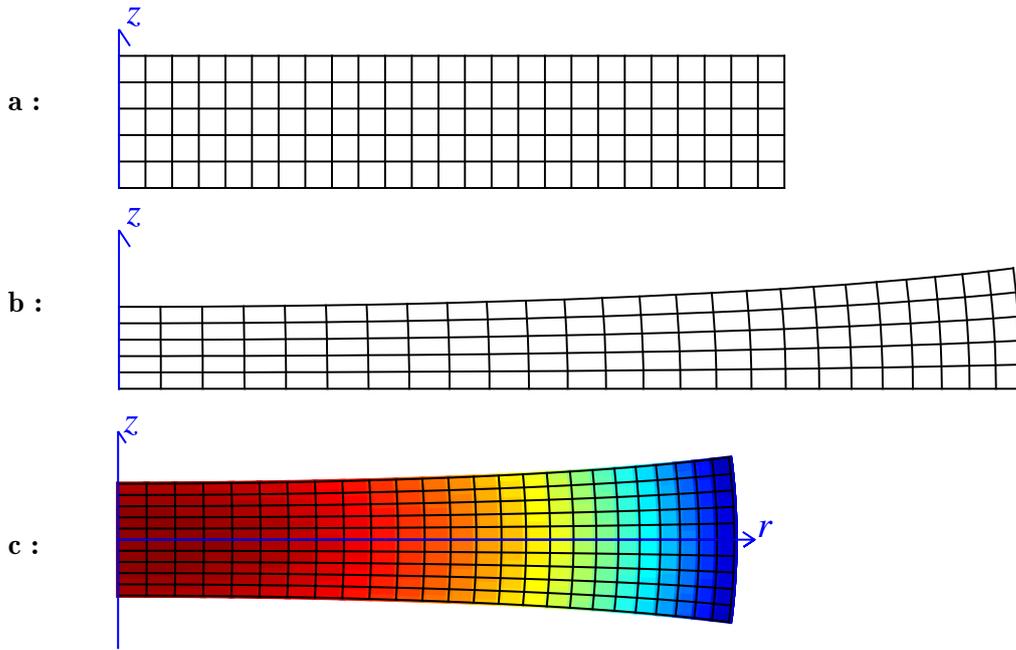
- Le fait que le disque soit le plus sollicité en son centre, sur son axe, est compréhensible : le disque est étiré par les forces centrifuges vers l’extérieur, dans toutes les directions radiales, c’est en son centre qu’il est le plus « tirailé » et « déformé ».
- Ce problème est tiré du chapitre 18 de [Forest & Amestoy \(2020\)](#), consacré aux machines tournantes, dont on recommande la lecture. Il présente une étude plus exhaustive, comprenant notamment une comparaison à des solutions numériques plus précises obtenues par éléments finis, pour tester le principe de Saint Venant. Il présente des figures du champ de déplacements, que l’on peut déduire immédiatement des équations (D.18) et (D.19) de ce corrigé, compte tenu aussi des résultats des questions 14 et 16 :

$$u_r = \frac{1-\nu}{8E} \alpha r [(3+\nu)a^2 - (1+\nu)r^2] + \frac{\nu(1+\nu)}{2E} \alpha r (h^2/3 - z^2), \quad (\text{D.22})$$

$$u_z = -\frac{\nu}{4E} \alpha [(3+\nu)a^2 - 2(1+\nu)r^2] z - \frac{\nu^2(1+\nu)}{3E(1-\nu)} \alpha (h^2 - z^2) z. \quad (\text{D.23})$$

Des représentations en section méridienne de la configuration de référence du disque et de la configuration actuelle du disque (déformée, avec des amplitudes exagérées) sont données sur les figures D.7a,b. On observe bien que la matière du disque est poussée vers l’extérieur, et que les déformations (donc les contraintes) sont maximales près de l’axe, ce que confirme le tracé du champ  $\tau_{\text{max}}(r,z)$  sur la figure D.7c (ce champ a été calculé en partant des expressions les plus « générales » D.20 et D.21 de  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$ ).

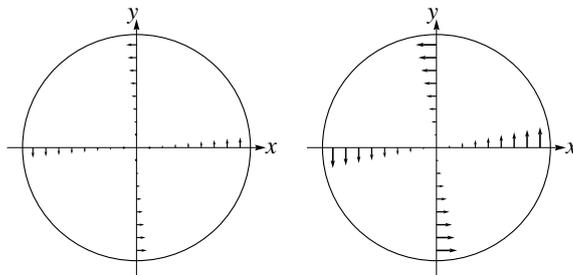
- Un exemple de machines tournantes très rapides est donné par les Moteurs Grandes Vitesses de General Electric Power Conversion, qui peuvent fonctionner jusqu’à 20000 tours/min, et servent à la liquéfaction continue de gaz naturel, en étant couplés à un compresseur.



**Fig. D.7** – Problème 4.6. Représentations d’un quart de section, dans le domaine  $x > 0, z > 0$ , d’un disque au repos (a) puis en rotation rapide (b), avec un maillage permettant un suivi lagrangien. c : Représentation d’une demie section, dans le domaine  $x > 0$ , du champ  $\tau_{\max}(r, z)$  avec des niveaux de couleurs, du bleu correspondant à des valeurs faibles au rouge correspondant à des valeurs élevées.

**Problème 4.7** *Poutres cylindriques fragiles sollicitées en traction-torsion*

**I.1** Dans section  $z = \text{constante}$ , mouvement plan de rotation autour de l’axe  $Oz$ , d’angle  $\alpha z$ , comme visible dans les sections  $z = L_1/2$  (à gauche) et  $z = L_1$  (à droite) ci-dessous :



Couple appliqué induit torsion dans le sens direct autour de  $Oz$  : **rotation différentielle de chaque section** doit se faire dans le sens direct, i.e.  $\alpha > 0$ .  $\alpha \equiv \ell^{-1}$ . Forme de déplacement pertinente car  $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{0}}$  dans le plan d’encastrement, mouvement de torsion lié au couple appliqué...

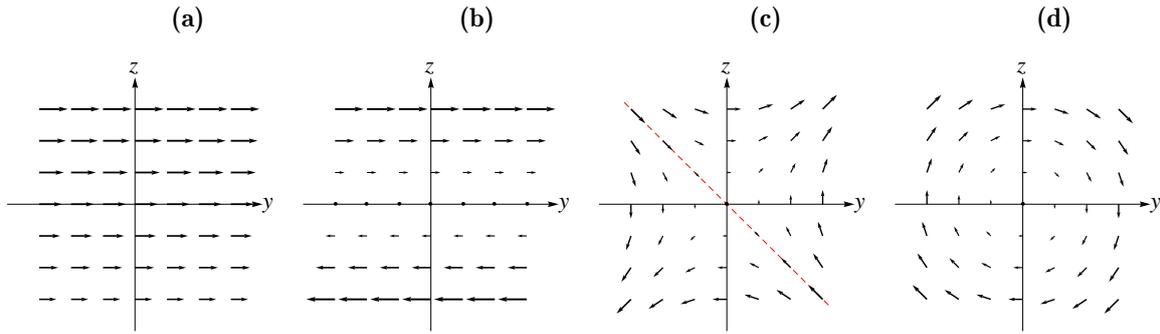
**I.2**  $\alpha a L_1 \ll a \iff \alpha L_1 \ll 1$ .

**I.3**  $\overline{\nabla \mathbf{u}} = \alpha z (\bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_r - \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta) + \alpha r \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_z$ .

**I.4** Identique à la condition de petits déplacements.

**I.5** Travail en différence entre configuration de référence et actuelle, poids déjà présent dans la configuration de référence  $\Rightarrow$  ne pas l’inclure dans la configuration actuelle. **Équation de Navier** :

$$\bar{\mathbf{0}} = (\lambda + 2\mu)\overline{\nabla \text{div} \mathbf{u}} - \mu \overline{\text{rot}(\text{rot} \mathbf{u})}$$



**Fig. D.8** – Problème 4.7. Représentation des champs  $\bar{\mathbf{u}}_{2D}$  (a),  $d\bar{\mathbf{u}}_{2D}$  (b),  $d\bar{\mathbf{u}}_{2D\text{déf}}$  (c),  $d\bar{\mathbf{u}}_{2D\text{rot}}$  (d). L'origine de l'axe des  $z$ , i.e., son intersection avec l'axe des  $y$ , est décalée : elle se trouve en  $z = L_0$ . Entre les figures a et b le champ  $d\bar{\mathbf{u}}_{2D}$  a été amplifié d'un facteur 5 ; ensuite les échelles des figures b, c et d sont identiques. En complément, on a représenté en pointillés sur la figure c la direction de coupe virtuelle subissant la traction maximale, qui va définir la direction de rupture fragile, cf. la partie II du problème.

vérifiée car

$$\text{div} \bar{\mathbf{u}} = \text{tr} \overline{\overline{\nabla}} \bar{\mathbf{u}} = 0$$

et

$$\overline{\text{rot}} \bar{\mathbf{u}} = -\alpha r \bar{\mathbf{e}}_r + 2\alpha z \bar{\mathbf{e}}_z \implies \overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{0}}.$$

$$\text{I.6 } \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} = \frac{1}{2} \alpha r (\bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_z + \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta).$$

$$\text{I.7 } \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = 2\mu \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}.$$

**I.8** Comme question I.5. En fait  $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_r = \bar{\mathbf{0}}$  partout...

**I.9 Saint Venant.**

**I.10** En  $z = L_1$ ,

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_z r dr d\theta = \bar{\mathbf{0}} \quad \text{et} \quad \int_0^a \int_0^{2\pi} r \bar{\mathbf{e}}_r \wedge \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_z r dr d\theta = \Gamma \bar{\mathbf{e}}_z.$$

$$\text{I.11 } \Gamma = \frac{\pi}{2} \mu a^4 \alpha.$$

**I.12**  $\alpha = 0,227 \text{ m}^{-1}$  ;  $\alpha L_1 = 0,045 \ll 1$  donc petits déplacements et petite transformation ; correspond à un angle de rotation de la section éloignée, en  $z = L_1$ , de 2,6 degrés seulement. Tenseur des contraintes à la périphérie de l'ordre de  $\tau = \mu \alpha a = 150 \text{ MPa}$  , ce qui est plutôt élevé.

**I.13** Valeurs propres et vecteurs propres de  $\bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}$  :

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \alpha r \quad \text{pour} \quad \bar{\mathbf{n}}_1 = \frac{\bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{2}}, \quad \epsilon_2 = 0 \quad \text{pour} \quad \bar{\mathbf{n}}_2 = \bar{\mathbf{e}}_r, \quad \epsilon_3 = -\frac{1}{2} \alpha r \quad \text{pour} \quad \bar{\mathbf{n}}_3 = \frac{\bar{\mathbf{e}}_\theta - \bar{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{2}}.$$

Valeurs propres non nulles  $\longleftrightarrow$  vecteurs du plan  $\theta z$  : justifie de projeter dans ce plan pour une étude fine. Au voisinage de  $\bar{\mathbf{x}} = a\bar{\mathbf{e}}_x + L_0\bar{\mathbf{e}}_z$ , comme  $\bar{\mathbf{e}}_r \simeq \bar{\mathbf{e}}_x$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_\theta \simeq \bar{\mathbf{e}}_y$  : plan  $\theta z = \text{plan } yz$ , et

$$d\bar{\mathbf{x}}_{2D} = a \bar{\mathbf{e}}_y d\theta + \bar{\mathbf{e}}_z dz = \bar{\mathbf{e}}_y dy + \bar{\mathbf{e}}_z dz$$

avec  $dy = a d\theta$ . Ainsi  $\bar{\mathbf{u}}$  peut s'approximer par [figure D.8a]

$$\bar{\mathbf{u}}_{2D} = \overline{\overline{\mathbf{P}}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = \alpha a (L_0 + dz) \bar{\mathbf{e}}_y$$

$$\implies d\bar{\mathbf{u}}_{2D} = \alpha a dz \bar{\mathbf{e}}_y ,$$

ce que l'on pouvait trouver en utilisant le gradient... Ce champ figure D.8b est analogue à un champ de *cisaillement pur*.

$$d\bar{\mathbf{u}}_{\text{déf}} = \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}_{2D} = \frac{1}{2} \alpha a (\bar{\mathbf{e}}_y \otimes \bar{\mathbf{e}}_z + \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_y) \cdot (\bar{\mathbf{e}}_y dy + \bar{\mathbf{e}}_z dz) = \frac{1}{2} \alpha a (\bar{\mathbf{e}}_y dz + \bar{\mathbf{e}}_z dy) = d\bar{\mathbf{u}}_{2D\text{déf}}$$

Ce champ figure D.8c correspond à un *étirement* dans la direction de la 1ère bissectrice, une *contraction* dans la direction de la 2ème bissectrice du plan  $yz$ .

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\boldsymbol{\Omega}}} = -\frac{1}{2}\alpha a \bar{\mathbf{e}}_x + \alpha L_0 \bar{\mathbf{e}}_z &\implies d\bar{\mathbf{u}}_{\text{rot}} = \bar{\bar{\boldsymbol{\Omega}}} \wedge d\bar{\mathbf{x}}_{2D} = -\alpha L_0 \bar{\mathbf{e}}_x dy + \frac{1}{2}\alpha a \bar{\mathbf{e}}_y dz - \frac{1}{2}\alpha a \bar{\mathbf{e}}_z dy \\ \implies d\bar{\mathbf{u}}_{2D\text{rot}} &= \frac{1}{2}\alpha a \bar{\mathbf{e}}_y dz - \frac{1}{2}\alpha a \bar{\mathbf{e}}_z dy . \end{aligned}$$

Ce champ figure D.8d correspond à une *rotation* autour de  $-\bar{\mathbf{e}}_x$ , d'un angle  $\frac{1}{2}\alpha a$ , associée au différentiel de rotation entre les sections  $z = L_0$  et  $z = L_0 + dz$ . On a

$$d\bar{\mathbf{u}}_{2D} = d\bar{\mathbf{u}}_{2D\text{déf}} + d\bar{\mathbf{u}}_{2D\text{rot}} ,$$

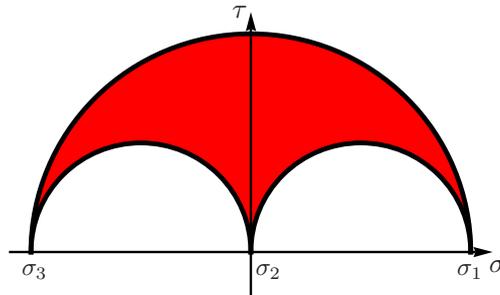
i.e. le mouvement local est la somme des *étirement*, *contraction* et *rotation* que nous venons de décrire.

II.1 Valeurs propres et vecteurs propres de  $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$  :

$$\sigma_1 = \tau_0 \quad \text{pour} \quad \bar{\mathbf{n}}_1 = \frac{\bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{2}} , \quad \sigma_2 = 0 \quad \text{pour} \quad \bar{\mathbf{n}}_2 = \bar{\mathbf{e}}_r , \quad \sigma_3 = -\tau_0 \quad \text{pour} \quad \bar{\mathbf{n}}_3 = \frac{\bar{\mathbf{e}}_\theta - \bar{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{2}}$$

avec  $\tau_0 = \mu \alpha r$ .

II.2



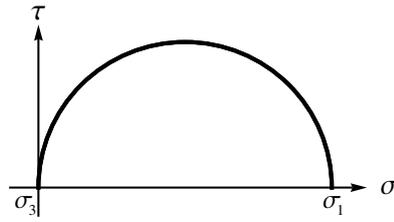
Contrainte normale positive maximale  $\sigma_t = \sigma_1 = \tau_0 = \mu \alpha r$ , normale associée

$$\bar{\mathbf{n}}_t = \bar{\mathbf{n}}_1 = \frac{\bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{2}} .$$

$$\text{II.4 } d\bar{\mathbf{x}} \perp \bar{\mathbf{n}}_t \iff d\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_t = 0 \iff a d\theta + dz = 0 \iff z = z_0 - a \theta$$

*hélice* dont le demi-pas serait  $\pi a$ , ce qui veut dire que lorsque l'on fait un demi tour sur la périphérie, la courbe de rupture « descend », dans la direction axiale, de 1,6 diamètre environ. Ce que l'on constate sur la craie la plus à droite et la fonte de la figure du sujet. Ce modèle est donc pertinent.

$$\text{III.1 } \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{F}{A} \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z, \text{ de valeurs propres } \sigma_1 = \sigma_0 = \frac{F}{A}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 .$$



Contrainte normale positive maximale  $\sigma_1 = \sigma_0$ , normale associée

$$\bar{\mathbf{n}}_1 = \bar{\mathbf{e}}_z .$$

$$d\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 = 0 \iff dz = 0 \iff z = z_0 \iff \text{cercle},$$

que l'on visualise sur la craie de gauche de la figure de l'énoncé.

