

Mécanique des milieux continus solides et fluides

Corrigé succinct du test 1 du 11 janvier 2016, avec compléments

Problème : *Étude et dimensionnement d'une coque de sous-marin sphérique*

I Étude de dimensionnement

1.a • Dans la configuration de référence,

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{T}}_0 = -p_{\text{atm}} \bar{\mathbf{e}}_r \text{ à l'extérieur } r = b, \quad \bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{T}}_0 = p_{\text{atm}} \bar{\mathbf{e}}_r \text{ à l'intérieur } r = a;$$

• dans la configuration actuelle en plongée,

$$\bar{\mathbf{T}} = -(p_{\text{atm}} + \delta p) \bar{\mathbf{e}}_r \text{ à l'extérieur } r = b, \quad \bar{\mathbf{T}} = p_{\text{atm}} \bar{\mathbf{e}}_r \text{ à l'intérieur } r = a;$$

cf. la Fig. 1a.

1.b En soustrayant les champs de la configuration de référence, notés $\bar{\mathbf{T}}_0$ ci-dessus, on obtient

• dans la configuration de référence,

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{0}} \text{ à l'extérieur } r = b \text{ et à l'intérieur } r = a;$$

• dans la configuration actuelle en plongée,

$$\bar{\mathbf{T}} = -\delta p \bar{\mathbf{e}}_r \text{ à l'extérieur } r = b, \quad \bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{0}} \text{ à l'intérieur } r = a;$$

cf. la Fig. 1b.

1.c Cause du mouvement = densité de forces surfaciques

$$\bar{\mathbf{T}} = -\delta p \bar{\mathbf{e}}_r$$

appliquée à l'extérieur en plongée. Principe de Curie : toutes les symétries de ce champ « cause » doivent se « retrouver » dans le champ « effet » = le champ de déplacement $\bar{\mathbf{u}}$. On doit pouvoir montrer que ce champ $\bar{\mathbf{u}}$ est d'une forme similaire au champ $\bar{\mathbf{T}}$:

$$\bar{\mathbf{u}} = u(r) \bar{\mathbf{e}}_r.$$

Le champ « cause » $\bar{\mathbf{T}}$ étant centripète, $T_r < 0$, il doit en être de même pour le champ « effet » $\bar{\mathbf{u}}$: a priori, $\forall r \in [a, b], u(r) < 0$.

2 $\delta p = \rho g H \simeq 1100$ bars, surpression énorme : sur une surface de 1 m², la force exercée est mg avec $m \simeq 11000$ t.

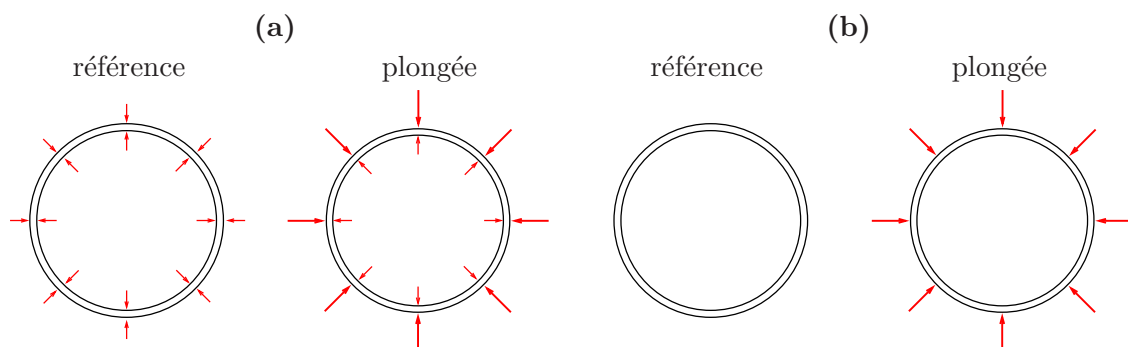


Fig. 1 – Coupes de la coque en configuration de référence (gauche) - en plongée (droite), avec représentations des densité de forces surfaciques physiques (a) - lorsque l'on travaille en différence entre ces deux configurations (b).

