Mécanique des milieux continus solides et fluides

Corrigé succinct, avec compléments, du test 1 du 13 décembre 2019

Problème : *Équilibre d'un disque en rotation rapide, avec focus sur les déplacements*

1 Force ***axifuge*** ou ***centrifuge*** :

$$\bar{\mathbf{f}}_e(\overline{\mathbf{X}}) \;=\; \alpha r \bar{\mathbf{e}}_r \quad \text{avec} \quad \alpha \;=\; \rho\omega^2 \;\equiv\; m\;\ell^{-3}\;t^{-2}\;.$$

2 $\sigma_{zz} \;=\; \sigma_{rz} \;=\; \sigma_{zr} \;=\; \sigma_{\theta z} \;=\; \sigma_{z\theta} \;=\; 0\;.$

3.2

$$[\epsilon] \;=\; \mathrm{Mat}\Big(\bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}},\,\{\bar{\mathbf{e}}_r,\bar{\mathbf{e}}_\theta,\bar{\mathbf{e}}_z\}\Big) \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial u_r}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\Big) \\[2ex] 0 & \dfrac{u_r}{r} & 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial u_r}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\Big) & 0 & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

3.3 $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \;=\; \sigma_{rr}(r,z)\;\bar{\mathbf{e}}_r\otimes\bar{\mathbf{e}}_r \;+\; \sigma_{\theta\theta}(r,z)\;\bar{\mathbf{e}}_\theta\otimes\bar{\mathbf{e}}_\theta\;.$

4 $D \;=\; A\;,\quad F \;=\; \alpha+3B\;,\quad G \;=\; C\;.$

5 $B \;=\; -\dfrac{3+\nu}{8}\,\alpha\;.$

6.1 ***Saint Venant***.

6.2 $C \;=\; -3\dfrac{A+Ba^2}{h^2}\;.$

8.1 $B \;=\; -\dfrac{5}{12}\alpha\;,\quad C \;=\; (125-3c)\alpha\;.$

8.2 $\sigma_{rr} \;=\; \alpha\;c\;h^2 \;-\; \dfrac{5}{12}\alpha\;r^2 \;+\; (125-3c)\alpha\;z^2\;,\quad \sigma_{\theta\theta} \;=\; \alpha\;c\;h^2 \;-\; \dfrac{1}{4}\alpha\;r^2 \;+\; (125-3c)\alpha\;z^2\;.$

9

$$\begin{aligned} 3E\epsilon_{rr} &= 2\alpha\;c\;h^2 \;-\; \alpha\;r^2 \;+\; 2(125-3c)\alpha\;z^2\;; \\ 3E\epsilon_{\theta\theta} &= 2\alpha\;c\;h^2 \;-\; \frac{1}{3}\alpha\;r^2 \;+\; 2(125-3c)\alpha\;z^2\;; \\ 3E\epsilon_{zz} &= -2\alpha\;c\;h^2 \;+\frac{2}{3}\alpha\;r^2 \;-\; 2(125-3c)\alpha\;z^2\;. \end{aligned}$$

10 $u_r \;=\; \dfrac{1}{3E}\;\alpha\;r\;\Big(2c\;h^2 \;-\; \dfrac{1}{3}r^2 \;+\; 2(125-3c)z^2\Big)\;.$

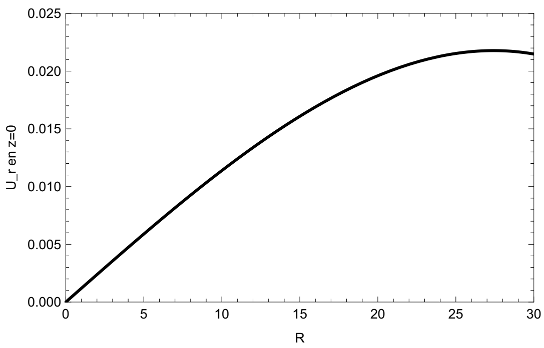
11 $u_z \;=\; \dfrac{1}{3E}\;\alpha\;\Big(-2c\;h^2\;z \;+\; \dfrac{2}{3}r^2\;z \;-\; \dfrac{2}{3}(125-3c)z^3\Big)\;.$

12 $c \;=\; \dfrac{376}{9}\;.$

14.1 $\omega \;=\; 1047 \text{ rad/s} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \;=\; 8{,}55\ 10^9 \text{ kg m}^{-3}\text{ s}^{-2} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\alpha}{27E} \;=\; 1{,}76\ 10^{-3}\text{ m}^{-2}$.

