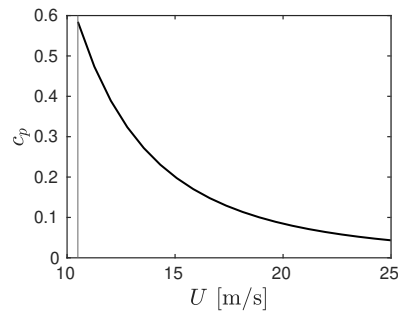


Problème : *Flexion d'un mât d'éolienne sous l'effet de la force du vent*

Première partie : étude et estimation de la norme  $F$  de la force aérodynamique à l'aide du modèle de Betz

1

$$c_p = c_p(U) = \frac{2P}{\rho A U^3} \implies$$



- $c_p$  diminue beaucoup, sinon on injecterait trop de puissance mécanique  $P_m$  i.e. trop de couple dans le générateur électrique, qui pourrait alors être endommagé.
- Pour  $U = U_0 = 10,5$  m/s la formule  $c_p(U)$  ci-dessus donne  $c_p = 0,5845$  comme on le voit au début de la courbe : cette valeur est trop proche du maximum de Betz ( $c_p = 0,59$ ) pour être réaliste. De plus elle ne coïncide pas avec  $c_p(r)$  calculé avec le dernier membre de l'équation (A.3) du sujet, pour  $r = 0,6$ , ce qui est incohérent. Proposer dans l'énoncé  $U_0 = 11$  m/s et  $r = 0,6055$  aurait été bien plus pertinent...

Nous valoriserons les élèves qui auraient remarqué cette faiblesse de l'énoncé.

2  $c_p = 0,512$  assez proche de l'optimum de Betz : très bon rendement comparable à celui de l'éolienne Enercon du pb. 8.1!

$$F = \frac{P}{u} = \frac{2P}{U(1+r)} = 4,76 \cdot 10^5 \text{ N}$$

force élevée, que l'on peut transformer en kg - force puis tonnes - force en divisant par l'accélération de la pesanteur  $g$  :

$$m_{eq} = F/g = 4,9 \cdot 10^4 \text{ kg} = 48,5 \text{ tonnes !}$$

3 Pour  $U = 21$  m/s on obtient, avec la 1<sup>ère</sup> formule dans (A.3) :

$$c_p = c_p(U) = 0,0731 .$$

D'autre part, avec la 2<sup>ème</sup> formule dans (A.3), en partant cette fois-ci de  $r = 0,962$  on obtient :

$$c_p = c_p(r) = 0,0731 .$$

Mêmes valeurs de  $c_p$  c'est cohérent...

$$F = \frac{2P}{U(1+r)} = 1,94 \cdot 10^5 \text{ N} \iff m_{eq} = F/g = 1,98 \cdot 10^4 \text{ kg} = 19,8 \text{ tonnes}$$

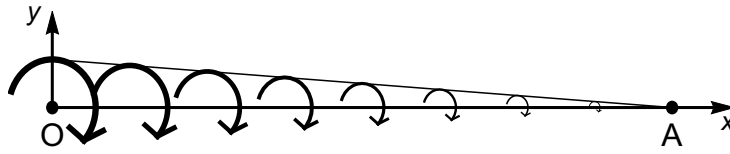
moins que la moitié du  $F$  de la question 2...

1. La remarque donnée en rouge dans notre réponse à la question 1 n'était pas attendue des élèves, mais constitue au contraire une critique de l'énoncé! Je présente mes excuses aux élèves qui auraient été perturbés par l'incohérence relevée.

Deuxième partie : estimation de la flexion et des déformations associées à l'aide du modèle d'Euler-Bernoulli

4

$$\bar{\Gamma} = \overline{\mathbf{MA}} \wedge \bar{\mathbf{F}} = (H-x)\bar{\mathbf{e}}_x \wedge (-F\bar{\mathbf{e}}_y) = -F(H-x)\bar{\mathbf{e}}_z \iff \Gamma(x) = -F(H-x) < 0.$$



Flexion vers  $-y$  raisonnable, effet fort du bras de levier facteur  $H-x$ .