$$\mathbf{3.a} \quad \overline{\overline{\nabla \mathbf{u}}} = u' \overline{\mathbf{e}}_r \otimes \overline{\mathbf{e}}_r + (u/r)(\overline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \overline{\mathbf{e}}_\theta + \overline{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \overline{\mathbf{e}}_\varphi) .$$

$$\mathbf{3.b} \quad \overline{\overline{\nabla \mathbf{u}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} , \text{ partie antisymétrique et rotationnel nuls.}$$

$$\mathbf{4.a} \quad \overline{\mathbf{0}} = (\lambda + 2\mu) \overline{\nabla \text{div} \mathbf{u}} \implies \text{uniformité de } \text{div} \mathbf{u} : \quad \text{div} \mathbf{u} = 3A .$$

$$\mathbf{4.b} \quad \boxed{u = Ar + B/r^2} .$$

$$\mathbf{5} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}} = (A - 2B/r^3) \overline{\mathbf{e}}_r \otimes \overline{\mathbf{e}}_r + (A + B/r^3) (\overline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \overline{\mathbf{e}}_\theta + \overline{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \overline{\mathbf{e}}_\varphi) .$$

$$\mathbf{6} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = [(3\lambda + 2\mu)A - 4\mu B/r^3] \overline{\mathbf{e}}_r \otimes \overline{\mathbf{e}}_r + [(3\lambda + 2\mu)A + 2\mu B/r^3] (\overline{\mathbf{e}}_\theta \otimes \overline{\mathbf{e}}_\theta + \overline{\mathbf{e}}_\varphi \otimes \overline{\mathbf{e}}_\varphi) .$$

7 Conditions en contrainte :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}(r=b) \cdot \overline{\mathbf{e}}_r = -\delta p \overline{\mathbf{e}}_r \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}(r=a) \cdot (-\overline{\mathbf{e}}_r) = \overline{\mathbf{0}}$$

$$\iff \boxed{A = -\frac{b^3}{b^3 - a^3} \frac{\delta p}{3\lambda + 2\mu}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = -\frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3} \frac{\delta p}{4\mu}} .$$

$$A \equiv \frac{\ell^3 p}{\ell^3 p} \equiv 1 \quad \text{et} \quad B \equiv \frac{\ell^6 p}{\ell^3 p} \equiv \ell^3 \quad \text{en cohérence avec} \quad u = Ar + B/r^2 \equiv \ell .$$

A et B sont strictement négatives, on a donc bien $u(r) = Ar + B/r^2 < 0$ comme conjecturé en 1.c.

$$\mathbf{8.a} \quad \sigma_1 = \sigma_{rr} = (3\lambda + 2\mu)A - 4\mu B/r^3 , \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = (3\lambda + 2\mu)A + 2\mu B/r^3$$

$$\implies \tau_{\max}(r) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{3\mu|B|}{r^3} ,$$

fonction de r décroissante qui atteint son maximum en $r = a$:

$$\max \tau = \max_{r \in [a,b]} \tau_{\max}(r) = \tau_{\max}(a) = \frac{3\mu|B|}{a^3} = \frac{3}{4} \frac{\delta p}{1 - a^3/b^3} .$$

$$\mathbf{8.b} \quad \max \tau \leq \tau_0 \iff \frac{3}{4} \frac{1}{1 - a^3/b^3} \leq R \iff \frac{a^3}{b^3} \leq 1 - \frac{3}{4R} .$$

