

Séance 8 de **mécanique des milieux continus solides et fluides**

Emmanuel Plaut

- 1 Bilan global général d'énergie cinétique en MC
 - 2 Cas d'un **solide élastique** : énergie potentielle élastique
-
- 3 **Hydro- et aérostatique**



<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc>

Loi d'évolution de l'énergie cinétique ?

L'énergie cinétique d'un domaine matériel Ω_t en mouvement est

$$E_c = \iiint_{\Omega_t} \frac{1}{2} d^3m \bar{\mathbf{v}}^2 = \iiint_{\Omega_t} e_c d^3m \quad \text{avec} \quad e_c = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}^2 .$$

Loi d'évolution de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \bar{\mathbf{f}}_{\text{vol}} + \overline{\text{div } \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (*)$$

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot (*) \iff \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \frac{de_c}{dt} = \bar{\mathbf{f}}_{\text{vol}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + (\overline{\text{div } \bar{\boldsymbol{\sigma}}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad (**)$$

$$\iiint_{\Omega_t} (**) d^3x \iff$$

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{de_c}{dt} d^3x = \frac{dE_c}{dt} = \iiint_{\Omega_t} d^3x \bar{\mathbf{f}}_{\text{vol}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \iiint_{\Omega_t} (\overline{\text{div } \bar{\boldsymbol{\sigma}}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x$$

Loi d'évolution de l'énergie cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{\Omega_t} d^3\bar{\mathbf{f}}_{\text{vol}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \iiint_{\Omega_t} (\overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x$$

$$\iiint_{\Omega_t} (\overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \text{div}(\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) d^3x - \iiint_{\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\nabla} \bar{\mathbf{v}} d^3x$$

$$\iiint_{\Omega_t} (\overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x = \iint_{\partial\Omega_t} d^2\bar{\mathbf{f}}_{\text{surf}} \cdot \bar{\mathbf{v}} - \iiint_{\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\mathbf{D}} d^3x$$

 \Leftrightarrow

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

avec $P_{\text{ext}} =$ **puissance des efforts extérieurs**

$$P_{\text{ext}} = \iiint_{\Omega_t} d^3\bar{\mathbf{f}}_{\text{vol}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \iint_{\partial\Omega_t} d^2\bar{\mathbf{f}}_{\text{surf}} \cdot \bar{\mathbf{v}}$$

et $P_{\text{int}} =$ **puissance des efforts intérieurs** $= - \iiint_{\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\mathbf{D}} d^3x .$

En **solides indéformables**, taux de déformation $\bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{0}} \Rightarrow P_{\text{int}} = 0 !$

Loi d'évolution de l'énergie cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{\Omega_t} d^3\bar{\mathbf{f}}_{\text{vol}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \iiint_{\Omega_t} (\overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x$$

$$\iiint_{\Omega_t} (\overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \text{div}(\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) d^3x - \iiint_{\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\nabla} \bar{\mathbf{v}} d^3x$$

$$\iiint_{\Omega_t} (\overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \bar{\mathbf{v}} d^3x = \iint_{\partial\Omega_t} d^2\bar{\mathbf{f}}_{\text{surf}} \cdot \bar{\mathbf{v}} - \iiint_{\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\mathbf{D}} d^3x$$

 \Leftrightarrow

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

avec $P_{\text{ext}} =$ **puissance des efforts extérieurs**

$$P_{\text{ext}} = \iiint_{\Omega_t} d^3\bar{\mathbf{f}}_{\text{vol}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \iint_{\partial\Omega_t} d^2\bar{\mathbf{f}}_{\text{surf}} \cdot \bar{\mathbf{v}}$$

$$\text{et } P_{\text{int}} = \text{puissance des efforts intérieurs} = - \iiint_{\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \overline{\mathbf{D}} d^3x .$$

Contraintes et **taux de déformation** \Rightarrow en général $P_{\text{int}} \neq 0 \Rightarrow E_c$ modifiée !