**III.2** Élasticité *linéaire*  $\Rightarrow$  principe de superposition :

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \sigma_0 \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z + \tau_0 (\bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_z + \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta)$$

avec

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} \iff \text{traction}, \quad \tau_0 = \mu \alpha r = \frac{2\Gamma r}{\pi a^4} \iff \text{torsion}.$$

Plus grande valeur propre, positive,

$$\sigma_t = \frac{\sigma_0}{2} + \frac{\sqrt{\sigma_0^2 + 4\tau_0^2}}{2} .$$

Normale associée  $\bar{\mathbf{n}}_t$  vérifie

$$\tau_0 n_{tz} = \sigma_t n_{t\theta} .$$

$$d\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_t = 0 \iff a n_{t\theta} d\theta + n_{tz} dz = 0 \iff z = z_0 - \frac{n_{t\theta}}{n_{tz}} a\theta ;$$

on raisonne en présence de torsion, le cas de la traction pure ayant été réglé en III.1,  $\tau_0 > 0$  donc  $n_{t\theta} \neq 0$  et  $n_{tz} \neq 0$ . En introduisant le rapport des contraintes de traction sur contraintes de torsion

$$\rho = \frac{\sigma_0}{\tau_0} = \frac{Fa}{2\Gamma} ,$$

le demi-pas de l'hélice

$$p(\rho) = \frac{n_{t\theta}}{n_{tz}} a\pi = \frac{\tau_0}{\sigma_t} a\pi = \frac{2\pi a}{\rho + \sqrt{4 + \rho^2}} = \frac{\pi a}{\sqrt{1 + \rho^2/4} + \rho/2} .$$

Quand la traction domine,  $\rho \rightarrow +\infty$ ,  $p \rightarrow 0$ , soit le cas de la photo de gauche de la figure 4.10a de l'énoncé.

Quand la torsion augmente puis domine,  $\rho \rightarrow 0$ ,  $p$  augmente jusqu'à la valeur maximum  $p_{\max} = \pi a$  : évolution visible sur les photos de droite de la figure 4.10a de l'énoncé.

### Compléments

- On pourrait s'inquiéter de la tenue de l'acier étudié en question I.15, par rapport à un critère de Tresca, pertinent pour ce matériau ductile, et aux valeurs données dans le cours,

$$\tau_{\max} = \frac{170 \text{ MPa}}{2} = 85 \text{ MPa} .$$

Le fait est que des aciers plus performants sont utilisés pour ces applications automobiles, par exemple des aciers C32 (à 0,32% de carbone) qui font l'objet d'un traitement thermique. Leur limite élastique est bien supérieure, en cisaillement

$$\tau_{\max} \simeq \frac{600 \text{ MPa}}{2} \simeq 300 \text{ MPa} .$$

- Le modèle en hélice de la courbe de rupture établi par exemple question II.4,

$$z = z_0 - a \theta ,$$

n'est valable que sur un domaine angulaire d'extension strictement inférieure à  $2\pi$ . En effet, une fois qu'une « fissure » en hélice s'est créée, sous l'effet de la traction associée à la torsion, puis agrandie sur un domaine angulaire de « grande » extension  $2\pi - \delta\theta$  avec  $\delta\theta$  de l'ordre de  $\pi/4$ , l'état mécanique du système s'éloigne franchement de celui modélisé ici. La fin de la rupture se fait alors sur un « segment » pratiquement orienté dans la direction axiale, comme on le voit sur la figure 4.10b, dans le cas de la rupture de l'éprouvette en fonte.

**Problème 4.8 Ondes propagatives dans un solide élastique**

1 Hypothèses cinématiques : *petits déplacements* et *petite transformation*

+ hypothèse physique : solide *élastique* dans le régime *linéaire*

→ *problème d'élasticité linéarisé*.

2 Plans de phase donnés par  $kx - \omega t = \text{constante}$ . Entre  $t$  et  $t + dt$  un plan de phase s'est déplacé de  $dx = c dt$  défini par le fait que la phase est toujours la même,

$$d\phi = 0 \iff k dx - \omega dt = 0 \iff c = dx/dt = \omega/k.$$

3.1 Paramètres de contrôle :  $(\omega, \rho, E, \nu)$  ou  $(k, \rho, E, \nu) \implies c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \mathcal{F}(\nu)$ .

3.2  $\mathcal{F}(\nu) \simeq 1 \implies c \simeq 5100 \text{ m/s}$ .

4 En travaillant en *différence* par rapport à une configuration de référence où la pesanteur est déjà équilibrée, on élimine le terme de pesanteur → *équation de Navier*

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \bar{\nabla} \text{div} \bar{\mathbf{u}} + \mu \bar{\Delta} \bar{\mathbf{u}}.$$

5

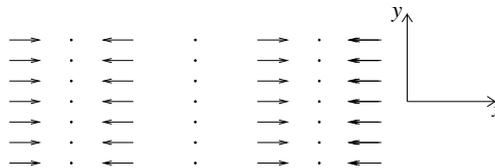
$$[L] = k^2 [M] \quad \text{avec} \quad [M] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

6

$$c^2 [U] = \rho^{-1} [M] \cdot [U] \quad \text{avec} \quad \rho^{-1} [M] = \rho^{-1} \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

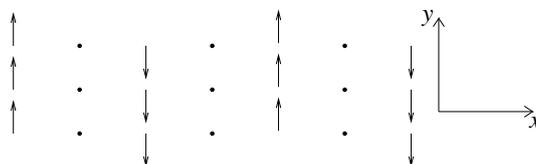
⇒  $c^2 = \text{valeur propre}$ ,  $[U] = \text{vecteur propre}$  de  $\rho^{-1} [M]$ .

6.1 Ondes caractérisées par  $u \neq 0, v = w = 0$ , pour lesquelles  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ; comme  $\bar{\mathbf{u}} = u \cos(kx - \omega t) \bar{\mathbf{e}}_x$  on a la représentation suivante (points représentent des positions où le vecteur déplacement est nul à l'instant considéré) :



Déplacements || direction de propagation ↔ *ondes longitudinales de contraction-dilatation*.

6.2 Ondes caractérisées par exemple par  $u = 0, v \neq 0$  ou  $w = 0$ , pour lesquelles  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ ; comme  $\bar{\mathbf{u}} = v \cos(kx - \omega t) \bar{\mathbf{e}}_y$  on a la représentation suivante :



Déplacements  $\perp$  direction de propagation. De plus, près des points où  $x = 0$  à  $t = \pi/(2\omega)$ , on a

$$\bar{\mathbf{u}} = v \cos(kx - \pi/2)\bar{\mathbf{e}}_y = v \sin(kx)\bar{\mathbf{e}}_y = v[kx + o(kx)]\bar{\mathbf{e}}_y$$

soit en première approximation un champ de déplacement de cisaillement pur  $\longleftrightarrow$  **ondes transversales de cisaillement**.

### 7.1 Onde longitudinale de *contraction-dilatation*

$$\rightarrow \rho(\bar{\mathbf{x}}, t) = \rho_0 [1 - \text{div}\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t)] = \rho_0 [1 + ku \sin(kx - \omega t)]$$

$\rightarrow$  plans périodiquement répartis dans lesquels on a, successivement dans l'espace, **contraction** puis **dilatation**.

### 7.2 Onde transversale de *cisaillement*

$$\rightarrow \rho(\bar{\mathbf{x}}, t) = \rho_0 [1 - \text{div}\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t)] = \rho_0$$

$\rightarrow$  **ni contraction ni dilatation**.

**8** Vitesses  $c_i$  ne dépendent pas de  $\omega$  (ou  $k$ ), mais seulement de la « polarisation » (composantes de  $\bar{\mathbf{u}}$  qui oscillent) et des paramètres du matériau  $\longleftrightarrow$  ondes **non dispersives**  $\longleftrightarrow$  **ondes sonores** dans les fluides.

Plus précisément, ondes sonores dans les fluides = ondes longitudinales de contraction-dilatation : seules les ondes du 1<sup>er</sup> type dans les solides élastiques sont vraiment analogues aux ondes sonores.

**9**  $c_1 = 5700$  m/s ,  $c_2 = 3200$  m/s , beaucoup plus élevées que la vitesse du son dans l'air, et de l'ordre de grandeur estimé par l'analyse dimensionnelle.

**10.1**  $c_1 \simeq 11$  km/s ,  $c_2 \simeq 6,0$  km/s .

**10.2** Comme  $\lambda$  et  $\mu > 0$  (résulte de ce que  $E$  et  $\nu > 0$ , et de ce que  $\nu < 1/2$ ), ondes du type 1 se propagent toujours plus vite qu'ondes du type 2. En cas de séisme, évènement violent qui excite a priori les deux types d'ondes, les ondes du type 1  $\longleftrightarrow$  ondes « Primaires » arrivent donc toujours avant les ondes du type 2  $\longleftrightarrow$  ondes « Secondaires ».

Temps mis par les ondes « P » pour aller de Los-Angeles à Nancy :

$$T = \frac{L}{c_1} \quad \text{avec} \quad L \simeq \|\bar{\mathbf{x}}_{\text{Nancy}} - \bar{\mathbf{x}}_{\text{Los-Angeles}}\|$$

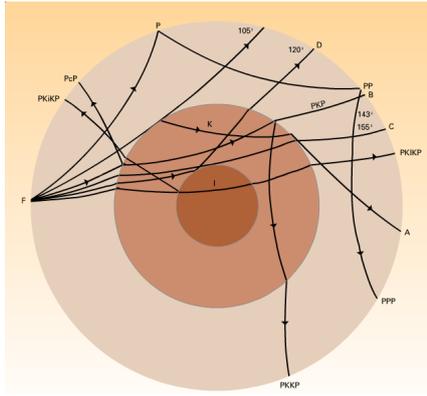
si on suppose une propagation rectiligne (raisonnable). En coordonnées géographiques,

$$\bar{\mathbf{x}}(\Phi \text{ latitude}, \Lambda \text{ longitude}) = a\{\cos(\Phi)[\cos(\Lambda)\bar{\mathbf{e}}_X + \sin(\Lambda)\bar{\mathbf{e}}_Y] + \sin(\Phi)\bar{\mathbf{e}}_Z\},$$

$a$  étant le rayon de la Terre

$$\rightarrow \bar{\mathbf{x}}_{\text{Nancy}} = a(0,665\bar{\mathbf{e}}_X + 0,0699\bar{\mathbf{e}}_Y + 0,743\bar{\mathbf{e}}_Z), \quad \bar{\mathbf{x}}_{\text{Los-Angeles}} = a(-0,389\bar{\mathbf{e}}_X - 0,732\bar{\mathbf{e}}_Y + 0,559\bar{\mathbf{e}}_Z)$$

$$\rightarrow L = 8600 \text{ km} \rightarrow T \simeq 13 \text{ minutes} .$$



Nomenclature :

	onde P	onde S
Manteau	P	S
Noyau liquide	K	
Graine solide	I	J

**Fig. D.9 – Gauche :** structure interne de la Terre mise en évidence par tomographie sismique (figure tirée de l'Encyclopædia Universalis 2005). De l'extérieur vers l'intérieur : manteau solide, noyau liquide puis graine solide. Les différents « chemins » suivis par différentes ondes émises à partir d'un « foyer sismique » F sont tracés. **Droite :** nomenclature des différents types d'ondes.

### Compléments

- Les ondes P sont bien l'analogue des ondes sonores dans les fluides<sup>2</sup>.
- On ne connaît pas a priori  $\rho$ ,  $\lambda$  et  $\mu$ , mais c'est à partir de *mesures sismiques de temps de parcours d'ondes* que l'on peut estimer ces paramètres, en inversant en quelque sorte

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{et} \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

la masse volumique étant estimée par une modélisation globale de l'équilibre de la Terre auto-gravitante.

- C'est l'objet de la *tomographie sismique* que de préciser par ces méthodes la structure interne de la Terre, qui n'est pas une boule homogène !.. On doit prendre en compte pour cela des phénomènes de *réflexions* & *réfractions* régies par des lois de type Snell-Descartes aux différentes interfaces entre le manteau, le noyau liquide et la graine intérieure solide, comme le montre la figure D.9.
- Les ondes S n'ont pas d'équivalent dans les fluides, où elles sont amorties à cause de la diffusion visqueuse<sup>2</sup>. C'est comme cela que la nature liquide du noyau a été mise en évidence.

## D.5 Corrigé du chapitre 5 -

### Analyse dimensionnelle appliquée aux solides

#### Problème 5.1 Étude de poutres en flexion plane

##### I Étude locale d'une portion de poutre en flexion

1.a  $\bar{\mathbf{F}} = C \bar{\mathbf{e}}_x \iint_{\Sigma_0} y \, dy \, dz = \bar{\mathbf{0}}$  puisque O est le centre de  $\Sigma_0$ .

1.b  $\bar{\mathbf{\Gamma}}(A') = C \iint_{\Sigma} (-Y \bar{\mathbf{e}}_z + Z \bar{\mathbf{e}}_y) Y \, dY \, dZ = \Gamma \bar{\mathbf{e}}_z \iff C = -\Gamma/I \quad \text{avec} \quad I = \iint_{\Sigma_0} y^2 \, dy \, dz.$

1.c  $I \equiv (F \ell)/(F \ell^{-3}) \equiv \ell^4.$

2. Voir par exemple le chapitre 3 de [Plaut \(2021b\)](#).

1.d  $I = \frac{4}{3}h^3e$ .

1.e  $I = \frac{\pi}{4}a^4$ .

2  $\bar{\epsilon} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \bar{e}_x \otimes \bar{e}_x - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} (\bar{e}_y \otimes \bar{e}_y + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z)$ .

3  $\alpha = \frac{C}{E}, \beta = -\frac{C}{2E}, \gamma = -\frac{\nu C}{2E}, \delta = \frac{\nu C}{2E}, \epsilon = -\frac{\nu C}{E}$ .

4.a  $v(X) = \frac{\Gamma}{2EI}X^2$ .

4.b En changeant  $\Gamma$  en  $-\Gamma, v = -\frac{3\Gamma}{8Eh^3e}X^2$ .

4.c Le *coefficient de rigidité*

$$\boxed{K = EI} \tag{D.24}$$

donc l'*équation d'Euler - Bernoulli* s'écrit

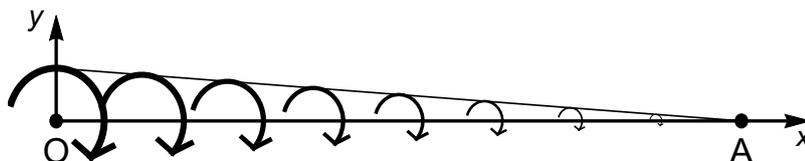
$$\boxed{\frac{d^2v}{dX^2} = \frac{\Gamma}{EI}} \tag{D.25}$$

- $\Gamma$  est le couple, chargement mécanique cause de la déformation et des déplacements de la poutre ; en élasticité linéaire, il est normal que l'« effet produit »  $v''(X)$  soit linéairement proportionnel à  $\Gamma$  ; de plus  $\Gamma > 0$  comme représenté sur la figure du sujet induit une fibre moyenne déformée convexe, on a bien  $\Gamma > 0 \Rightarrow v''(X) > 0$ .
- $E$  mesure la rigidité du matériau constituant la poutre, il est normal que quand  $E$  augmente la dérivée seconde des déplacements diminue.
- Plus le moment quadratique  $I$  est élevé plus la poutre est chargée en matière et de section droite large, il est normal que quand  $I$  augmente la dérivée seconde des déplacements diminue : on déforme plus facilement une poutre mince qu'une poutre épaisse, toutes choses étant égales par ailleurs.

**II Étude globale d'une poutre supportant une charge**

5  $\Gamma(x) = F(x - L)$ , cf. la figure D.10. Le couple augmente avec la distance au point A... Il tend bien à déformer la poutre dans la direction de  $-\bar{e}_y$  ...

6  $v(x) = \frac{F}{K} \left( \frac{x^3}{6} - L \frac{x^2}{2} \right) = -\frac{F}{6K} x^2 (3L - x)$ .



**Fig. D.10** – Représentation du couple  $\bar{\Gamma}(x)$  en fonction de la distance  $x$  à la racine de la poutre supportant une charge étudiée dans la partie II du problème 5.1. La taille et l'épaisseur du trait de chaque flèche sont proportionnels à la valeur de  $|\Gamma(x)|$  pour  $x$  au centre de la flèche. La courbe en trait fin est celle de la fonction  $|\Gamma(x)|$ .

7

$$v_{\max} = \max_x |v(x)| = |v(L)| = \frac{FL^3}{3K} = \frac{FL^3}{3EI} .$$

- $v_{\max} \propto F$  car  $F$  est la source de la flexion.
- $v_{\max} \propto L^3$  car plus la poutre est longue, plus les bras de levier dans les couples augmentent.
- $E$  mesure la rigidité du matériau constituant la poutre, il est normal que quand  $E$  augmente les déplacements diminuent.
- Plus le moment quadratique  $I$  est élevé plus la poutre est chargée en matière et de section droite large, il est normal que quand  $I$  augmente les déplacements diminuent.