Nécessairement, $a/b > 0$, il faut donc que

$$1 - \frac{3}{4R} > 0 \iff R > R_c = \frac{3}{4} ,$$

sinon aucune valeur de $b > a$ ne permet de satisfaire le critère. Dans ce cas défavorable

$$R \leq R_c \iff \tau_0 \leq \frac{3}{4} \delta p ,$$

le matériau utilisé serait *trop peu résistant* pour assurer la tenue de la coque, même extrêmement épaisse, dans le régime élastique ; *le dimensionnement n'est possible qu'après un bon choix de matériau*. Dans le cas favorable où $R > R_c$, la valeur minimale de b qui satisfait le critère est

$$\boxed{b = a (1 - R_c/R)^{-1/3}} . \tag{1}$$

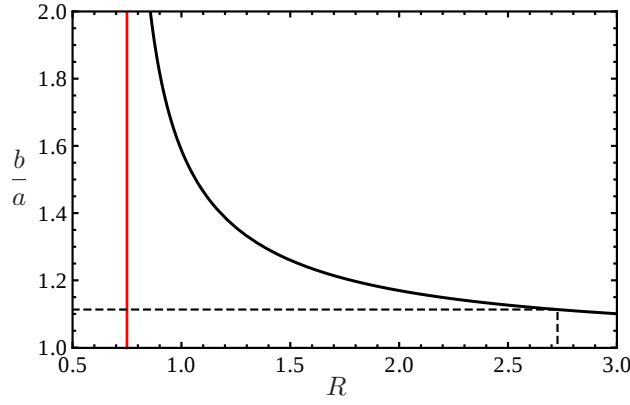


Fig. 2 – Rapport de rayon optimal b/a en fonction du paramètre $R = \tau_0/\delta p$, d'après l'équation (1). La droite verticale montre la valeur critique de R_c au dessous de laquelle aucune solution n'existe. Les segments pointillés montrent les valeurs correspondants à l'application numérique de la question 8.d.

8.c Cf. la Fig. 2.

Matériau peu résistant élastiquement $\leftrightarrow R \rightarrow R_c^+ \leftrightarrow b/a \rightarrow +\infty$: nécessité d'une coque extrêmement épaisse voire infiniment épaisse.

Au contraire, matériau extrêmement résistant élastiquement $\leftrightarrow R \rightarrow +\infty \leftrightarrow b \rightarrow a^+$: la coque peut être très mince.

8.d $R = 2,727 \implies b = 1,113 a = 61,22 \text{ cm} \implies \boxed{e = 6,22 \text{ cm}} .$

II Analyse physique fine et validation

9.a $A = -8,00 \cdot 10^{-4}$ et $B = -1,96 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$.

9.b Avec $A' = -A > 0$, $B' = -B > 0$:

$$v(r) = |u(r)| = |Ar + Br^{-2}| = -u(r) = A'r + B'r^{-2} ,$$

$$v'(r) = A' - 2B'r^{-3} , \quad v''(r) = 6B'r^{-4} .$$

Ainsi $v'' > 0$ donc v' est croissante sur $[a, b]$. Comme $v'(b) = -9,06 \cdot 10^{-4} < 0$, $v' < 0$ sur $[a, b]$. La valeur maximale atteinte par $|v'(r)|$ sur $[a, b]$ est donc

$$\max |v'(r)| = |v'(a)| = 1,55 \cdot 10^{-3} .$$

D'autre part, comme $v' < 0$, v est décroissante sur $[a, b]$. La valeur maximale atteinte par $v(r)$ sur $[a, b]$ est donc

$$\max v(r) = v(a) = 0,109 \text{ cm} .$$

Cf. la Fig. 3a, la fonction $v(r)$ varie peu dans l'intervalle $[a, b]$:

$$\delta v / \max v = [v(a) - v(b)] / v(a) \simeq 7\% .$$

En première approximation on retient que dans toute la coque

$$|u(r)| = v(r) \simeq v(a) \simeq 0,1 \text{ cm} .$$

9.c Sur la Fig. 3b, on voit bien le **déplacement centripète de la coque** et sa **contraction** sous l'effet de la surpression extérieure.