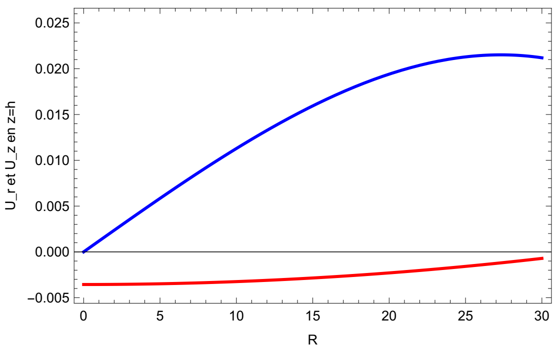
14.2 ***Accélération d'entrainement*** à l'extrémité du disque, là où elle est maximale, $\gamma_{\max} \;=\; \alpha\, a/\rho \;=\; \omega^2 a$.
Valeur de référence d'accélération $=$ g ***accélération de la pesanteur***,
$\gamma_{\max} \;\simeq\; 34000\ g$ correspond bien à une rotation « ***très rapide*** » !

14.3 $U_r = u_r$ en cm en fonction de $R = r$ en cm :



- Déplacements dans la direction radiale, vers l'extérieur, car la force centrifuge « tire » dans la direction radiale, vers l'extérieur.
- Déplacements d'amplitude faible, au maximum, de l'ordre de 0,02 cm : confirme l'hypothèse de ***petits déplacements*** posés dans l'énoncé.
- Petitesse « garantie » par la ***rigidité du matériau***, i.e., la grande valeur de E, la force centrifuge étant elle « grande » quand on s'éloigne de l'axe !

14.4 $U_r = u_r$ en cm en bleu, $U_z = u_z$ en cm en rouge en fonction de $R = r$ en cm :



- Déplacement radial U_r quasiment pas modifié par rapport à la ligne $z = 0$.
- Déplacement axial U_z partout négatif, et plus ample près de l'axe : ceci indique un ***rétrécissement du disque près de l'axe***, qui se comprend par une tendance à ne pas trop augmenter le volume du disque, et était visible sur les figures du test 0.

15.1 $\max u_r \;=\; \dfrac{452}{27}\dfrac{\rho\omega^2 a h^2}{E}$.

- $\rho \uparrow \quad \Longrightarrow \quad \max u_r \uparrow$ car matériau plus lourd $\;\Rightarrow\;$ force d'inertie plus grande ;
- $\omega \uparrow \quad \Longrightarrow \quad \max u_r \uparrow$ car rotation plus rapide $\;\Rightarrow\;$ force d'inertie plus grande ;
- $ah^2 \simeq$ volume du disque augmente $\quad \Longleftrightarrow \quad$ plus grandes dimensions caractéristiques
  $\Rightarrow$ plus grands déplacements en réponse ;
- $E \uparrow \quad \Longrightarrow \quad \max u_r \downarrow$ car matériau plus rigide $\;\Rightarrow\;$ moins grands déplacements en réponse
  la dépendance en force volumique$/E$ est typique de l'élasticité linéaire.

15.2 $\omega = 5050$ rad/s $\quad\longleftrightarrow\quad f = \dfrac{60}{2\pi}\omega = 48200$ tours/ min ***vitesse de rotation extrêmement élevée***.

15.3 ***Rupture éventuelle*** ? ***Limite du régime élastique linéaire*** ?..

§

Compléments

- On a reconnu ici une « variante » du problème 4.6 du document de cours de mécanique. La version proposée ici est moins « systématique » au sens où l'hypothèse de forme des contraintes principales (équations 4 de l'énoncé) est « forte », et pourrait même paraître a priori « arbitraire ». Cependant l'étude plus complète du problème 4.6 montre que cette hypothèse est pertinente. Elle nous a permis d'aller plus loin que le problème 4.6 en calculant le champ de déplacement (dans un cas particulier pertinent) et en étudiant celui-ci. C'est pourquoi, d'ailleurs, on a augmenté, dans la version sur la page des annales du sujet et dans ce corrigé succinct, le titre du problème posé avec la précision du « focus sur les déplacements »...

- L'application **« *volants d'inertie* »** est intéressante, on recommande la lecture de la page Wikikipédia

  https://fr.wikipedia.org/wiki/Volant_d'inertie ,

  d'où est tirée cette photographie représentant le ***volant d'inertie d'un véhicule automobile*** :

  ...