8.1 & 2  $v_{\max} = 45 \text{ cm} .$ 

8.3 Cf. la figure D.11. On observe bien des déplacements dans la direction de  $\bar{\mathbf{F}}$ , i.e., de  $-\bar{\mathbf{e}}_y$ , maximaux en valeur absolue pour  $x = L$ . Comme

$$\frac{v_{\max}}{L} = 15\% ,$$

l'hypothèse de petits déplacements n'est pas bien vérifiée, mais encore, grosso modo, acceptable.

9  $\bar{\mathbf{T}} = -\frac{\Gamma y}{I} \bar{\mathbf{e}}_x = \frac{F(L-x)y}{I} \bar{\mathbf{e}}_x$ , cf. la figure D.12.

Dans la partie  $y > 0$  de la poutre en flexion on est étiré donc en *traction*, alors que dans la partie  $y < 0$  de la poutre en flexion on est contracté donc en *compression*...

10 Localement

$$\max \tau = F |L-x| |y| / (2I) .$$

Maximum par rapport à  $x$  atteint en  $x = 0$ , maximum par rapport à  $y$  atteint en  $y = \pm h$  :

$$\tau_{\max} = \frac{F L h}{2I} = 4,5 \text{ MPa} .$$

On est dans une *situation « saine » très éloignée de la limite d'élasticité*...

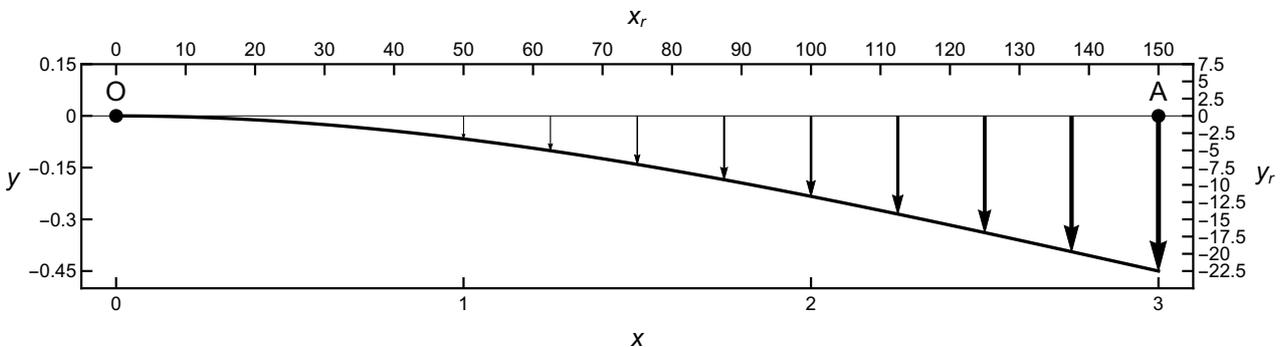
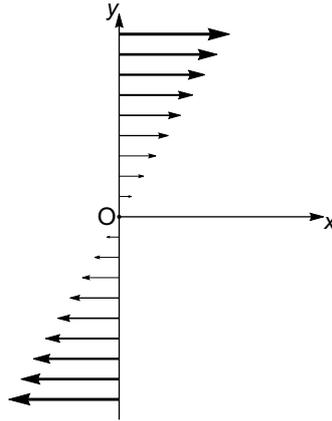


Fig. D.11 – Pour la poutre déjà représentée figure D.10, schéma à l'échelle  $1/20^{\text{ème}}$  de la fibre moyenne déformée et de son champ de déplacement. La taille et l'épaisseur du trait de chaque flèche sont proportionnels à la valeur de  $|v(x)|$  pour  $x$  correspondant à l'origine de la flèche. Les coordonnées  $x$  et  $y$  sont en m,  $x_r$  et  $y_r$  en mm.



**Fig. D.12** – Allure du champ de vecteurs contraintes  $\bar{\mathbf{T}}$  sur une coupe virtuelle droite de la poutre chargée représentée sur la figure D.11. La taille et l'épaisseur du trait de chaque flèche sont proportionnels à la valeur de  $\|\bar{\mathbf{T}}\|$  pour  $y$  correspondant à l'origine de la flèche.

### III Étude globale d'une poutre en flambement : théorie d'Euler

**11**  $\bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{T}}(M) = -Fv\bar{\mathbf{e}}_z$ .

**12.a**  $v''(x) = -\omega^2 v(x)$  avec  $\omega = \sqrt{F/(EI)}$ .

**12.b**  $F_1 = (\pi/L)^2 EI$ ; comme  $F_n$  est une fonction strictement croissante de  $n$ , le minimum

$$\boxed{F_c = F_1 = \pi^2 \frac{EI}{L^2}} \quad (\text{D.26})$$

**12.c**  $F_c = \frac{\pi^3 E d^4}{64 L^2}$ .

**13** Si on ne tenait compte que des contraintes dues au moment de flexion, on aurait sur la coupe un champ de vecteurs contraintes

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{e}}_x = +(Fv(L/2)Y/I)\bar{\mathbf{e}}_x,$$

avec  $Y$  l'ordonnée mesurée par rapport au centre de la coupe, comme représenté sur la figure D.13a. La partie supérieure de la poutre est en extension donc tirée par la partie aval, la inférieure de la poutre est en contraction donc comprimée par la partie aval.

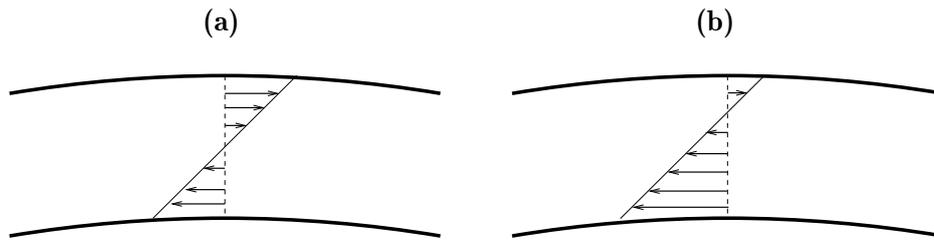
Pour être plus précis, on peut aussi tenir compte de la force  $\bar{\mathbf{F}}$  appliquée en A, qui induit une contrainte de compression dans toute la poutre, contrainte que l'on peut supposer en 1<sup>ère</sup> approximation homogène : en notant  $S$  l'aire d'une section droite, le vecteur contrainte correspondant

$$\bar{\mathbf{T}}' = \bar{\mathbf{F}}/S = -(F/S)\bar{\mathbf{e}}_x.$$

Au total

$$\bar{\mathbf{T}} + \bar{\mathbf{T}}' = F(v(L/2)Y/I - 1/S)\bar{\mathbf{e}}_x$$

comme représenté sur la figure D.13b.



**Fig. D.13** – Problème 5.1. Champ de vecteurs contraintes sur une section d'une poutre en flambement, (a) sans prendre en compte l'effort de compression (b) en prenant en compte l'effort de compression.

### Compléments

- L'approche utilisée ici est typique de la « *résistance des matériaux* » ou « *théorie des poutres* ».

Dans le langage technique de ces disciplines, on appelle plutôt

- le couple de flexion  $\bar{\Gamma} = \Gamma \bar{\mathbf{e}}_z$  un « *moment de flexion* » ou « *moment fléchissant* »,
- une force  $\bar{\mathbf{F}} = F \bar{\mathbf{e}}_x$  avec  $F > 0$  un « *effort de traction* »,
- une force  $\bar{\mathbf{F}} = -F \bar{\mathbf{e}}_x$  avec  $F < 0$  un « *effort de compression* »,
- une force  $\bar{\mathbf{F}} = F \bar{\mathbf{e}}_y$  un « *effort tranchant* ».

Comme  $y$  et  $z$  jouent des rôles similaires de direction de coordonnées perpendiculaires à la direction  $x$  axe de la poutre, un couple  $\bar{\Gamma} = \Gamma \bar{\mathbf{e}}_y$  est aussi un « *moment de flexion* », il induirait un mouvement dans le plan  $xOz$ .

De même on pourrait envisager un « *effort tranchant* »  $\bar{\mathbf{F}} = F \bar{\mathbf{e}}_z$ .

En « *résistance des matériaux* » ou « *théorie des poutres* », on modélise la réponse du système à chaque type de sollicitation énuméré ci-dessus, en y rajoutant aussi, éventuellement, un « *moment de torsion* »  $\bar{\Gamma} = \Gamma \bar{\mathbf{e}}_x$ , et on utilise le principe de superposition pour obtenir la réponse à des sollicitations combinées.

Dans ce problème on a déjà traité de l'influence de moments de flexion ; celle d'un moment de torsion a été abordée, de façon peu générale cependant, dans le problème 4.7 *Poutres cylindriques fragiles sollicitées en traction-torsion...*

- L'application numérique concernant le plongeur est pertinente, même si on est à la limite des approximations de poutre élancée et petits déplacements. De plus, pour des matériaux polymère, le critère de Tresca n'est pas très adapté, il faudrait mieux utiliser des critères plus sophistiqués spécifiques...

## D.6 Corrigés du chapitre 6 - Énergie cinétique

**Problème 6.1** *Étude d'un lopin cylindrique en compression dans un conteneur rigide*

1.1  $z = h_0 - Vt.$

1.2 Symétrie cylindrique, cohérence avec les conditions limites en déplacement, possibilité de glissement aux parois ne frottant pas...

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = -\frac{Vt}{h_0}.$$

1.3  $t \ll h_0/V.$

1.4  $\overline{\nabla \mathbf{u}} = -\frac{Vt}{h_0} \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z$  indépendant de  $\bar{\mathbf{X}} \longleftrightarrow$  transformation *homogène*.

On est aussi en *petite transformation*,  $\|\overline{\nabla \mathbf{u}}\| \ll 1.$

1.5 Hypothèse de *linéarité*  $\implies \bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{Vt}{h_0} [\lambda (\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta) + (\lambda + 2\mu) \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z] \dots$

1.6  $\bar{\mathbf{F}}_{\text{presse}} = -S \frac{Vt}{h_0} (\lambda + 2\mu) \bar{\mathbf{e}}_z.$

1.7  $E_p = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \frac{S}{h_0} (Vt)^2, \quad E_c = \text{constante} \dots$

2 Oscillations ou « vibrations »...

### Problème 6.2

*Thermoélasticité - Application à un tuyau sous pression et chargement thermique*

1.1

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \alpha \delta T \bar{\mathbf{1}} \implies \boxed{\frac{dx - dX}{dX} = \alpha \delta T > 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d^3x - d^3X}{d^3X} = J - 1 = 3\alpha \delta T > 0}.$$

1.2 On peut supposer que

$$\bar{\mathbf{u}} = \alpha \delta T \bar{\mathbf{X}} \quad \text{donc} \quad \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{u}} = (1 + \alpha \delta T) \bar{\mathbf{X}},$$

soit une *homothétie* de rapport  $1 + \alpha \delta T$ . On a donc pour les longueurs

$$\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \alpha \delta T,$$

et pour les volumes

$$\frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_0}{\mathcal{V}_0} = (1 + \alpha \delta T)^3 - 1 \simeq 3\alpha \delta T,$$

d'où la possibilité de *mesures expérimentales*...

1.3

$$\boxed{k = (3\lambda + 2\mu)\alpha}$$

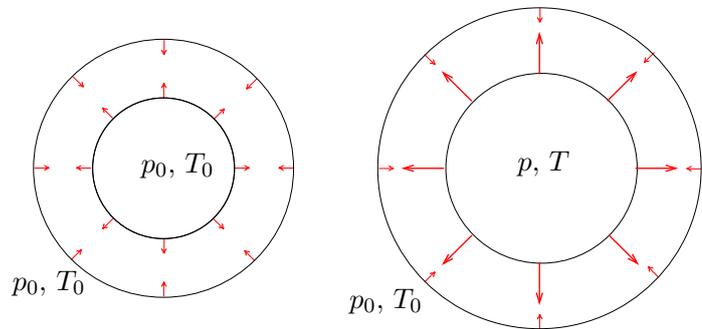
- $k > 0$ .
- $\lambda$  et  $\mu \uparrow \implies k \uparrow \dots$
- $\alpha \uparrow \implies k \uparrow \dots$

2

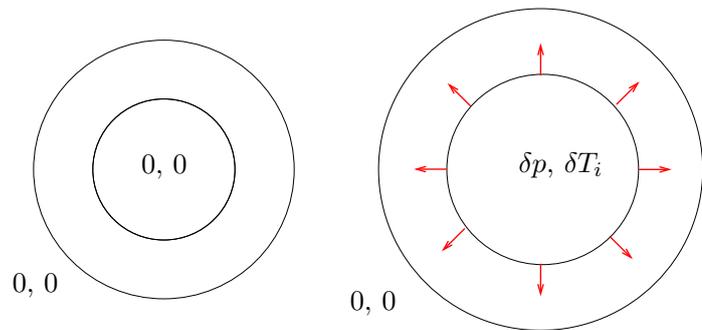
$$\bar{\mathbf{0}} = (\lambda + 2\mu)\bar{\nabla}\text{div } \bar{\mathbf{u}} - \mu \overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \bar{\mathbf{u}}) - k \bar{\nabla}T .$$

Nouvelle *force effective volumique* d'origine thermique  $\bar{\mathbf{f}}_{\text{thermique}} = -k \bar{\nabla}T$  qui « pousse » vers certaines régions...

3.1 1<sup>er</sup> schéma : configurations initiale et actuelle ainsi que les conditions limites concernant les vecteurs contraintes (en rouge) et températures :



2<sup>ème</sup> schéma : configuration initiale non chargée et configuration actuelle chargée en différence par rapport à celle-ci :



$$\delta p = 154 \text{ bars} \quad \text{et} \quad \delta T_i = 260 \text{ K} .$$

3.2 Les effets thermiques jouent dans le même sens que l'effet de la surpression...

4

$$\gamma = \frac{\delta T_i}{b-a} \quad \text{et} \quad \beta = \gamma b = \frac{\delta T_i b}{b-a} .$$

5.1  $\overline{\overline{\nabla}}\bar{\mathbf{u}} = u' \bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_r + (u/r) \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta$  est diagonal donc symétrique...

5.2

$$\boxed{n = 2} \quad \text{et} \quad \boxed{C = \frac{3\lambda + 2\mu}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{\alpha \delta T_i}{b - a}} .$$

6.1

$$\boxed{[\epsilon] = \text{Mat}(\bar{\bar{\epsilon}}, \{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\}) = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\epsilon_{rr} = A - B/r^2 - 2Cr, \quad \epsilon_{\theta\theta} = A + B/r^2 - Cr} .$$

6.2  $\text{tr} \bar{\bar{\epsilon}} = 2A - 3Cr$  ce qui n'est pas une surprise !..

7

$$\boxed{[\sigma] = \text{Mat}(\bar{\bar{\sigma}}, \{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\}) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}}$$

avec notamment

$$\sigma_{rr} = \lambda (2A - 3Cr) + 2\mu (A - B/r^2 - 2Cr) - k \delta T$$

$$\boxed{\sigma_{rr} = 2(\lambda + \mu)A - \beta k - \frac{2\mu B}{r^2} + (\gamma k - (3\lambda + 4\mu)C)r} .$$

8 Exprimer les *conditions limites en contrainte*, qui donnent dans le cas *cas isotherme*

$$\boxed{A_{\text{iso}} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{\delta p}{\lambda + \mu}} \quad \text{et} \quad \boxed{B_{\text{iso}} = \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{\delta p}{\mu}} .$$

- On retrouve bien l'expression de l'équation (4) du sujet.
- Les constantes  $A_{\text{iso}}$  et  $B_{\text{iso}}$  sont, si  $b$  n'est pas trop proche de  $a$ , de l'ordre de  $\delta p/E$ , ce qui est typique d'une réponse élastique.
- Par contre si  $b \rightarrow a$  les constantes  $A_{\text{iso}}$  et  $B_{\text{iso}}$  divergent : c'est d'une certaine manière le problème du dimensionnement que de limiter de façon optimale ces constantes.

9.1

$$\sigma_{rr} = \underbrace{2(\lambda + \mu)A - \frac{2\mu B}{r^2}}_{\sigma_{\text{élast}}} - \underbrace{(k \delta T + (3\lambda + 4\mu)Cr)}_{\sigma_{\text{therm}}} .$$

La contrainte d'origine thermique  $\sigma_{\text{therm}}$  est partout négative, ce qui confirme l'analyse physique déjà faite.

9.2 Comme

$$\text{ODG}(\sigma_{\text{élast}}) \simeq 15,4 \text{ MPa} , \quad \text{ODG}(\sigma_{\text{therm}}) \simeq 8000 \text{ MPa}$$

on est dans la 2<sup>ème</sup> possibilité de l'énoncé :

les effets thermiques sont importants et doivent être considérés pour le dimensionnement.