5

$$v(x) = -\frac{F}{K} (Hx^2/2 - x^3/6) = -\frac{F}{6K} x^2 (3H-x).$$

6 Valeur maximale atteinte en haut :

$$v_{\max} = |v(H)| = \frac{F H^3}{3K}. \tag{1}$$

- $F \uparrow \implies v_{\max} \uparrow$  car force  $F$  à l'origine de la flexion
- $H \uparrow \implies v_{\max} \uparrow$  car, plus le mât est long, plus les bras de levier  $\uparrow$  et plus le mât est flexible
- $K \uparrow \implies v_{\max} \downarrow$  car plus le mât est rigide moins il est flexible

7

$$I = \int_{r=a}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} (r \cos \theta)^2 r dr d\theta = \left[ \frac{r^4}{4} \right]_{r=a}^b \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} (b^4 - a^4) = 0,755 \text{ m}^4.$$

8  $K = 1,51 \cdot 10^{11} \text{ N m}^2$ .

9.1  $v_{\max} = 2,89 \text{ m}$

- $v_{\max} \ll H = 140 \text{ m}$  donc hypothèse des **petits déplacements** validée.
- $v_{\max} > a$ , ordre de grandeur correct / film préliminaire où on a vu des situations où le mât fléchit au moins d'un diamètre  $2a$  puisque l'on ne voyait plus la nacelle d'en bas.
- Cependant  $v_{\max} < 2a$  : flèche trop petite / film, alors que la force est a priori plus forte!
- Dû à des **faiblesses de nos modèles** :
  - Côté « fluides » : le modèle de Betz n'est pas très fin donc nos estimations de la force aérodynamique  $F$  sont peu précises.
  - Côté « solides » : hypothèse mât cylindre droit i.e. rayons  $a$  et  $b$  uniformes peut-être trop forte... En réalité  $a$  et  $b \downarrow$  quand  $x \uparrow$  : il serait intéressant de développer modèle avec en conséquence  $I = I(x)$  d'où  $K = K(x)$ ... mais alors les calculs deviendront plus complexes...

10  $v_{\max} = 1,18 \text{ m}$  encore trop petite / film préliminaire même si ordre de grandeur correct...

11 À l'aide notamment de la loi de Hooke,

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} \bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_x - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \bar{\mathbf{1}} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} \bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_x - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} (\bar{\mathbf{e}}_y \otimes \bar{\mathbf{e}}_y + \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_z) \\ \implies \epsilon_{xx} &= -\frac{\Gamma y}{EI} = -\frac{\Gamma y}{K} = \frac{F(H-x)y}{K} \end{aligned}$$

- $F \uparrow \implies |\epsilon_{xx}| \uparrow$  car  $F$  à l'origine des déformations de flexion
- $K \uparrow \implies |\epsilon_{xx}| \downarrow$  car plus le mât est rigide moins il est flexible
- Facteur  $H-x$  dû au bras de levier traduit que les déformations sont maximales en pied de mât, lorsque le bras de levier associé à la force  $\bar{\mathbf{F}}$  est maximal.
- Facteur  $y$  indique un allongement (resp. un rétrécissement) dans la direction  $x$  si on est en amont (resp. en aval) du vent, ceci est cohérent par rapport à la figure c du sujet.

12 Maximum de  $|\epsilon_{xx}|$  atteint en pied de mât,  $x = 0$ , sur l'axe du vent incident,  $y = \pm b$  :

$$\epsilon_0 = \max |\epsilon_{xx}| = F H b / K . \quad (2)$$

13  $\epsilon_0 = 1,02 \cdot 10^{-3} \ll 1$ , ce qui valide l'hypothèse de **petite déformation**, l'une des conditions nécessaires pour être en **petite transformation**.

