

1.1

$$\bar{\epsilon} = \alpha \delta T \bar{\mathbf{1}} \implies \boxed{\frac{dx - dX}{dX} = \alpha \delta T > 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d^3x - d^3X}{d^3X} = J - 1 = 3\alpha \delta T > 0} .$$

1.2 On peut supposer que

$$\bar{\mathbf{u}} = \alpha \delta T \bar{\mathbf{X}} \quad \text{donc} \quad \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{u}} = (1 + \alpha \delta T) \bar{\mathbf{X}} ,$$

soit une *homothétie* de rapport  $1 + \alpha \delta T$ . On a donc pour les longueurs

$$\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \alpha \delta T ,$$

et pour les volumes

$$\frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_0}{\mathcal{V}_0} = (1 + \alpha \delta T)^3 - 1 \simeq 3\alpha \delta T ,$$

d'où la possibilité de *mesures expérimentales...*

1.3

$$\boxed{k = (3\lambda + 2\mu)\alpha}$$

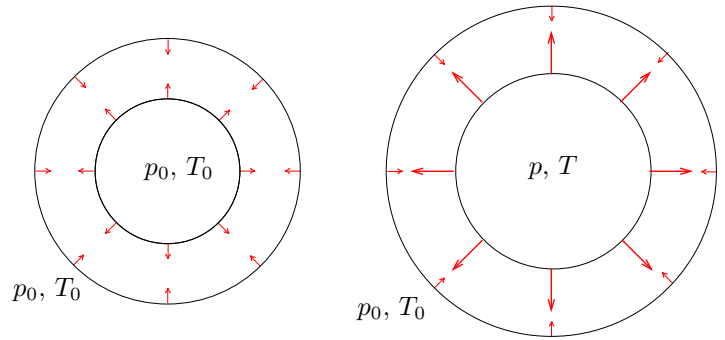
- $k > 0$ .
- $\lambda$  et  $\mu \uparrow \implies k \uparrow \dots$
- $\alpha \uparrow \implies k \uparrow \dots$

2

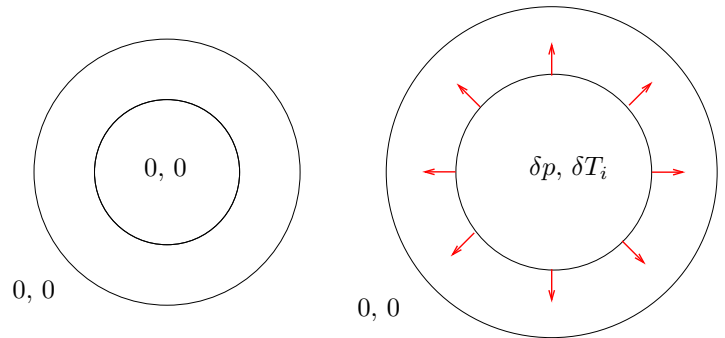
$$\boxed{\bar{\mathbf{0}} = (\lambda + 2\mu) \bar{\nabla} \text{div} \bar{\mathbf{u}} - \mu \bar{\text{rot}}(\bar{\text{rot}} \bar{\mathbf{u}}) - k \bar{\nabla} T} .$$

Nouvelle *force effective volumique* d'origine thermique  $\bar{\mathbf{f}}_{\text{thermique}} = -k \bar{\nabla} T$  qui « pousse » vers certaines régions...

**3.1** 1<sup>er</sup> schéma : configurations initiale et actuelle ainsi que les conditions limites concernant les vecteurs contraintes (en rouge) et températures :



2<sup>ème</sup> schéma : configuration initiale non chargée et configuration actuelle chargée en différence par rapport à celle-ci :



$$\boxed{\delta p = 154 \text{ bars}} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta T_i = 260 \text{ K}} .$$

**3.2** Les effets thermiques jouent dans le même sens que l'effet de la surpression...

4

$$\boxed{\gamma = \frac{\delta T_i}{b - a}} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = \gamma b = \frac{\delta T_i b}{b - a}} .$$

**5.1**  $\overline{\overline{\nabla \mathbf{u}}} = u' \overline{\mathbf{e}}_r \otimes \overline{\mathbf{e}}_r + (u/r) \overline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \overline{\mathbf{e}}_\theta$  est diagonal donc symétrique...