## Compléments

- D'un point de vue purement *mécanique* le focus sur  $\sigma_{rr}$  effectué à partir de la question 7, pour des raisons de simplicité, est néanmoins critiquable. En effet, dans le cas isotherme traité dans le problème 4.4, on peut se convaincre de ce que  $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$ , en cohérence avec l'« *effet d'arche* » ou de « *voute* » analysé plus finement dans le problème 4.5.
- Il serait intéressant de mener les calculs analytiques de dimensionnement jusqu'au bout, à l'aide éventuellement d'un logiciel de calcul formel comme Mathematica ou Maxima.
- Au niveau des hypothèses posées, on vérifie facilement que les déformations d'origine thermique restent petites i.e. compatibles avec une *petite transformation* :  
 $\alpha \delta T_i \simeq 10^{-5} 260 \simeq 2,6 10^{-3} \ll 1$ .
- La *thermique* de ce système mériterait d'être étudiée de façon plus rigoureuse. On peut déjà remarquer que le champ de température  $T$ , qui est une mesure de l'énergie interne, doit satisfaire l'équation dite *de la chaleur*. En 1<sup>ère</sup> approximation celle ci s'écrit

$$\operatorname{div} \bar{\nabla} T = 0 \iff \Delta T = 0,$$

ce qui, compte tenu de la symétrie cylindrique du problème, conduit à un profil de température de forme analytique plus compliquée, en  $\ln(b/r)/\ln(b/a)$ . Les calculs analytiques thermoélastiques sont alors encore plus compliqués que ce qui a été esquissé dans ce problème. On peut cependant vérifier que si  $a$  et  $b$  sont « proches » ce profil reste approximativement « linéaire » i.e. une loi en  $\beta - \gamma r$  est probablement pertinente.

Il serait cependant intéressant de résoudre complètement le problème complet avec ce modèle, car c'est la dérivée par rapport à  $r$  de la température qui intervient.

- Pour terminer sur la *thermique*, l'idée que  $T = 290^\circ\text{C}$  dans toute l'eau,  $30^\circ\text{C}$  dans tout le bâtiment réacteur et tout le temps est simpliste, en réalité il faut distinguer les branches « chaudes » et « froides » du circuit primaire, selon que l'on sort du réacteur ou des générateurs de vapeur où la chaleur a été transmise au circuit secondaire, tandis que le bâtiment réacteur s'échauffe au cours du temps, malgré les systèmes d'aération existant ; la température de son atmosphère peut monter jusqu'à  $50^\circ\text{C}$  voire plus...

## D.7 Corrigés du chapitre 7 - Fluides newtoniens

## Exercice 7.1 Bilan de force général en hydro- ou aérostatique

Formule intégrale de la divergence appliquée à  $\bar{\mathbf{T}} = p_0 \bar{\mathbf{1}}$

$$\implies \iint_{\partial\Omega_t} -p_0 \bar{\mathbf{n}} d^2S = \bar{\mathbf{0}}.$$

Formule intégrale de la divergence appliquée à  $\bar{\mathbf{T}} = \rho g z \bar{\mathbf{1}}$ , et calcul tensoriel, qui donne notamment  $\operatorname{div} \bar{\mathbf{T}} = \bar{\nabla} \rho g z = -\rho \bar{\mathbf{g}}$

$$\implies \iint_{\partial\Omega_t} \rho g z \bar{\mathbf{n}} d^2S = -m_{\text{fluide}} \bar{\mathbf{g}} = \text{poussée d'Archimède.}$$

**Exercice 7.2** *Calcul très simplifié de l'altitude atteinte par un ballon d'hélium lesté*

$$1 \quad \rho_{\text{He}} = M_{\text{He}} p_0 / (RT_0) = 0,17 \text{ kg/m}^3; \quad V = 4\pi a^3/3; \quad m_{\text{He}} = \rho_{\text{He}} V = 45 \text{ t}.$$

$$2 \quad m\gamma = \underbrace{F_A}_{\text{poussée d'Archimède}} - \underbrace{P}_{\text{poids}} = m_{\text{air}}g - mg = [(\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{He}})V - m_s]g.$$

$$z \uparrow \implies \rho_{\text{air}} \downarrow \implies \gamma \downarrow.$$

$$3.a \quad \rho_{\text{air}} = \rho_{\text{He}} + m_s/V = 0,18 \text{ kg/m}^3.$$

$$3.b \quad z_m \simeq 16 \text{ km}.$$

**Commentaires physiques et compléments**

- Ce modèle est grossier. Plusieurs phénomènes ne sont pas pris en compte, notamment, une dilatation du ballon, dont l'enveloppe est souple, sous l'effet de la diminution de la pression extérieure. Alors la masse d'air déplacée  $m_{\text{air}}$  augmente, d'où une augmentation de la poussée d'Archimède donc de l'accélération. De tels effets relevant des ***couplages fluide-structure*** seraient difficiles à modéliser : il faudrait développer un modèle d'évolution des conditions à l'intérieur du ballon (refroidissement et chute de pression, en présence de thermoconvection) et le coupler à un modèle de dilatation de la membrane, très souple donc travaillant en grands déplacements - grandes déformations...
- De fait en réalité Félix est monté bien plus haut que ce que prédit notre modèle, jusque  $z_m^{\text{réel}} = 39 \text{ km}$ ; seul l'ordre de grandeur de  $z_m$  prédit par notre modèle est correct.

**Exercice 7.3** *Hydrostatique : étude de deux manomètres différentiels*

$$1.1 \quad h_1 = \delta p / (\rho g).$$

$$1.2 \quad h_1 = 5,1 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm} \implies \text{erreur relative sur } \delta p \text{ de } 10\%.$$

$$2.1 \quad h_2 = h_1 / (\rho_\ell / \rho - 1).$$

$$2.2 \quad h_2 = 510 \text{ mm} \pm 0,5 \text{ mm} \implies \text{erreur relative sur } \delta p \text{ de } 0,1\%.$$

**Problème 7.1** *Étude et calcul d'écoulements en tuyau par méthode semi-globale*

$$1.a \quad \hat{p} = p_0 - Gz.$$

1.b Le fluide visqueux a besoin d'être poussé dans la direction de l'écoulement :  $\exists$  ***pression motrice supérieure en amont de l'écoulement***,  $\delta\hat{p} = \hat{p}(0) - \hat{p}(L) = GL > 0 \iff G > 0$ .

2  $p_m = Az = -Gz$  reflète la pression motrice, tandis que  $p_h = p_0 + BZ = p_0 - \rho gZ$  peut être vue comme la « ***pression hydrostatique*** ».

3.a Cf. le corrigé de l'exercice 7.1, le calcul est identique même si la signification physique diffère. L'équation (7.122) signifie que les forces de pression hydrostatique qui s'appliquent sur la frontière de  $D$  compensent exactement le poids de  $D$ .

3.b Loi d'évolution de la quantité de mouvement  $\bar{\mathbf{p}}$  de  $D$  : comme l'écoulement est stationnaire

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iint_{\partial D} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S = \iiint_D \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial D} \bar{\mathbf{T}} d^2S$$

avec  $\bar{\mathbf{T}} = -(p_h + p_m)\bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{T}}_v$  le vecteur contrainte total,  $\bar{\mathbf{T}}_v = \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$  étant la contrainte visqueuse. En utilisant le bilan (7.122), on aboutit à l'équation (7.123). (7.123) exprime un bilan de quantité de mouvement « effectif » sur  $D$  : le taux d'évolution de la quantité de mouvement de  $D$ , le terme cinématique de gauche de l'équation (7.123), n'est contrôlé que par les forces surfaciques de pression « motrice »  $-p_m\bar{\mathbf{n}}$  et visqueuses  $\bar{\mathbf{T}}_v$  appliquées au bord de  $D$ . Ainsi, on peut considérer  $p_m$  au lieu de  $p$  : on peut raisonner pour le bilan de quantité de mouvement comme si on était en apesanteur.

$$4.a \quad \bar{\mathbf{T}}_v = 2\eta \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_r = \eta w'(r) \bar{\mathbf{e}}_z = -\tau \bar{\mathbf{e}}_z \quad \text{avec} \quad \tau = -\eta w'(r).$$

1. Fluide ralenti par la paroi fixe  $\implies$  fonction  $w(r)$  décroissante  $\implies w'(r) < 0 \implies \tau > 0$ .
2. Pour une coupe virtuelle de normale  $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{e}}_r$ , le fluide à l'extérieur est plus proche de la paroi donc plus lent, par frottement visqueux il s'oppose à l'écoulement plus rapide du fluide intérieur dans la direction  $z$ , d'où  $\bar{\mathbf{T}}_v = -\tau \bar{\mathbf{e}}_z$  avec  $\tau > 0$ .

4.b Par extrapolation jusqu'au bord du milieu fluide,

$$\bar{\mathbf{T}}_v = \bar{\mathbf{T}}_{v \text{ paroi} \rightarrow \text{fluide}} = \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_r = -\tau(a) \bar{\mathbf{e}}_z.$$

Principe de l'action-réaction  $\implies \bar{\mathbf{T}}_{v \text{ fluide} \rightarrow \text{paroi}} = -\bar{\mathbf{T}}_{v \text{ paroi} \rightarrow \text{fluide}} = \tau(a) \bar{\mathbf{e}}_z$   
donc  $\tau_p = \tau(a) > 0$  et

$$\bar{\mathbf{T}}_{v \text{ fluide} \rightarrow \text{paroi}} = \tau_p \bar{\mathbf{e}}_z.$$

Le fluide, poussé dans la direction  $z$  par la pression motrice, tire le tuyau dans la direction  $z$ .

5.a Décomposons le bord de  $D$  en

- la section d'entrée  $S_e$  définie par  $r \in [0, r_0]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z = 0$ , de normale sortante  $\bar{\mathbf{n}}_- = -\bar{\mathbf{e}}_z$  ;
- la section de sortie  $S_s$  définie par  $r \in [0, r_0]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z = L$ , de normale sortante  $\bar{\mathbf{n}}_+ = \bar{\mathbf{e}}_z$  ;
- la surface latérale  $S_l$  définie par  $r = r_0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, L]$ , de normale sortante  $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{e}}_r$ .

Sur la surface latérale  $S_l$ ,  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \implies$  terme cinématique dans (7.123)

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iint_{\partial D} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S = \iint_{S_e} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_-) d^2S + \iint_{S_s} \rho \bar{\mathbf{v}} (\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_+) d^2S.$$

À un point de  $S_e$  correspond univoquement un point sur  $S_s$  par la translation  $z \mapsto z + L$ . Entre ces points situés au même  $r$ ,  $\bar{\mathbf{v}}$  est inchangée. Comme  $\bar{\mathbf{n}}_+ = -\bar{\mathbf{n}}_-$ , les deux contributions aux intégrales de surface se compensent  $\implies$  cinématiquement

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \bar{\mathbf{0}}.$$

Dynamiquement,

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iint_{S_e} (-p_m \bar{\mathbf{n}}_- + \bar{\mathbf{T}}_-) d^2S + \iint_{S_s} (-p_m \bar{\mathbf{n}}_+ + \bar{\mathbf{T}}_+) d^2S + \iint_{S_l} (-p_m \bar{\mathbf{e}}_r + \bar{\mathbf{T}}_v) d^2S$$

en notant  $\bar{\mathbf{T}}_-$  (resp.  $\bar{\mathbf{T}}_+$ ,  $\bar{\mathbf{T}}_v$ ) le vecteur contrainte visqueux en un point générique de  $S_e$  (resp.  $S_s$ ,  $S_l$ ). Comme  $p_m = -Gz$ ,

$$\left. \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \right|_{\text{pression}} = \iint_{S_s} (GL \bar{\mathbf{e}}_z) d^2S + \iint_{S_l} (-p_m \bar{\mathbf{e}}_r) d^2S,$$

où la 2<sup>de</sup> intégrale est nulle par symétrie axiale : deux points diamétralement opposés sur  $S_l$  ont même  $p_m$  mais des vecteurs radiaux opposés  $\implies$

$$\left. \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \right|_{\text{pression}} = GL\bar{\mathbf{e}}_z \pi r_0^2 .$$

Pour ce qui est des termes visqueux, entre un point de  $S_e$  et un point de  $S_s$  se correspondant par  $z \mapsto z + L$ , on a le même  $r$  donc le même tenseur des contraintes visqueuses  $\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\eta\bar{\mathbf{D}}$ , mais, par contre, des normales  $\bar{\mathbf{n}}_-$  et  $\bar{\mathbf{n}}_+$  opposées. Les contraintes visqueuses  $\bar{\mathbf{T}}_-$  et  $\bar{\mathbf{T}}_+$  sont donc opposées et se compensent  $\implies$

$$\left. \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \right|_{\text{visqueux}} = \iint_{S_l} \bar{\mathbf{T}}_v d^2S = -\tau(r_0) \bar{\mathbf{e}}_z 2\pi r_0 L .$$

Le bilan (7.123) s'écrit donc

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \bar{\mathbf{0}} = \left. \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \right|_{\text{pression}} + \left. \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \right|_{\text{visqueux}} = GL\bar{\mathbf{e}}_z \pi r_0^2 - \tau(r_0) \bar{\mathbf{e}}_z 2\pi r_0 L \implies \tau(r_0) = \frac{Gr_0}{2} . \quad (\text{D.27})$$

Traduit l'équilibre dynamique entre les forces de pression « motrice » en amont et en aval, qui sont le moteur l'écoulement (terme  $GL\pi r_0^2$  dans le bilan de quantité de mouvement), et les forces de frottement visqueuses latérales, exercées par le fluide lent proche de la paroi, qui s'opposent à cet écoulement (terme  $-\tau(r_0)2\pi r_0 L$  dans le bilan de quantité de mouvement). Quand  $r_0 \downarrow$ ,  $\tau(r_0) \downarrow$  parce que le domaine  $D$  de sections d'entrée-sortie beaucoup plus petites subit des forces de pression motrice plus faibles, qui compensent donc des forces de frottement visqueuses latérales plus faibles.

**5.b** Le même bilan peut-être fait, la seule différence est que les frottements extérieurs latéraux ne sont plus exercés par du fluide (lent proche de la paroi) mais directement par la paroi :

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \bar{\mathbf{0}} = \left. \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \right|_{\text{pression}} + \left. \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \right|_{\text{visqueux}} = GL\bar{\mathbf{e}}_z \pi a^2 - \tau_p \bar{\mathbf{e}}_z 2\pi a L \implies \boxed{\tau_p = Ga/2} . \quad (\text{D.28})$$

La physique de cette relation est la même que celle de la relation (D.27).

$$\mathbf{6} \quad \tau(r) = -\eta w'(r) = Gr/2 \iff w(r) = w(0) - Gr^2/(4\eta) = W - Gr^2/(4\eta) .$$

Condition d'adhérence

$$w(a) = 0 \iff W = Ga^2/(4\eta) \implies w(r) = W(1 - r^2/a^2) \quad \text{et} \quad G = 4\eta W/a^2 = 32\eta V/d^2$$

avec  $V = W/2$  la vitesse débitante et  $d = 2a$  le diamètre, comme dans la section 8.2.4.

**7** Vecteur contrainte total exercé par un élément de paroi sur le fluide

$$\bar{\mathbf{T}}_{\text{paroi} \rightarrow \text{fluide}} = -p\bar{\mathbf{e}}_r + \bar{\mathbf{T}}_v \text{ paroi} \rightarrow \text{fluide} = -(p_h + p_m)\bar{\mathbf{e}}_r - \tau_p \bar{\mathbf{e}}_z .$$

La force totale s'obtient par intégration de ce vecteur sur la surface latérale  $S_l$ , bord de  $\Omega$ , interface entre le fluide et la paroi, définie par  $r = a$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [0, L]$ . Pour calculer la contribution de la pression hydrostatique, on applique (7.122) à  $D = \Omega$ , dont le bord est composé de  $S_l$ , plus

- une section d'entrée  $S_e$  définie par  $r \in [0, a]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z = 0$ , de normale sortante  $\bar{\mathbf{n}}_- = -\bar{\mathbf{e}}_z$  ;
- une section de sortie  $S_s$  définie par  $r \in [0, a]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z = L$ , de normale sortante  $\bar{\mathbf{n}}_+ = \bar{\mathbf{e}}_z$  :

$$m\bar{\mathbf{g}} + \iint_{S_l} (-p_h \bar{\mathbf{e}}_r) d^2S + \iint_{S_e} (-p_h \bar{\mathbf{n}}_-) d^2S + \iint_{S_s} (-p_h \bar{\mathbf{n}}_+) d^2S = \bar{\mathbf{0}},$$

avec  $m = \rho \pi a^2 L$  la masse du fluide contenu dans  $\Omega$ . Entre un point de  $S_e$  et le point de  $S_s$  lui correspondant par  $z \mapsto z + L$ ,  $p_h = p_0 + By$  est inchangée, mais  $\bar{\mathbf{n}}_+ = -\bar{\mathbf{n}}_-$ , donc les deux contributions aux intégrales de surface se compensent  $\implies$

$$\bar{\mathbf{F}}_h = \iint_{S_l} (-p_h \bar{\mathbf{e}}_r) d^2S = -m\bar{\mathbf{g}}.$$

Contribution de la pression de nature « motrice »

$$\bar{\mathbf{F}}_m = \iint_{S_l} (-p_m \bar{\mathbf{e}}_r) d^2S = \bar{\mathbf{0}},$$

car en deux points diamétralement opposés de  $S_l$ ,  $p_m = Az$  est la même, tandis que les vecteurs radiaux locaux sont opposés; les deux termes correspondant dans l'intégrale se compensent donc.