14 Si on dispose suffisamment de jauges de déformation verticales à différentes positions angulaires caractérisées par un angle  $\theta$  par rapport à l'axe du vent, on réalise des mesures de  $\epsilon_{xx}$  en  $y = b \cos \theta$  pour plusieurs valeurs de  $\theta$ . Ainsi on mesure

$$\epsilon_{xx}(\theta) = -\epsilon_0 \cos \theta$$

pour plusieurs valeurs de  $\theta$  : on échantillonne une sinusoïde, dont on peut extraire par ajustement l'amplitude  $\epsilon_0$ , d'où, par inversion de la formule (2), la **force aérodynamique**

$$F = K \epsilon_0 / (H b) . \quad (3)$$

Cette mesure réalisée simultanément à des mesures de vent permet de mieux comprendre la dynamique du prototype, donc, éventuellement, de l'améliorer.

### Troisième partie : ouverture

15 Lorsque l'on procède à une mise en drapeau rapide des pales, on annule la force  $\bar{F}$  représentée sur la figure c du sujet, c'est comme si on lâchait un ressort, d'où les oscillations dues essentiellement à l'**élasticité du mât**.

Si le mât était purement élastique ces oscillations ne s'amortiraient pas, cependant il y a sûrement des effets dissipatifs, des frottements, etc. qui font que les oscillations sont amorties.

### Compléments

- V112 est l'éolienne Vestas V112, présentée dans sa « famille » sur le catalogue de ce constructeur danois <https://nozebra.ipapercms.dk/Vestas/Communication/4mw-platform-brochure> .
- Les valeurs des rayons  $a$  et  $b$ , du module d'Young  $E$ , et de certaines vitesses de vent ont été estimées, car elles ne sont pas documentées sur le web. J'ai aussi augmenté la puissance nominale de la V112 : les calculs faits sont « raisonnables », le modèle est qualitativement et semi-quantitativement correct mais pas plus... comme le confirment les écarts observés entre nos « prédictions » et le film préliminaire.
- De façon plus positive, l'étude des déformations des questions 12, 13, 14 et le focus général sur la **force aérodynamique**  $\bar{F}$  sont pertinents. L'opposé de  $\bar{F}$  est bien, comme évoqué dans le pb. 8.1, la **poussée**<sup>2</sup> exercée par l'éolienne sur le vent, qui le ralentit, d'où création d'un **sillage** avec moins de vent en aval, d'où une puissance produite, par une éolienne qui serait dans ce sillage, diminuée. Ces « **pertes sillage** » dégradent les performances d'un parc éolien, en conséquence les industriels et les chercheurs dans le domaine de l'énergie éolienne s'en préoccupent ! Ainsi, les fabricants d'éoliennes caractérisent la poussée en norme  $F$  par un **coefficient de poussée**, ou « **thrust coefficient** »  $c_t$  tel que

$$F = \frac{1}{2} c_t \rho U^2 A . \quad (4)$$

Ils fournissent à leurs clients des données de  $c_p$  et  $c_t(U)$ , ce deuxième coefficient étant une quantité importante pour pouvoir appliquer un **modèle de sillage** voire mieux des **stratégies** pour réduire au maximum les pertes sillages d'un parc éolien... La mesure de  $c_p$  et  $c_t$  se fait sur un prototype en taille réelle, avec pour mesurer  $c_t$  des méthodes du type de celle proposée en question 14...

---

2. 'Thrust' en anglais.

- On n'a pas abordé le problème du dépassement ou non de la limite élastique de l'acier constituant le mât, car on est éloigné de ce risque là, comme vous pourriez le vérifier.  
De fait, les dangers qui guettent une éolienne en situation de vent très fort concernent plutôt les pales, surtout en cas de dysfonctionnement des systèmes de contrôle - commande : voyez à ce sujet le complément du document de cours de mécanique donné à la fin du pb. 8.1 *Éoliennes à axe horizontal : analyse dimensionnelle et modèle de Betz* ou encore le pb. 8.2 *Étude d'une pale d'éolienne bloquée soumise à un vent fort*.

Emmanuel Plaut, le 22 décembre 2021.