9.d *L'hypothèse de petits déplacements est bien vérifiée*, puisqu'en ordre de grandeur

$$\frac{|u(r)|}{a} \simeq \frac{0,1 \text{ cm}}{55 \text{ cm}} \simeq 2 \cdot 10^{-3} \ll 1 .$$

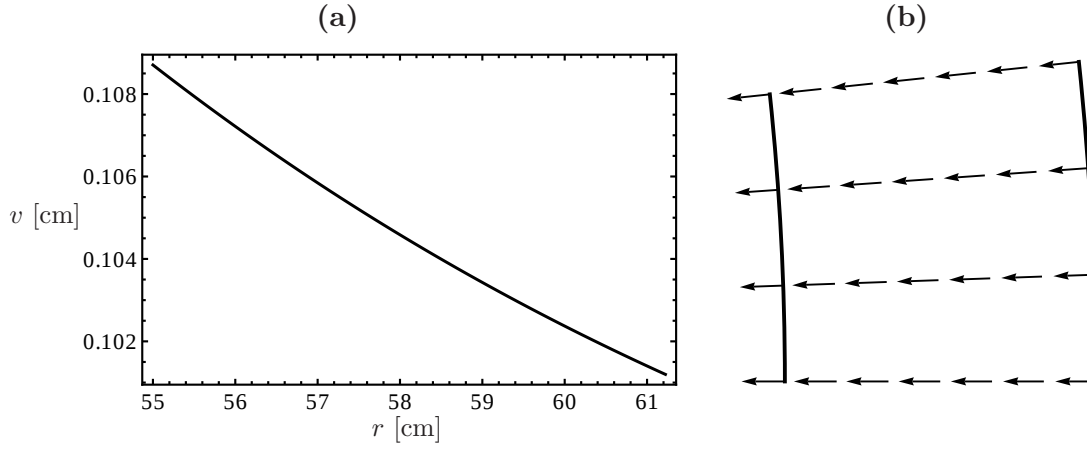


Fig. 3 – **a** : valeur absolue du déplacement radial en fonction du rayon, à l'intérieur de la coque. **b** : représentation du champ de déplacement vectoriel, amplifié d'un facteur 8 pour plus de visibilité.

10 L'hypothèse de petite transformation

$$\forall r \in [a, b], \quad \left\| \overline{\nabla \mathbf{u}} \right\| \ll 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall r \in [a, b], \quad u'(r) \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{u(r)}{r} \ll 1.$$

La deuxième condition équivaut à l'hypothèse de petits déplacements déjà démontrée.

De plus

$$\forall r \in [a, b], \quad |u'(r)| = |v'(r)| \leq \max |v'(r)| = 1,55 \cdot 10^{-3} \ll 1,$$

donc la première condition est vérifiée.

Ainsi *l'hypothèse de petite transformation est bien vérifiée.*

Compléments :

- Ce problème est une « variante » du sujet du test 1 de novembre 2013. Dans son esprit, il est aussi très proche du sujet du test 1 de novembre 2010, qui a été traité en TD. Je vous renvoie bien sûr aux compléments déjà donnés dans le document de cours - TD PDF sur le sujet du test 1 de novembre 2013.
- Contrairement au sujet du test 1 de novembre 2013, on ne fait pas ici l'approximation de coque mince. Pour retrouver la « bonne valeur » de l'épaisseur (à savoir, son épaisseur réelle, $e = 6,35$ cm), il faut considérer un acier plus résistant élastiquement que celui considéré en novembre 2013 : on a augmenté la valeur limite d'élasticité τ_0 de 240 MPa (valeur utilisée dans l'approximation de coque mince en 2013) à 300 MPa.

Si on suppose que $\tau_0 = 240$ MPa et on utilise la formule établie en coque épaisse pour b , on obtient maintenant

$$e = 8,3 \text{ cm},$$

ce qui confirme la mauvaise qualité de l'approximation de coque mince. D'autre part, on trouve une coque trop épaisse par rapport à la réalité, sans doute plus proche du cas étudié ici ($\tau_0 = 300$ MPa, coque « épaisse »).

Grâce à l'utilisation d'*aciers forgés*, une limite d'élasticité $\tau_0 = 300$ MPa est facile à obtenir.