Contribution visqueuse

$$\bar{\mathbf{F}}_v = \iint_{S_l} (-\tau_p \bar{\mathbf{e}}_z) d^2S = -\tau_p \bar{\mathbf{e}}_z 2\pi a L.$$

Au total

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{paroi} \rightarrow \text{fluide}} = \bar{\mathbf{F}}_h + \bar{\mathbf{F}}_m + \bar{\mathbf{F}}_v = -m\bar{\mathbf{g}} - \tau_p \bar{\mathbf{e}}_z 2\pi a L.$$

Principe de l'action-réaction  $\implies$

$$\bar{\mathbf{F}}' = \bar{\mathbf{F}}_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}} = -\bar{\mathbf{F}} = m\bar{\mathbf{g}} + \tau_p \bar{\mathbf{e}}_z 2\pi a L.$$

Le 1<sup>er</sup> terme correspond au poids du fluide, que le tuyau doit supporter. Le 2<sup>ème</sup> terme correspond aux frottements visqueux du fluide, qui tire le tuyau dans la direction  $z$  de son écoulement.

**8.a**  $mg = 789 \text{ N}$ ;  $G = 8\eta V/a^2 = 500 \text{ Pa/m}$   $\implies$  contrainte pariétale

$$\tau_p = Ga/2 = 10 \text{ Pa} \implies \text{terme visqueux dans la force } \tau_p 2\pi a L = 50,3 \text{ N}.$$

Force très modérée, d'un ordre de grandeur inférieure à celle due au poids. Ceci est dû à la faible viscosité du pétrole, et à la vitesse modérée de l'écoulement.

**8.b** Comme le nombre de Reynolds  $Re = V 2a \rho/\eta = 1,02 \cdot 10^4 \gg 4000$ ,

cet écoulement est *turbulent* et non laminaire. Dans le cas de l'application numérique proposée, ce modèle est *faux*.

**9** Formule de Blasius  $\implies$  coefficient de perte de charge  $\lambda = 0,316 Re^{-1/4} = 0,0314$   
 $\implies$  gradient de pression motrice

$$G = \rho V^2 \lambda / (4a) = 2510 \text{ Pa/m},$$

5 fois plus grand que dans l'hypothèse laminaire, à cause de la *dissipation due à la turbulence*. En conséquence la contrainte pariétale

$$\tau_p = Ga/2 = 50,3 \text{ Pa},$$

elle aussi 5 fois plus grande que dans l'hypothèse laminaire. La force visqueuse correspondante serait elle aussi 5 fois plus grande.



**Fig. D.14** – Photographie extraite d'un film de Dan Russell sur YouTube [chercher 'rotating water container'], montrant la surface libre d'un liquide posé sur une table tournante.

### Complément

La relation (D.28) est en fait valable en moyenne dans le cas d'un écoulement turbulent, et on peut l'établir en décomposant un tel écoulement en écoulement moyen et fluctuations, voir par exemple le chapitre 5 de [Plaut \(2021b\)](#).

#### Exercice 7.5 Équilibre d'un liquide en rotation autour d'un axe vertical

1 En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  d'axe Oz,  $\bar{\mathbf{f}}_e(\bar{\mathbf{x}}) = \rho\omega^2 r \bar{\mathbf{e}}_r$  force *centrifuge*.

2 Équation de Navier-Stokes  $\bar{\mathbf{0}} = -\bar{\nabla}\hat{p} + \bar{\mathbf{f}}_e$ .

Or  $\bar{\mathbf{f}}_e(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\nabla}_x U$  avec  $U(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$ , donc

$$\bar{\mathbf{0}} = -\bar{\nabla}(\hat{p} - U) \iff p = p_0 - \rho g z + U = p_0 - \rho g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2.$$

Par contre dans l'air léger  $p \simeq p_{\text{atm}}$  donc, par continuité des pressions à l'interface liquide-air,

$$p = p_0 - \rho g z + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = p_{\text{atm}} \iff z = \frac{p_0 - p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{\omega^2}{2g} r^2.$$

Surface = portion de paraboloïde, comme visible sur la figure [D.14](#).

#### Exercice 7.6 Étude de l'établissement d'un écoulement de Couette plan

1, 2 Éq. de Navier-Stokes  $\implies \hat{p} = \hat{p}(x, t) \implies \rho \frac{\partial v(y, t)}{\partial t} - \eta \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial y^2} = -\frac{\partial \hat{p}(x, t)}{\partial x} = G(t)$   
 $\implies \hat{p}(x, t) = p_0(t) - G(t) x$ .

Condition de périodicité  $\implies G(t) = 0$

$$\implies \frac{\partial v(y, t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial y^2}.$$

3  $v_n(t) = \frac{2(-1)^n V}{n\pi} \exp(-n^2 t / \tau)$  avec  $\tau = \frac{h^2}{\pi^2 \nu}$

$$\implies v(y, t) = v_\infty(y) + \frac{2V}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(n\pi \frac{y}{h}\right) \exp(-n^2 t / \tau).$$

*Relaxation exponentielle* avec le *temps caractéristique*  $\tau$ .

### Compléments

D'un point de vue mathématique, ce qui se passe en  $t = 0$  est singulier, puisque la fonction  $u(y,0)$  prolongée à  $\mathbb{R}$  est peu régulière : elle est continue par morceaux et  $C^1$  par morceaux, avec des discontinuités en  $h + 2mh$  pour  $m \in \mathbb{Z}$ . La convergence de la série de Fourier à  $t = 0$  est donc lente : il s'agit d'une convergence simple seulement. Par contre dès que  $t > 0$  la série de Fourier converge rapidement,  $u(y,t)$  devient une fonction  $C^\infty$  de  $y$ , et les calculs sont indiscutables. Physiquement, ces difficultés viennent de l'hypothèse peu réaliste d'un démarrage instantané de la paroi supérieur. Néanmoins ce modèle est intéressant pour appréhender les phénomènes de diffusion visqueuse. C'est en évaluant avec Mathematica la série de Fourier ci-dessus que j'ai d'ailleurs réalisé la figure 7.2c du cours<sup>3</sup>, ainsi que les animations montrés sur la page web du module et en amphii...

### Problème 7.2 Étude d'un rhéomètre de Couette cylindrique

1 Composante axiale de l'équation de Navier-Stokes  $\implies \hat{p} = \hat{p}(r, \theta)$ .

Composante azimutale de l'équation de Navier-Stokes, intégrée par rapport à  $\theta$

$$\implies \hat{p} = F(r) \theta + G(r).$$

Or  $\hat{p}$  doit être invariante sous  $\theta \mapsto \theta + 2\pi \dots$

$$2 \quad V(r) = \alpha r + \frac{\beta}{r}, \quad \alpha = -\frac{\Omega a^2}{b^2 - a^2}, \quad \beta = \frac{\Omega a^2 b^2}{b^2 - a^2}.$$

$$3 \quad p(r, z) = \rho \left( \frac{\alpha^2}{2} r^2 + 2\alpha\beta \ln r - \frac{\beta^2}{2r^2} - gz \right) + \gamma, \quad z_s = \frac{\hat{p}(r) - p_0}{\rho g}.$$

$$4 \quad \Gamma_{\text{moteur}} = 4\pi\beta h\eta.$$

5 Petit inter-rayon.

$$6.1 \quad P_{\text{dissipée}} = 4\pi\beta h\eta \Omega = P_{\text{moteur}}.$$

$$6.2 \quad P_{\text{moteur}} = 0,13 \text{ W}.$$

7 Écoulement doit rester laminaire. Des *instabilités* avec « *brisures de symétrie* » se déclenchent lorsque  $\Omega$  augmente, conduisant à des « vortex de Taylor-Couette »...

### Problème 7.3 Bilans de force et de charge pour les pompiers

$$1 \quad V_j = 31,8 \text{ m/s}.$$

2 Cinématiquement

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = -\dot{m} V_j \bar{\mathbf{e}}_x.$$

Dynamiquement, en négligeant les effets de pesanteur et supposant que la pression est uniforme, égale à  $p_a$ , sur  $S_{j_e} \cup S_a \cup S_{j_s}$ ,

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iint_{S_{j_e} \cup S_a \cup S_{j_s}} (-p_a \bar{\mathbf{n}} d^2S) + \bar{\mathbf{F}}_{\text{mur} \rightarrow \text{eau}} = \iint_{S_m} p_a \bar{\mathbf{n}} d^2S - \bar{\mathbf{F}}_{\text{eau} \rightarrow \text{mur}}$$

3. Pour  $t = t_{\text{visqueux}}/100$ , 7 modes de Fourier suffisent déjà pour obtenir une bonne approximation de  $v(y,t)$ .

d'où

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{eau} \rightarrow \text{mur}} = p_a \bar{\mathbf{e}}_x A_m + \dot{m} V_j \bar{\mathbf{e}}_x .$$

Comme le terme de pression serait aussi présent en l'absence de jet, le terme dû au jet est

$$F_{\text{jet} \rightarrow \text{mur}} = F_{x \text{ jet} \rightarrow \text{mur}} = \dot{m} V_j = 318 \text{ N}$$

ou 32,5 kgF ; c'est une force élevée, sur une petite surface...

**3**  $V_e = 2,6 \text{ m/s}$ . Conservation de la charge  $\implies p_e \simeq p_j + \frac{\rho}{2}(V_j^2 - V_e^2) = 6,0 \text{ bars}$  .

**4**  $H_{\text{pompe}} = \delta H_{\text{tuyau}} - h + \frac{V_j^2}{2g} = 53,6 \text{ m d'eau}$  .

**5**  $P_{\text{pompe}} = 5,25 \text{ kW}$ .

**6**  $p_{\text{refoulement pompe}} = 6,4 \text{ bars}$ .

**7**  $H_{\text{pompe}} = 67,6 \text{ m} \longleftrightarrow P_{\text{pompe}} = 6,6 \text{ kW} \longleftrightarrow p_{\text{refoulement pompe}} = 7,8 \text{ bars}$ .

**8.1**  $F_{1x} = (p_{\text{eau}} - p_{\text{air}})A_{\text{tuyau}} = 2080 \text{ N}$ .

**8.2**  $F_{2x} = (p_{\text{eau}} - p_{\text{air}})A_{\text{tuyau}} + \dot{m} (V_{\text{tuyau}} - V_j) = F_{1x} - 446 \text{ N}$ .

**8.3** Entre les deux situations précédentes il y a surtout, dans le cas robinet ouvert, l'effet de « réaction » en  $\dot{m} (V_{\text{tuyau}} - V_j)$ , qui crée pour le pompier un recul.

#### Problème 7.4 *Lévitiation d'une voiture par réaction de jets d'eau*

**1**  $V_e = \frac{q}{S_e} = \frac{q}{\pi a^2} = 2,33 \text{ m/s}$  ,  $V_s = \frac{q}{S_s} = \frac{q}{\pi b^2} = 37,3 \text{ m/s}$ .

**2.1**  $p_s = p_{\text{atm}} = 1,01 \text{ bar}$ .

**2.2**  $\delta H = 0,278 \text{ mètre d'eau}$ , donc

$$p_e = p_s + \frac{\rho V_s^2}{2} + \rho g(z_s - z_e) = 7,95 \text{ bars}$$

où

$$\frac{\rho V_s^2}{2} = 6,97 \text{ bars}$$

domine largement le terme dû au changement d'altitude, puisque la variation d'altitude est très modique,

$$\rho g(z_s - z_e) = -\rho g l = -0,029 \text{ bar} .$$

Pression  $p_e$  très élevée nécessaire pour faire converger et accélérer l'eau jusqu'à sa vitesse de sortie (135 km/h).

**3.1** Dans

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S ,$$

le terme de volume est nul parce que l'écoulement est stationnaire. Dans le terme de surface la contribution de la surface latérale solide est nulle (cf.  $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$ ). Ainsi

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iint_{S_e} \rho \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S + \iint_{S_s} \rho \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S = -\dot{m} V_e \bar{\mathbf{e}}_x - \dot{m} V_s \bar{\mathbf{e}}_z .$$

Premier terme  $\longleftrightarrow$  freinage de l'eau dans direction  $\bar{\mathbf{e}}_x$  : elle a perdu la vitesse  $V_e$  qu'elle avait dans cette direction du fait du coude. Deuxième terme  $\longleftrightarrow$  accélération à la vitesse  $V_s$  vers le bas.

**3.2** Loi fondamentale de la dynamique de Newton :

$$\frac{d\bar{\mathbf{P}}}{dt} = m_0\bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{F}} + p_e\bar{\mathbf{e}}_x S_e + p_s\bar{\mathbf{e}}_z S_s .$$

**3.3** Principe action-réaction :

$$\bar{\mathbf{F}}' = \bar{\mathbf{F}}_{\text{eau} \rightarrow \text{tuyau+lance}} = -\bar{\mathbf{F}}_{\text{tuyau+lance} \rightarrow \text{eau}} = -\bar{\mathbf{F}} = m_0\bar{\mathbf{g}} + p_e S_e \bar{\mathbf{e}}_x + p_s S_s \bar{\mathbf{e}}_z + \dot{m} V_e \bar{\mathbf{e}}_x + \dot{m} V_s \bar{\mathbf{e}}_z .$$

4 Avec le tenseur uniforme  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 = -p_{\text{atm}}\bar{\mathbf{I}}$ , formule intégrale de la divergence donne

$$\iint_{\partial\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2 S = \iint_{S_{\text{lat}}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2 S + \iint_{S_e} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2 S + \iint_{S_s} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2 S = \bar{\mathbf{0}} ,$$

d'où

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{air} \rightarrow \text{tuyau+lance}} = -p_{\text{atm}}\bar{\mathbf{e}}_x S_e - p_{\text{atm}}\bar{\mathbf{e}}_z S_s .$$

Système solide à l'équilibre donc

$$(m_1+m_2)\bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{F}}' + \bar{\mathbf{F}}'' - p_{\text{atm}}(S_e\bar{\mathbf{e}}_x + S_s\bar{\mathbf{e}}_z) = \bar{\mathbf{0}} \iff \bar{\mathbf{F}}'' = -(m_1+m_2)\bar{\mathbf{g}} - \bar{\mathbf{F}}' + p_{\text{atm}}(S_e\bar{\mathbf{e}}_x + S_s\bar{\mathbf{e}}_z) .$$

Ainsi

$$\bar{\mathbf{F}}'' = -(m_1+m_2)\bar{\mathbf{g}} - \bar{\mathbf{F}}' + p_{\text{atm}}(S_e\bar{\mathbf{e}}_x + S_s\bar{\mathbf{e}}_z) .$$

**5** Loi action-réaction et ce qui précède donnent

$$\bar{\mathbf{R}} = M\bar{\mathbf{g}} + (p_e - p_{\text{atm}})S_e\bar{\mathbf{e}}_x + \dot{m}V_e\bar{\mathbf{e}}_x + \dot{m}V_s\bar{\mathbf{e}}_z$$

avec  $M = m_0 + m_1 + m_2$ .

**6**



Pour le 2<sup>ème</sup> système le repère  $O'x'y'z'$  joue le même rôle que le repère  $Oxyz$  du 1<sup>er</sup>, avec

$$\bar{\mathbf{e}}_{x'} = -\bar{\mathbf{e}}_x , \quad \bar{\mathbf{e}}_{y'} = \bar{\mathbf{e}}_y , \quad \bar{\mathbf{e}}_{z'} = \bar{\mathbf{e}}_z .$$

Réaction du 2<sup>ème</sup> système sur le cadre est donc

$$\bar{\mathbf{R}}' = M\bar{\mathbf{g}} + (p_e - p_{\text{atm}})S_e\bar{\mathbf{e}}_{x'} + \dot{m}V_e\bar{\mathbf{e}}_{x'} + \dot{m}V_s\bar{\mathbf{e}}_{z'} = M\bar{\mathbf{g}} - (p_e - p_{\text{atm}})S_e\bar{\mathbf{e}}_x - \dot{m}V_e\bar{\mathbf{e}}_x + \dot{m}V_s\bar{\mathbf{e}}_z .$$

Au total ce couple de tuyaux et lances exerce sur le cadre

$$\bar{\mathbf{R}}_1 = \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}}' = 2M\bar{\mathbf{g}} + 2\dot{m}V_s\bar{\mathbf{e}}_z .$$

Terme de pesanteur limite la lévitation ; terme de réaction « moteur » de cette lévitation. Par rapport à la situation d'un tuyau et lance rectilignes horizontaux, vue dans le problème 7.3, l'effet de pression très fort, en  $(p_e - p_{\text{atm}})S_e$ , joue maintenant dans les directions horizontales et pas dans la direction verticale de la propulsion. Cet effet est donc toujours là, mais ce sont maintenant les coudes qui résistent et transmettent cet effort au cadre. De plus ces efforts horizontaux de résistance à la pression s'annulent entre 2 systèmes symétriques.