**5.2**

$$\boxed{n = 2} \quad \text{et} \quad \boxed{C = \frac{3\lambda + 2\mu}{3(\lambda + 2\mu)} \frac{\alpha \delta T_i}{b - a}} .$$

**6.1**

$$\boxed{[\epsilon] = \text{Mat}(\overline{\overline{\epsilon}}, \{\overline{\mathbf{e}}_r, \overline{\mathbf{e}}_\theta, \overline{\mathbf{e}}_z\}) = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\epsilon_{rr} = A - B/r^2 - 2Cr, \quad \epsilon_{\theta\theta} = A + B/r^2 - Cr} .$$

**6.2**  $\text{tr} \overline{\overline{\epsilon}} = 2A - 3Cr$  ce qui n'est pas une surprise!..

$$[\sigma] = \text{Mat}(\bar{\sigma}, \{\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z\}) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

avec notamment

$$\sigma_{rr} = \lambda (2A - 3Cr) + 2\mu (A - B/r^2 - 2Cr) - k \delta T$$

$$\sigma_{rr} = 2(\lambda + \mu)A - \beta k - \frac{2\mu B}{r^2} + (\gamma k - (3\lambda + 4\mu)C)r .$$

8 Exprimer les *conditions limites en contrainte*, qui donnent dans le cas *cas isotherme*

$$A_{\text{iso}} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{\delta p}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad B_{\text{iso}} = \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{\delta p}{\mu} .$$

- On retrouve bien l'expression de l'équation (4) du sujet.
- Les constantes  $A_{\text{iso}}$  et  $B_{\text{iso}}$  sont, si  $b$  n'est pas trop proche de  $a$ , de l'ordre de  $\delta p/E$ , ce qui est typique d'une réponse élastique.
- Par contre si  $b \rightarrow a$  les constantes  $A_{\text{iso}}$  et  $B_{\text{iso}}$  divergent : c'est d'une certaine manière le problème du dimensionnement que de limiter de façon optimale ces constantes.

9.1

$$\sigma_{rr} = \underbrace{2(\lambda + \mu)A - \frac{2\mu B}{r^2}}_{\sigma_{\text{élast}}} - \underbrace{(k \delta T + (3\lambda + 4\mu)Cr)}_{\sigma_{\text{therm}}} .$$

La contrainte d'origine thermique  $\sigma_{\text{therm}}$  est partout négative, ce qui confirme l'analyse physique déjà faite.

9.2 Comme

$$\text{ODG}(\sigma_{\text{élast}}) \simeq 15,4 \text{ MPa} , \quad \text{ODG}(\sigma_{\text{therm}}) \simeq 8000 \text{ MPa}$$

on est dans la 2<sup>ème</sup> possibilité de l'énoncé :

les effets thermiques sont importants et doivent être considérés pour le dimensionnement.

§

## Compléments

- La théorie générale de la *thermoélasticité*, présentée très succinctement dans la première partie de ce problème, est présentée et discutée de façon détaillée dans le chapitre 8 de Forest & Amestoy (2020).
- D'un point de vue purement *mécanique*, on peut critiquer le focus sur  $\sigma_{rr}$  effectué à partir de la question 7, pour des raisons de simplicité. En effet, dans le cas isotherme traité en TD, on peut se convaincre de ce que  $\sigma_{\theta\theta} > \sigma_{rr}$ , en cohérence avec l'« *effet d'arche* » ou de « *voute* » analysé plus finement dans le problème 4.5 *Étude et dimensionnement de coques sous pression pour un sous-marin* du document de cours - TD de mécanique.
- Il serait intéressant de mener les calculs analytiques de dimensionnement jusqu'au bout, à l'aide éventuellement d'un logiciel de calcul formel comme Mathematica.
- Au niveau des hypothèses posées, on vérifie facilement que les déformations d'origine thermique restent petites i.e. compatibles avec une *petite transformation* :  $\alpha \delta T_i \simeq 10^{-5} 260 \simeq 2,6 10^{-3} \ll 1$ .

- La *thermique* de ce système mériterait d'être étudiée de façon plus rigoureuse. On peut déjà remarquer que le champ de température  $T$ , qui est une mesure de l'énergie interne, doit satisfaire l'*équation* dite *de la chaleur*. En 1<sup>ère</sup> approximation celle ci s'écrit

$$\operatorname{div} \overline{\nabla} T = 0 \iff \Delta T = 0 ,$$

ce qui, compte tenu de la symétrie cylindrique du problème, conduit à un profil de température de forme analytique plus compliquée, en  $\ln(b/r)/\ln(b/a)$ . Les calculs analytiques thermoélastiques sont alors encore plus compliqués que ce qui a été esquissé dans ce problème. On peut cependant vérifier que si  $a$  et  $b$  sont « proches » ce profil reste approximativement « linéaire » i.e. une loi en  $\beta - \gamma r$  est probablement pertinente.

Il serait cependant intéressant de résoudre complètement le problème complet avec ce modèle, car c'est la dérivée par rapport à  $r$  de la température qui intervient.

- Pour terminer sur la *thermique*, l'idée que  $T = 290^\circ\text{C}$  dans toute l'eau,  $30^\circ\text{C}$  dans tout le bâtiment réacteur et tout le temps est simpliste, en réalité il faut distinguer les branches « chaudes » et « froides » du circuit primaire, selon que l'on sort du réacteur ou des générateurs de vapeur où la chaleur a été transmise au circuit secondaire, tandis que le bâtiment réacteur s'échauffe au cours du temps, malgré les systèmes d'aération existant ; la température de son atmosphère peut monter jusqu'à  $50^\circ\text{C}$  voire plus...