7 Force totale exercée sur le cadre

$$\boxed{5\bar{\mathbf{R}}_1 = 10M\bar{\mathbf{g}} + 10\dot{m}V_s\bar{\mathbf{e}}_z}$$

soit une poussée

$$P = -10Mg + 10\dot{m}V_s \simeq -1960 \text{ N} + 6850 \text{ N} \simeq 4890 \text{ N} .$$

Poids de l'ensemble voiture et cadre équilibré par cette poussée donc

$$\boxed{M_{\text{voiture+cadre}} = P/g \simeq 500 \text{ kg}} .$$

Véhicule  $\simeq$  Renault 5, poids à vide  $\simeq$  750 kg. Les pompiers se sont « aidés » en démontant divers éléments de la voiture (moteur, sièges, etc...) dans le but de l'alléger : cette expérience n'a pu être menée avec une voiture standard.

8 Tuyau de pompier, en caoutchouc, est lisse, donc le coefficient de perte de charge  $\lambda$  ne dépend que du nombre de Reynolds

$$Re = \frac{V_e 2a}{\nu} = 2,3 \cdot 10^5 .$$

Loi de Karman-Nikuradze donne  $\lambda = 0,015$  d'où

$$\delta H_{\text{tuyau}} = \frac{V_e^2}{2g} \frac{L}{2a} \lambda = 0,84 \text{ mètre d'eau} .$$

9 Notant avec un indice  $r$  le refoulement de la pompe,

$$p_r = p_e + \rho g \delta H_{\text{tuyau}} + \rho g(z_e - z_r) = 8,6 \text{ bars} .$$

10 Notant avec des indices  $l$  la surface libre du réservoir,  $a$  l'admission de la pompe, supposant qu'il n'y a pas de pertes de charge entre la surface libre et l'admission, et que cette surface libre est quasiment au repos, on a

$$\delta H = H_l - H_r = H_a - H_r = -H_{\text{pompe}} = z_l - z_r + \frac{p_{\text{atm}} - p_r}{\rho g} + \frac{0 - V_e^2}{2g} ,$$

d'où

$$H_{\text{pompe}} = -h_0 + \frac{p_r - p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} = 75,9 \text{ mètre d'eau} .$$

Puissance développée est donc

$$\boxed{P_{\text{pompe}} = \dot{m}g H_{\text{pompe}} = 13,7 \text{ kW}} \text{ bien inférieure à } 14 \text{ kW} .$$

**Problème 7.5 Étude de la vidange d'un réservoir par un tuyau****Valeurs expérimentales « typiques »**

$$\delta t_1 \simeq 24,5 \text{ s}, \quad z_2 \simeq 33,8 \text{ cm}, \quad z_4 \simeq 6,8 \text{ cm}, \quad h_f \simeq 6 \text{ cm}, \quad \delta t \simeq 3 \text{ min} + 20 \text{ s};$$

à vous d'estimer les « barres d'erreur »...

**Bilan d'expériences**

$$V_{\text{réservoir}} \simeq 0,00408 \text{ m}^3/\text{s} \implies V = V_{\text{tuyau}} \simeq 1,15 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\implies \frac{V^2}{2g} \simeq 6,8 \text{ cm d'eau} \quad \text{et} \quad Re \simeq 5010$$

avec  $\nu \simeq \nu_{\text{eau}}(T = 15^\circ\text{C}) \simeq 1,15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ;

$$\delta H_{\text{singulière}} \simeq 1 \text{ cm d'eau}, \quad \lambda \simeq 0,038 \simeq \lambda_{\text{Blasius}}, \quad \delta H_{\text{régulière}}(0 \rightarrow L) \simeq 50,6 \text{ cm d'eau}...$$

**Modélisation**

$$1 \quad V = |\dot{h}| \left( \frac{D}{d} \right)^2.$$

$$2 \quad h = \delta H_{\text{rég}}(0 \rightarrow L) = \dot{h}^2 \frac{D^4 L}{2gd^5} \lambda \quad \text{avec} \quad Re = |\dot{h}| \frac{D^2}{d \nu}.$$

$$3.1 \quad \text{Blasius} \implies \dot{h} = -|\dot{h}| = -\frac{7}{3} \frac{h_0^{3/7}}{\tau} h^{4/7} \quad \text{avec} \quad \tau = 0,813 D^2 L^{4/7} h_0^{3/7} d^{-19/7} \nu^{1/7} g^{-4/7}.$$

Application numérique :  $\tau = 317 \text{ s} = 5 \text{ min} + 17 \text{ s}$ .

$$3.2 \quad h(t) = h_0 (1 - t/\tau)^{7/3} \implies \dot{h}(t) = -\frac{7}{3} \frac{h_0}{\tau} (1 - t/\tau)^{4/3}.$$

$$3.3 \quad \alpha = \frac{4}{3}, \quad Re_0 = \frac{7}{3} \frac{h_0 D^2}{d \nu \tau} = 2,71 d^{12/7} h_0^{4/7} L^{-4/7} \nu^{-8/7} g^{4/7}.$$

Application numérique :  $Re_0 = 5415$ .

$$3.5 \quad Re(t_{\text{lam}}) = 1750 \iff t_{\text{lam}} = 181 \text{ s} = 3 \text{ min} + 1 \text{ s}.$$

4 Bilan plus précis tenant compte de la perte de charge singulière et des termes d'énergie cinétique serait

$$h - \frac{V^2}{2g} = \delta H_{\text{sing}} + \delta H_{\text{rég}}(0 \rightarrow L) = K \frac{V^2}{2g} + \frac{V^2}{2g} \frac{L}{d} \lambda$$

$$\iff \frac{V^2}{2g} \frac{L}{d} \lambda = 0,158 |\dot{h}|^{7/4} \frac{D^{7/2} L \nu^{1/4}}{g d^{19/4}} = h - (K+1) \frac{V^2}{2g} = h - (K+1) |\dot{h}|^2 \frac{D^4}{2gd^4},$$

qui, malheureusement, n'a pas de solution analytique.

Dans le modèle de l'énoncé on néglige le 2<sup>ème</sup> terme proportionnel à  $(K+1)$ . Dans la réalité ce terme ralentit la vidange : il est normal que notre modèle surestime la cinétique de la vidange, notamment  $Re_0$ , et sous-estime le temps de vidange total.

On peut noter que le modèle est sensible à la viscosité donc à la température de l'eau...

Enfin tous ces modèles sont critiquables par leur description continue des écoulements turbulents avec une seule loi, alors qu'en fait il y a une intermittence.

**Problème 7.6 Station de Transfert d'Énergie par Pompage**

**1.a**  $Q_1 = 200 \text{ m}^3/\text{s}$ .

**1.b**  $q_1 = 100 \text{ m}^3/\text{s}$ .

**1.d**  $V_1 = 7,07 \text{ m/s}$ ,  $v_1 = 14,1 \text{ m/s}$ ,  $Re_1 = Re_{p1} = Re_{s1} = 3,24 \cdot 10^7$ .

**2.a**  $Q_2 = 133 \text{ m}^3/\text{s}$ .

**2.b**  $V_2 = 4,72 \text{ m/s}$ ,  $v_2 = 9,43 \text{ m/s}$ ,  $Re_2 = Re_{p2} = Re_{s2} = V_2 D / \nu = 2,16 \cdot 10^7$ .

**2.c** Écoulements fortement *turbulents*.

**3** Rugosité relative de la conduite principale  $\varepsilon_p = 1,67 \cdot 10^{-4}$ .

Haaland  $\Rightarrow \lambda_{p1} = \lambda_{p2} = 0,0133 = \lambda_p$ .

Rugosité du béton « élevée »  $\Rightarrow$  régime où  $\lambda$  ne dépend plus de Reynolds.

**4** Rugosité relative de la conduite secondaire  $\varepsilon_s = 1,67 \cdot 10^{-5}$ .

Haaland  $\Rightarrow \lambda_{s1} = 0,00898$ ,  $\lambda_{s2} = 0,00908$ .

Rugosité de l'acier inoxydable « faible »  $\Rightarrow$  régime où  $\lambda$  ne dépend plus de Reynolds pas encore atteint. Cependant, l'ordre de grandeur des coeff. de frottement dans toutes les conduites = :  $\lambda_p \simeq \lambda_{s1} \simeq \lambda_{s2} \simeq 0,01$ .

**5.a** En l'absence d'informations sur les pertes de charge singulières, nous les négligeons, d'où

$$H_A - H_B = 0,$$

$$H_B - H_C = \frac{V_1^2}{2g} \frac{L}{D} \lambda_p \text{ perte de charge régulière dans le tuyau BC},$$

$$H_C - H_D = \frac{v_1^2}{2g} \frac{l_1}{d} \lambda_{s1} \text{ perte de charge régulière dans le tuyau CD},$$

$$H_D - H_E = H_n \text{ perte de charge dans la turbine},$$

$$H_E - H_F = \frac{v_1^2}{2g} \frac{l_2}{d} \lambda_{s1} \text{ perte de charge régulière dans le tuyau EF},$$

$$H_F - H_G = 0$$

$$\Rightarrow H_A - H_G = \delta H_1 + H_n \text{ avec } \delta H_1 = \frac{V_1^2}{2g} \frac{L}{D} \lambda_p + \frac{v_1^2}{2g} \frac{l}{d} \lambda_{s1}.$$

Bassins de grande surface  $\Rightarrow$  termes cinétiques en entrée et sortie  $\simeq 0$ ;

air atmosphérique quasiment à l'équilibre, et de faible masse volumique  $\Rightarrow p_A \simeq p_G$

$$\Rightarrow H_A - H_G = z_A - z_G = \delta z$$

$$\Rightarrow \boxed{H_n = \delta z - \delta H_1},$$

charge nette = hauteur de chute  $\delta z$  diminuée des pertes de charge  $\delta H_1$ .

**5.b**  $\delta H_1 = 7,91 \text{ m}$ .

**5.c**  $H_n = 232 \text{ m}$ , grâce aux conduites de grands diamètres et de bon état de surface construites, on ne perd que 3,3% de la hauteur de chute à cause de la dissipation.

**6.b**  $P_1 = 455 \text{ MW}$ .

**6.c**  $P_{e1} = 396 \text{ MW}$  .

**6.d**  $E_1 = 1,98 \text{ GWh}$  .

**7.a**  $H_G - H_F = 0$  ,

$$H_F - H_E = \frac{v_2^2}{2g} \frac{l_2}{d} \lambda_{s2} ,$$

$$H_E - H_D = -H_p \text{ gain de charge dans la pompe,}$$

$$H_D - H_C = \frac{v_2^2}{2g} \frac{l_1}{d} \lambda_{s2} ,$$

$$H_C - H_B = \frac{V_2^2}{2g} \frac{L}{D} \lambda_p ,$$

$$H_B - H_A = 0$$

$$\Rightarrow H_G - H_A = -\delta z = \delta H_2 - H_p \text{ avec } \delta H_2 = \frac{V_2^2}{2g} \frac{L}{D} \lambda_p + \frac{v_2^2}{2g} \frac{l}{d} \lambda_{s2} .$$

Ainsi

$$\boxed{H_p = \delta z + \delta H_2} ,$$

le gain de charge dans la pompe doit permettre l'ascension du fluide (terme  $\delta z$ ) et de plus compenser les pertes de charge (terme  $\delta H_2$ ).

**7.b**  $\delta H_2 = 3,53 \text{ m}$  , plus faible que  $\delta H_1$  car les débits donc la turbulence donc la dissipation ont diminué. Ne correspond plus qu'à 1,5% de  $\delta z$ , c'est quasi négligeable. Ainsi  $H_p = 244 \text{ m}$  très proche de  $\delta z$ .

**8.a**  $P_2 = 319 \text{ MW}$  .

**8.b**  $P_{e2} = 354 \text{ MW}$  .

**8.c**  $E_2 = 2,65 \text{ GWh}$  .

**9 Rendement énergétique global** = 75% , ce qui est *élevé* pour un système de stockage de grandes quantités d'énergie électrique.

$$\mathbf{10} \quad P_{e1} = r \rho Q_1 g H_n \simeq r \rho \frac{\mathcal{V}}{T_{\text{prod}}} g \delta z \quad \Rightarrow \quad E_1 = P_{e1} T_{\text{prod}} \simeq r \rho \mathcal{V} g \delta z$$

$$P_{e2} = \frac{1}{r'} \rho Q_2 g H_p \simeq \frac{1}{r'} \rho \frac{\mathcal{V}}{T_{\text{pomp}}} g \delta z \quad \Rightarrow \quad E_2 = P_{e2} T_{\text{pomp}} \simeq \frac{1}{r'} \rho \mathcal{V} g \delta z$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\text{rendement max} = r r'} \quad (\text{D.29})$$

produit des rendements des turbomachines, qu'il vaut la peine d'optimiser !.. Numériquement, ce rendement maximum vaut 78% : on perd seulement 3% de rendement à cause des pertes de charge, grâce aux efforts faits sur le « génie civil », la largeur des conduites, etc...

**11** Bilan de pertes de charge :

$$H_A - H_D = z_A - z_D + \frac{p_{\text{atm}} - p_D}{\rho g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g} \frac{L}{D} \lambda_p + \frac{v_1^2}{2g} \frac{l_1}{d} \lambda_{s1}$$

$$\Rightarrow p_D = p_{\text{atm}} + \rho g(z_A - z_D) - \frac{\rho V_1^2 L}{2 D} \lambda_p - \frac{\rho v_1^2}{2} \left(1 + \frac{l_1}{d} \lambda_{s1}\right) = 25,9 \text{ bars} .$$

Pression essentiellement contrôlée par l'hydrostatique dans le circuit ABCD,

$$p_D \simeq p_{\text{atm}} + \rho g(z_A - z_D) = 27,5 \text{ bars} .$$

Pertes de charge dans la turbine :

$$\begin{aligned} H_D - H_E &= z_D - z_E + \frac{p_D - p_E}{\rho g} = H_n \\ \implies p_E &= p_D + \rho g(z_D - z_E) - \rho g H_n \simeq 3,6 \text{ bars} . \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

Très forte chute de pression dans la turbine, qui extrait une grande partie de l'énergie de l'eau. Cette pression est essentiellement contrôlée par l'hydrostatique dans le circuit EFG,

$$p_E \simeq p_{\text{atm}} + \rho g(z_A - z_D) + \rho g(z_D - z_E) - \rho g(z_A - z_G) = p_{\text{atm}} + \rho g(z_G - z_E) = 4,4 \text{ bars} . \quad (\text{D.31})$$

**12.a** Avec  $Re = Re(Q) = 4Q/(\pi D\nu)$ , les coefficients de perte de charge

$$\begin{aligned} \lambda_p(Q) &= \left( -1,8 \log((\varepsilon_p/3,7)^{1,11} + 6,9 Re^{-1}(Q)) \right)^{-2} \\ \text{et } \lambda_s(Q) &= \left( -1,8 \log((\varepsilon_s/3,7)^{1,11} + 6,9 Re^{-1}(Q)) \right)^{-2} , \\ P &= r \rho Q g \delta z - \frac{8}{\pi^2} \frac{r\rho}{D^4} Q^3 \left[ \frac{L}{D} \lambda_p(Q) + 8 \frac{l}{D} \lambda_s(Q) \right] . \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

**12.b** Premier terme positif = terme *moteur* de la puissance, correspond à une transformation continue de l'*énergie potentielle de pesanteur* de l'eau en énergie électrique.

Augmente linéairement avec le débit.

S'il existait seul, on pourrait atteindre des puissances arbitrairement grandes à débits arbitrairement grands.

Second terme négatif dû aux *pertes de charge* i.e. à la *dissipation visqueuse* et aux *taux de déformation* de l'écoulement, qui ne peut être uniforme.

Comme  $\lambda_p$  et  $\lambda_s$  sont, pour  $Q \geq Q_1$ , fonctions très lentement décroissantes de  $Q$ , dépendance de ce terme en débit essentiellement gouvernée par le facteur  $Q^3$ .

Terme décroît donc rapidement quand  $Q$  augmente, la turbulence donc la dissipation s'intensifient alors.

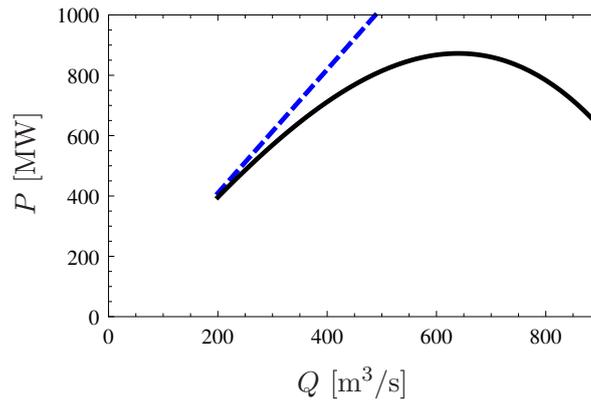
$\exists$  optimum, à débit  $Q$  suffisamment grand pour avoir une puissance motrice élevée, mais pas trop pour que la dissipation ne soit pas trop intense, cf. la figure D.15.

**12.c**  $\max P = 872 \text{ MW}$  pour  $Q = Q_{\text{opt}} = 639 \text{ m}^3/\text{s}$   
correspondrait à un débit dans chaque turbine  $q_{\text{opt}} = Q_{\text{opt}}/2 \simeq 320 \text{ m}^3/\text{s}$  *extrêmement élevé*.  
Sans doute qu'à cette valeur là le rendement  $r$  aura largement chuté.

À cause de cela et de problèmes d'usures, ce calcul est « académique », même si les tendances dégagées sont pertinentes.

### Compléments

- Le fait de faire bifurquer l'eau dans deux groupes turbines-pompes permet, d'une part de moins solliciter ceux-ci, d'autre part une certaine flexibilité : si les besoins de puissance sont modérés, on peut faire fonctionner un seul groupe.



**Fig. D.15** – Problème 7.6. Graphe de  $P(Q)$  en fonction de  $Q$ ; droite pointillée : terme moteur seul dans (D.32), courbe continue : somme des 2 termes de (D.32).

- Le fait de placer les groupes turbines-pompes nettement sous la surface du bassin inférieur (dans le problème, environ 35 m dessous) permet de garantir une pression en sortie de turbine (D.30), (D.31) pas trop faible. Sinon on risquerait des phénomènes de *cavitation*, création de bulles dans l'eau en dépression, dangereux pour les machines. Sur la cavitation, voir le problème correspondant dans le chapitre 3 de Plaut (2018).
- Une vidéo d'EDF présentant le principe d'une STEP est disponible sur YouTube (« STEP EDF »). Les STEP jouent en France un grand rôle dans la gestion du réseau électrique, car elles sont plus souples et réactives que les centrales nucléaires par exemple. « Démarrer » une centrale nucléaire prend de plusieurs heures à plusieurs jours selon que l'« arrêt » était partiel ou total, alors que démarrer une STEP prend seulement quelques minutes.
- Pour concevoir ce sujet, je me suis inspiré d'une visite de la STEP de Revin, dans les Ardennes<sup>4</sup>, dont une vue d'ensemble est donnée sur la figure 7.9a. Cette STEP est plus compliquée que celle étudiée dans le problème, puisqu'elle comprend 4 groupes turbines-pompes et non 2. Cependant la STEP du problème correspond, grosso-modo, à la moitié de la STEP de Revin. De fait la puissance calculée en production, de l'ordre de 400 MW, est bien la moitié de celle de Revin, de l'ordre de 800 MW. Grâce notamment à un circuit hydraulique optimisé, comprenant par exemple une première conduite de très grand diamètre, égal à 9 mètres, et à des machines à fluides et électriques performantes, le rendement de la STEP de Revin avoisine bien, au mieux, 77%.
- Je remercie vivement M. Amalric, directeur de cette installation, et Maruzewski, docteur-ingénieur au Centre d'Ingénierie Hydraulique d'EDF, pour m'avoir communiqué des informations techniques sur cette STEP, ainsi que la photo de la figure 7.9a.

4. Cette visite a eu lieu dans le cadre de la semaine départementale 2A d'Énergie : Production, Transformation en avril 2012. Elle fut organisée avec l'aide de Mme Witzmann d'EDF, que je remercie encore ici.

## D.8 Corrigés du chapitre 8 - Analyse dimensionnelle appliquée aux fluides

### Exercice 8.1 *Perte de charge régulière dans un tuyau de pompier*

À partir du calcul du nombre de Reynolds notamment, on justifie la pertinence de la formule de Karman-Nikuradze pour évaluer le coefficient de perte de charge...

### Exercice 8.2 *Étude par analyse dimensionnelle d'un déversoir triangulaire*

Paramètres de contrôle :

- le débit volumique  $q$ ,
- l'accélération de la pesanteur  $g$ ,
- la masse volumique  $\rho$ ;
- l'angle d'ouverture  $\alpha$ .

Variable dépendante : la hauteur d'eau  $h$  au-dessus de l'ouverture.

On peut choisir  $q$ ,  $\rho$  et  $g$  comme grandeurs fondamentales.

Avec Vaschy-Buckingham,

$$\pi_4 = \alpha \quad \text{et} \quad \pi_0 = \frac{h}{q^{2/5} g^{-1/5} \rho^0} \quad \Longrightarrow \quad q = \sqrt{g h^5} F(\alpha).$$

### Exercice 8.3 *Similitude pour l'étude des performances d'une hélice d'avion*

**2.1** Choissant  $d$ ,  $V$  et  $\rho$  comme grandeurs fondamentales,

- l'adimensionnement de la viscosité conduit à introduire le nombre de Reynolds  $Re = Vd/\nu$ ;
- l'adimensionnement de la vitesse du son conduit à introduire le nombre de Mach  $Ma = V/c$ ;
- l'adimensionnement de la fréquence angulaire conduit à introduire le nombre de Strouhal  $St = \omega d/V$ .

**2.2** L'égalité des nombres de Reynolds, Mach et Strouhal impose, si on note avec un 0 les paramètres de l'essai au sol, 1 ceux de l'essai en vol, un rapport des vitesses

$$V_0/V_1 = 1,05 ;$$

un rapport des diamètres

$$d_0/d_1 = 0,69 ;$$

un rapport des vitesses de rotation

$$\omega_0/\omega_1 = 1,52 .$$

**3.1**  $P = \rho d^2 V^3 \mathcal{F}(Re, Ma, St).$

**3.2**  $P_1 = 1,21 P_0.$

**Exercice 8.4** *Similitude de lâchers de vortex de Bénard-Von-Karman*

1 Eau et air  $\simeq$  *fluides newtoniens incompressibles...*

*Géométrie* des deux problèmes similaire  $\implies$  écoulements similaires.

2 Seul paramètre de contrôle de ce problème : *nombre de Reynolds*

$$Re = \frac{Vd}{\nu} \quad \text{ou} \quad Re' = \frac{V'd'}{\nu'} \simeq 1,4 \cdot 10^{10},$$

très élevé  $\implies$  régime « *oscillant turbulent* ». Des oscillations spatiales irrégulières sont visibles sur la photo 2.

3  $Re = Re' \implies V = \frac{\nu}{d} Re' = 140 \text{ km/s}$ , impossible !

$$4 \pi_0 = \frac{T_v}{V^{-1} d^1} = \frac{VT_v}{d}.$$

$$5 T'_v = \frac{\pi_0 d'}{V'} \simeq 1,5 \text{ h}.$$

Durée courte par rapport à celle de la journée  $\implies$  homogénéité des conditions météorologiques.

Durée longue par rapport au temps de survol d'une aire géographique par le satellite Terra  $\implies$  pas de film sur le site de la NASA (dommage!)...

**Compléments**

- Le fait que le système atmosphérique présente encore de « beaux » tourbillons malgré la valeur très élevée du nombre de Reynolds est lié à sa quasi bidimensionnalité ; dans un système tridimensionnel à nombre de Reynolds équivalent la turbulence serait plus forte et on aurait du mal à reconnaître des tourbillons.
- Le groupement  $\pi_0$  est l'inverse du « nombre de Strouhal » introduit dans la section 8.3 du cours.
- On peut estimer la longueur d'onde spatiale  $\lambda'$  qui sépare 2 vortex de même sens dans l'allée de la photo 2, en écrivant que, ces vortex émis de façon périodique étant advectés par l'écoulement du vent, dans la direction  $x$ , on a

$$V' = \frac{\delta x \text{ entre 2 vortex identiques}}{\delta t \text{ entre 2 vortex identiques}} = \frac{\lambda'}{T'_v} \iff \lambda' = V'T'_v = \pi_0 d' \simeq 5 d' = 75 \text{ km}.$$

On peut mesurer à la règle sur la photo 2 une période spatiale qui semble plus petite en tout cas en unités de la largeur  $L'$  de l'île dans la direction  $y$  perpendiculaire au vent,

$$\lambda'_{\text{photo}} \simeq 3 L'.$$

Ces deux estimations sont conciliables à condition de prendre en compte des effets négligés jusqu'ici :

- le diamètre « aérodynamique » de l'île,  $d'$ , est en fait inférieur à  $L'$  ;
- la vitesse du vent en aval de l'île est diminuée par rapport à la vitesse en amont  $V'$ .

**Problème 8.1** *Éoliennes à axe horizontal : analyse dimensionnelle et modèle de Betz*

$$1.1 \quad P = c_p \frac{1}{2} \rho A U^3 = \frac{dE}{dt}$$

$$\Leftrightarrow dE = c_p \underbrace{\frac{1}{2} \rho U^2}_{\text{densité volumique d'énergie cinétique du vent}} \underbrace{AU dt}_{\text{volume d'air traversant si } u=U} \dots$$

$$1.2 \quad 0,01 < c_{pB} < 0,1.$$

- Facteur « fluides » dans  $P_H/P_B$  est le rapport des coefficients de puissance ;
- facteur « géométrie » ou « solides » est le rapport des aires des disques actuateurs ou « disques rotor »

$\Rightarrow P_H/P_B$  proche d'une puissance de 10, on a gagné plusieurs ordres de grandeur de puissance !

$$2 \quad \dot{m} = \rho U A_e = \rho u A = \rho u_s A_s \quad \Rightarrow \quad q = U A_e = u A = u_s A_s .$$

$$3 \quad \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \dot{m} (u_s - U) \bar{\mathbf{e}}_x = -F \bar{\mathbf{e}}_x \quad \Rightarrow \quad F = \dot{m} (U - u_s) .$$

$$4.1 \quad \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} \dot{m} (u_s^2 - U^2) < 0 .$$

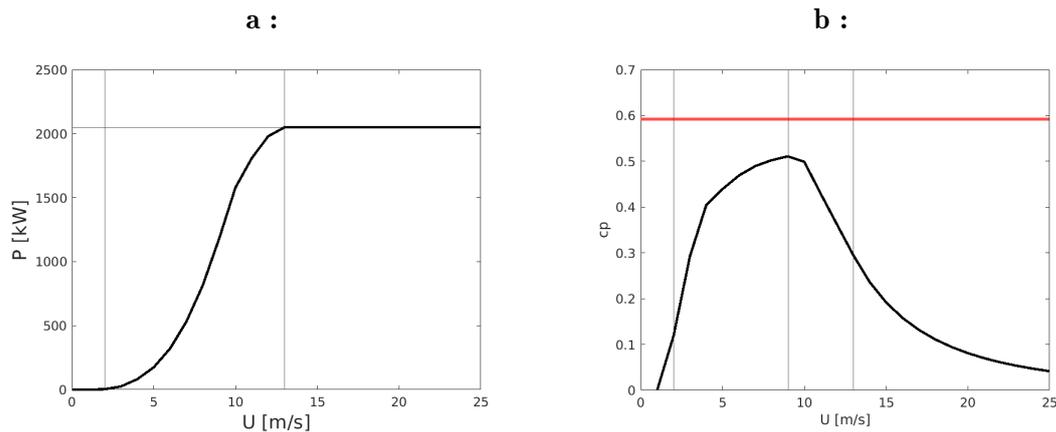
$$4.2 \quad \frac{dE_c}{dt} = P_{\text{pression}} - P_m = 0 - P_m = \iiint_{\Omega_d} \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x \simeq -u F \quad \Leftrightarrow \quad P_m \simeq F u .$$

$$4.3 \quad P = \frac{1}{2} \dot{m} (U^2 - u_s^2) .$$

$$5.1 \quad u = \frac{1}{2} (U + u_s) .$$

$$5.2 \quad c_p = \frac{1}{2} (1+r)^2 (1-r) .$$

$$5.3 \quad \max c_p = 0,59 \text{ pour } r_{\max} = 0,33; \text{ à l'optimum } U/u_s \text{ est un entier } > 1.$$



**Fig. D.16** – Pour l'éolienne E-82-2 étudiée. **a** : *puissance électrique*  $P$  en fonction de la *vitesse du vent amont*  $U$  ; les lignes verticales indiquent  $U = 2$  et  $13$  m/s, la ligne horizontale indique la *puissance nominale* 2050 kW. **b** : *coefficient de puissance*  $c_p$  en fonction de la *vitesse du vent amont*  $U$  ; les lignes verticales indiquent  $U = 2$ ,  $9$  et  $13$  m/s, la ligne horizontale indique la *limite de Betz* 0,59.

**6.1** On distingue 3 zones sur la *courbe de puissance* figure D.16a :

- $U < 2$  m/s : le vent est trop faible pour que l'éolienne démarre ; la valeur critique 2 m/s est appelée '*cut-in speed*' en anglais ;
- $2$  m/s  $< U < 13$  m/s : montée en puissance régulière de l'éolienne ;
- $13$  m/s  $< U$  : la puissance sature à sa vitesse nominale.

**6.2** La figure D.16b montre que la théorie de Betz est confirmée, et que l'éolienne Enercon E-82-2 est performante!..

**Problème 8.2** *Étude d'une pale d'éolienne bloquée soumise à un vent fort*

1.1 Cf. le schéma de la figure D.17, qui correspond à une pale « *parabolique* ».

1.2  $d_0 = 2a = 5,6 \text{ m}$ .

2  $f_0 = \frac{1}{2}\rho V^2 d_0 C_t = 15100 \text{ N/m}$ .

Sur le premier mètre de la pale, force totale de l'ordre de 15000 N  $\iff$  poids de l'ordre de 1,5 tonne.

Efforts « importants », en comparaison par exemple au poids par unité de longueur de la pale, dont on peut penser qu'il est inférieur, car la pale est faite de matériaux « légers », avec une structure creuse (cf. la fin du sujet et les compléments ci-après).

Efforts proportionnels à  $V^2$  augmentent très rapidement quand  $V$  augmente, c'est là la difficulté en cas de tempête.

Efforts diminuent lorsque l'on s'éloigne de la racine, puisque la surface exposée au vent diminue, comme mesuré par la fonction  $d(x)$ .

Enfin, le nombre de Reynolds construit sur  $d_0$  est  $\simeq 8 \cdot 10^6$  : alors, pour un cylindre, on s'attendrait à avoir  $C_t \simeq 0,9$ . Le fait que le coefficient de traînée soit deux fois plus grand est dû au manque d'aérodynamisme du profil de la pale (cf. sur ce sujet la figure D.25).

3  $G_0 = \frac{4f_0}{15\sqrt{L}}$  et  $\alpha = \frac{5}{2} \implies$  figure D.18.

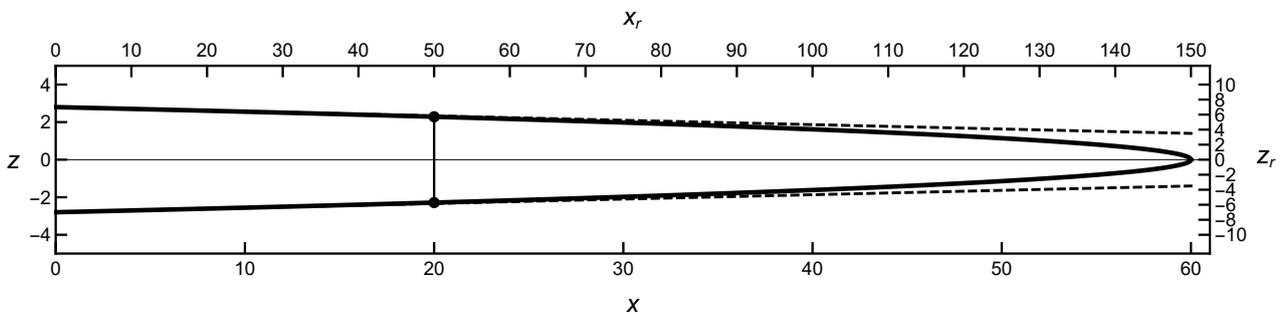
Ce couple impose un déplacement dans la direction de  $-y$  c'est-à-dire dans la direction à la fois du vent  $\bar{V}$  et des forces linéiques de traînée  $\bar{\mathbf{f}}$ , c'est normal physiquement.

Couple en valeur absolue maximal à la racine de la pale, diminue rapidement quand  $x$  augmente, pour s'annuler lorsque  $x = x_B = L$ . En effet ce couple est dû aux actions du vent en aval du point considéré, or, plus on s'approche de l'extrémité, plus la région en aval est courte, avec de plus des forces d'intensité moindre.

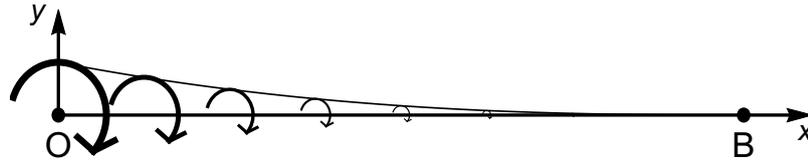
4.1  $\beta = 1$  et  $\gamma = -1$ .

4.2  $g_0 = \frac{4f_0 L^3}{15K_0}$ .

5 Cf. la figure D.19 : *forte hétérogénéité de rigidité*, avec une rigidité maximale à la racine, puis décroissant rapidement avec  $X$ . Ceci est lié au fait que la pale s'amincit et s'allège lorsque l'on s'éloigne de sa racine, afin aussi d'économiser les matériaux : on peut se le permettre puisque



**Fig. D.17** – Section de la pale d'éolienne du problème 8.2 dans le plan  $xOz$  : frontière en trait continu et tangentes à la racine en traits pointillés ; les deux points en  $x = 20 \text{ m}$  sont ceux évoqués question 1.2. Les coordonnées  $x$  et  $z$  sont en m,  $x_r$  et  $z_r$  en mm.



**Fig. D.18** – Représentation du couple  $\bar{\Gamma}(x)$  en fonction de la distance  $x$  à la racine de la pale. La taille et l'épaisseur du trait de chaque flèche sont proportionnels à la valeur de  $|\Gamma(x)|$  pour  $x$  au centre de la flèche. La courbe en trait fin est celle de la fonction  $|\Gamma(x)|$ .

les couples à supporter diminuent lorsque l'on s'éloigne de sa racine.

**6.1**  $w''(X) = \frac{g(X)}{k(X)}$  et les conditions limites d'encastrement à la racine de la pale dans le moyeu

$$w(0) = w'(0) = 0 \implies P(X) = 6 + 14X + 17X^2 - 15X^3.$$

**6.2** Cf. la figure D.20.

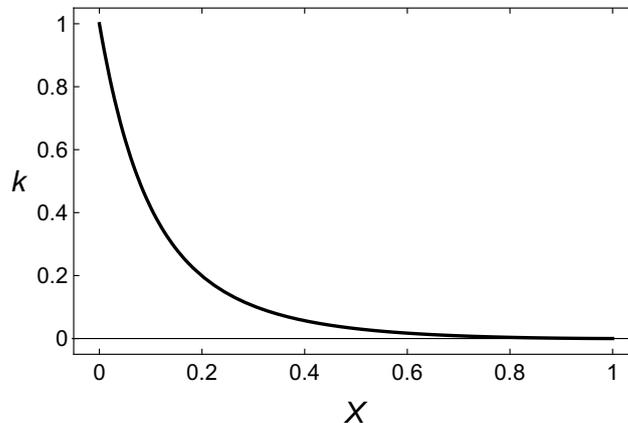
$g_0 > 0 \implies w(X) < 0$  comme  $w(X)/g_0$ . Traduit bien des déplacements dans la direction de  $-y$  c'est-à-dire dans la direction à la fois du vent  $\bar{V}$  et des forces linéiques de traînée  $\bar{f}$ , c'est normal physiquement.

$|w(X)|$  est maximale en bout de pale, ce qui est raisonnable car la fonction  $w$  est concave, et parce que, physiquement, en allant de la racine à l'extrémité on cumule l'action de tous les couples.

**6.3** La flèche dimensionnelle absolue maximale est atteinte à l'extrémité de la pale, en B, et vaut

$$v_{\max} = \frac{22}{45} \frac{f_0 L^4}{K_0}. \quad (\text{D.33})$$

- $f_0 \uparrow \implies v_{\max} \uparrow$ , car  $f_0$  mesure les forces aérodynamiques à l'origine de la flexion de la pale;
- $L \uparrow \implies v_{\max} \uparrow\uparrow$ , car une pale plus longue subit plus d'efforts et encore plus de couple, cf.  $\Gamma(x=0) = -4f_0 L^2/15$ .
- $K_0 \uparrow \implies v_{\max} \downarrow$ , car  $K_0$  mesure la rigidité de la pale, qui s'oppose aux déformations liées à la flexion.



**Fig. D.19** – Rigidité en flexion adimensionnée  $k(X)$  en fonction de l'abscisse adimensionnée  $X$ .

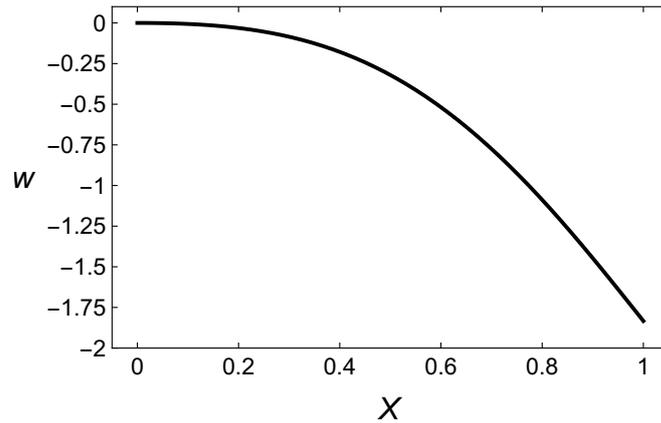


Fig. D.20 – Flèche adimensionnée réduite  $w(X)/g_0$  en fonction de l'abscisse adimensionnée  $X$ .

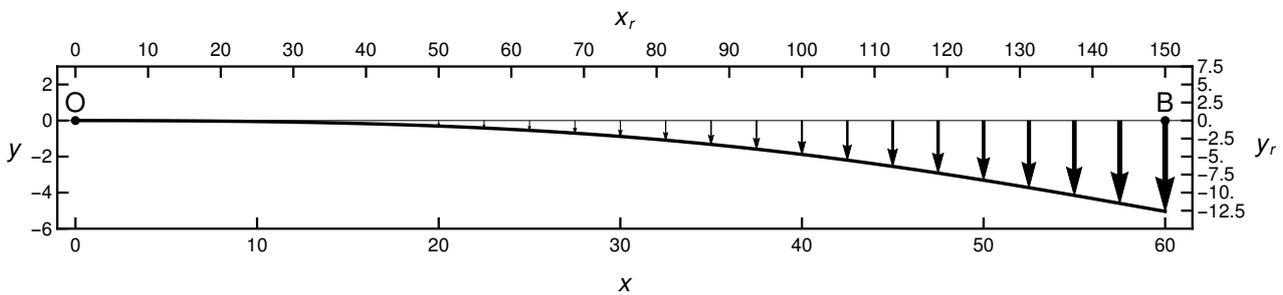


Fig. D.21 – Schéma à l'échelle  $1/400^{ème}$  de la fibre moyenne déformée par le vent et du champ de déplacement de la fibre moyenne. La taille et l'épaisseur du trait de chaque flèche sont proportionnels à la valeur de  $|v(x)|$  pour  $x$  correspondant à l'origine de la flèche. Les coordonnées  $x$  et  $y$  sont en m,  $x_r$  et  $y_r$  en mm.

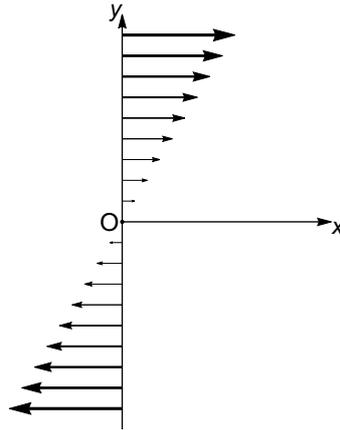
6.4

$$\boxed{v_{\max} = 5,0 \text{ m}} \implies \text{figure D.21.} \tag{D.34}$$

Ce schéma ressemble à l'image du film montrée dans la figure a de l'énoncé, on peut donc considérer que ce modèle est *réaliste*... Même si on peut se poser des questions sur l'hypothèse des petits déplacements, ayant  $v_{\max}/L \simeq 8\%$  non négligeable : cette hypothèse est discutable.

7.1  $\sigma_{xx} = \frac{4f_0L^2}{15I} y \implies \bar{\mathbf{T}} = \frac{4f_0L^2}{15I} y \bar{\mathbf{e}}_x \implies \text{figure D.22.}$

Dans la partie  $y > 0$  de la pale en flexion on est étiré donc en *traction*, alors que dans la partie  $y < 0$  de la pale en flexion on est contracté donc en *compression*, ce, d'autant plus que l'on s'éloigne de la fibre moyenne où le vecteur contrainte s'annule.



**Fig. D.22** – Allure du champ de vecteurs contraintes  $\bar{\mathbf{T}}$  sur  $\Sigma_0$ . La taille et l'épaisseur du trait de chaque flèche sont proportionnels à la valeur de  $\|\bar{\mathbf{T}}\|$  pour  $y$  correspondant à l'origine de la flèche.

## 7.2

$$\sigma_{\max} = \frac{4f_0 L^2 b}{15I} = 145 \text{ MPa} . \quad (\text{D.35})$$

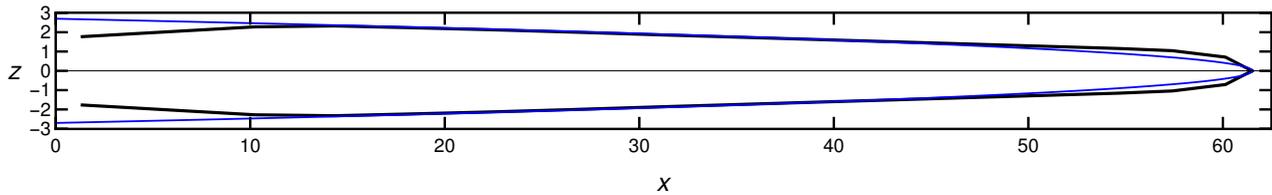
En comparaison avec la courbe de traction d'un acier « doux » montré dans le cours, on peut affirmer qu'il s'agit d'une **contrainte élevée**, pour laquelle cet acier doux justement aurait dépassé sa limite d'élasticité.

Il faudrait connaître le **matériau** qui constitue la structure rigide de la pale, et utiliser un **critère de limite élastique** pour vérifier qu'il reste bien **élastique** dans la situation étudiée. On pourrait même aller plus loin et étudier, dans cette situation, quelle est la valeur maximale de  $V$  qui correspond à la **limite d'élasticité**, en explicitant la dépendance de  $\sigma_{xx}$  ou  $\sigma_{\max}$  par rapport à  $V$ , à travers  $f_0$  :

$$\sigma_{\max} = \frac{4L^2 b}{15I} \frac{1}{2} \rho V^2 d_0 C_t = \frac{2}{15} \frac{L^2 b d_0 \rho C_t}{I} V^2 \quad (\text{D.36})$$

qui pourrait être comparée à une limite  $\sigma_0$ , d'où  $V < V_{\text{lim}} \dots$

Alternativement, requérir que  $\sigma_{\max}(V_{\text{lim}} \text{ donné}) < \sigma_0$  donnerait une inégalité à vérifier pour **dimensionner** la pale...



**Fig. D.23** – Section d'une pale de l'éolienne NREL 5 MW dans le plan  $xOz$  : frontière en noir et « ajustement » parabolique du modèle en traits fins bleus (figure à l'échelle).

### Compléments sur le problème 8.2

- La figure 8.8a (extraite d'un film) provient d'un calcul réalisé par Bastian Dose, doctorant au centre de recherche 'Forwind' et au 'Fraunhofer Institute for Wind Energy and Energy System Technology' (IWES) d'Oldenburg en Allemagne. Je le remercie pour avoir fourni ce film, et pour son aide au développement du modèle présenté dans ce sujet.
- Comme évoqué dans le sujet, ce modèle a été développé en se basant sur l'*éolienne de référence* « réelle » (au sens où elle est très proche d'éoliennes existantes) « NREL 5 MW » définie par [Jonkman et al. \(2009\)](#). Ce rapport est disponible sur le web, on invite les élèves curieux intéressés par les énergies renouvelables à le consulter !

Dans l'énoncé, on a simplifié et arrondi certaines valeurs, approximé de façon analytique les courbes caractéristiques<sup>5</sup>, etc... Par exemple, la géométrie de la pale réelle est définie par  $L = 61,5$  m et un « diamètre à l'origine »  $d_0 = 5,4$  m. La section de la pale dans le plan  $xOz$  n'est pas parabolique, et elle présente un rétrécissement à sa racine, comme montré sur la figure D.23.

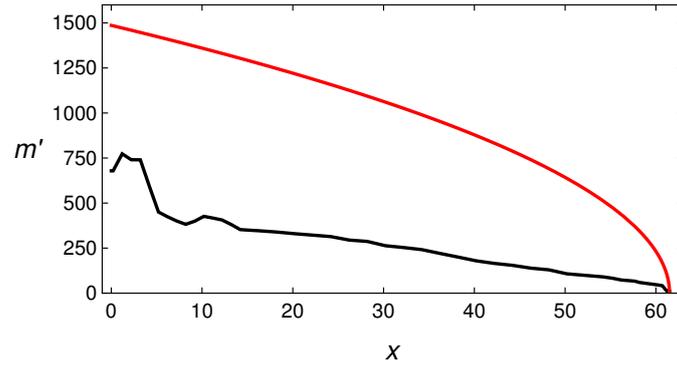
En terme de masse linéique, pour quantifier la « légèreté » de la pale évoquée dans l'énoncé et ce corrigé, on représente sur la figure D.24 la masse linéique le long de la pale, que l'on compare à la masse linéique équivalente des efforts aérodynamiques, soit

$$\frac{f_y(x)}{g} = \frac{f_0}{g} \sqrt{1 - x/L} \quad \text{avec} \quad \frac{f_0}{g} = \frac{14580 \text{ N/m}}{9,81 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 1480 \text{ kg/m} \quad (\text{D.37})$$

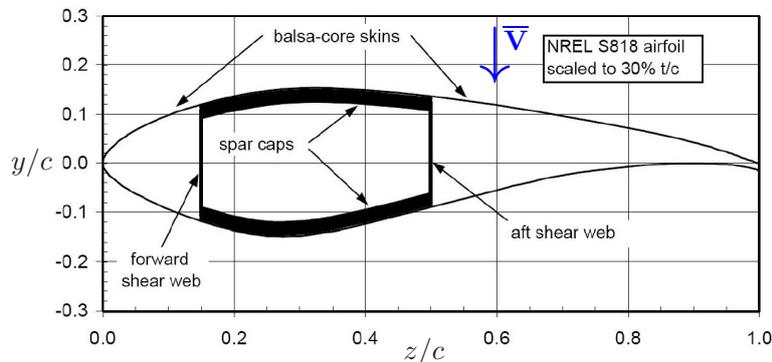
pour  $V = 50$  m/s. On observe bien une domination franche de cette dernière « masse » par rapport à la masse réelle, qui confirme l'« importance » des efforts dus aux vents forts.

- La structure interne d'une pale d'éolienne est *composite* (figure D.25). La *théorie des poutres composites*, qui permet d'étendre l'analyse et les résultats du problème 5.1 du cours, est présentée dans [Gay \(2015\)](#).
- Le matériau qui assure la rigidité de la pale est en général constitué de *fibres de verre*.
- L'analyse de la question 7 est approximative, même si les ordres de grandeur sont corrects. La physique est aussi correcte : ce cas de pale bloquée en vent fort sous « mauvaise » incidence (présentation au vent du profil le moins aérodynamique et le plus large, à « haut angle d'attaque ») est bien étudié pour le *dimensionnement des pales d'éolienne*. Cependant, les industriels utilisent des modèles structuraux plus précis, reposant sur des calculs numériques avec des *méthodes d'éléments finis*.

5. Précisément, la section de la pale est définie par la corde ('*chord*'  $c$ ) de la table 3-1 de [Jonkman et al. \(2009\)](#), tandis que le coefficient de rigidité en flexion est défini par la quantité  $\text{FlpStff}$  ('*flapwise section stiffness and inertia*') de la table 2-1.



**Fig. D.24** – En fonction de  $x$  en m, la courbe noire représente la masse linéique  $m'$ , en kg/m, d'une pale de l'éolienne NREL 5 MW. La courbe rouge représente pour comparaison la masse linéique équivalente des efforts aérodynamiques, donnée par l'équation (D.37).



**Fig. D.25** – Structure interne d'une pale d'éolienne, tirée d'une publication sur InTechOpen. On a corrigé les étiquettes des axes pour se caler sur le repère de l'énoncé, et de plus rajouté en bleu le vecteur vitesse du vent incident.

- Pour en revenir à la recherche sur l'énergie éolienne, effectuée par exemple à ForWind - IWES, un sujet actuel dans ce domaine est l'étude d'éventuelles *instabilités aéroélastiques*. Des couplages entre des modes de vibration naturels de la structure solide et des modes d'oscillation de l'écoulement turbulent autour de la pale peuvent éventuellement conduire à des résonances catastrophiques. C'est sur ce sujet que travaillait Bastian Dose, et dans cette optique que la simulation étudiée ici a été réalisée. On mentionne pour terminer que cette simulation a été réalisée avec le code OpenFOAM, un modèle de poutre non linéaire en grandes déformations côté « structure », et un modèle de turbulence hybride 'Reynolds-Averaged Navier-Stokes' - 'Large Eddy Simulations' côté « fluide »...