Évolution de l'énergie cinétique : cas d'un solide élastique

(H) petits déplacements et petite transformation

⇒ simplification possible de $P_{\text{int}} = - \iiint_{\Omega_t} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} d^3x$?

$$\text{Oui ! } P_{\text{int}} = - \iiint_{\Omega} \overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\epsilon}}} d^3X$$

(H) solide isotrope élastique en régime linéaire

⇒ ? $\overline{\overline{\sigma}} = \lambda(\text{tr}\overline{\overline{\epsilon}})\overline{\overline{\mathbf{1}}} + 2\mu\overline{\overline{\epsilon}} \Rightarrow P_{\text{int}} = - \frac{dE_p}{dt}$

avec $E_p = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\epsilon}} d^3X$ énergie potentielle élastique ≥ 0

$$\frac{1}{2} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\epsilon}} = \frac{\lambda}{2} (\epsilon_{ii})^2 + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \Rightarrow E_p > 0 \text{ dès que } \overline{\overline{\epsilon}} \neq \overline{\overline{\mathbf{0}}}$$

(C) loi d'évolution de l'énergie totale

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}} \Rightarrow \boxed{\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d(E_c + E_p)}{dt} = P_{\text{ext}}}$$

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d(E_c + E_p)}{dt} = P_{\text{ext}}$$

Donc solide élastique isolé \implies conservation de l'énergie totale

$$E_{\text{tot}} = E_c + E_p = \text{constante}$$

avec souvent un jeu entre les deux,

$$E_c \uparrow \iff E_p \downarrow \quad \text{puis} \quad E_c \downarrow \iff E_p \uparrow \quad \text{puis...}$$

correspondant à des **oscillations** typiques d'un **système conservatif**.

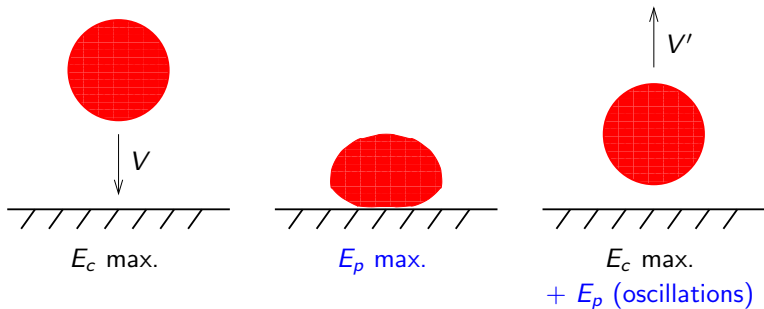


Théorie de ces vibrations = « **dynamique des structures** »...

Exemples simples : **Pb. 4.8 Ondes dans un solide élastique (TD)** ;

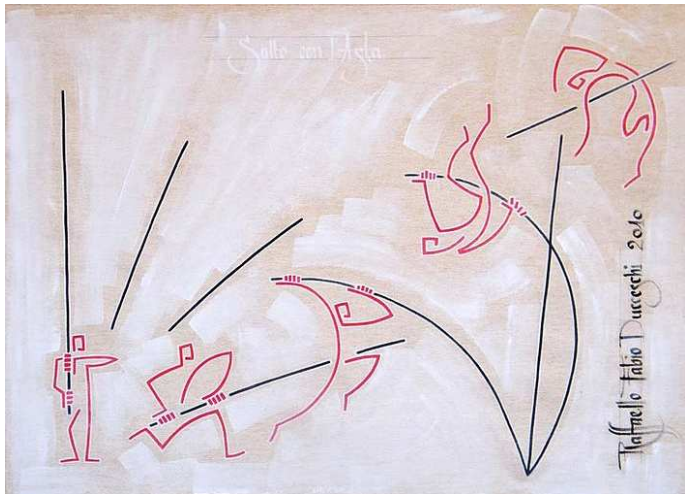
Pb 6.1 Lopin en compression...

Exemple plus complexe de transformation $E_c \rightarrow E_p \rightarrow E_c$:
impact d'une balle élastique sur une plaque rigide



Exemple plus complexe de transformation $E_c \rightarrow E_p \rightarrow E_c$: saut à la perche

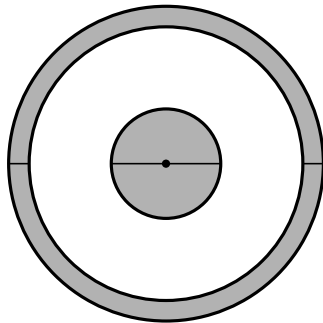
$$E_c = \frac{1}{2}mV_{\text{horizontale}}^2 \rightarrow E_p \rightarrow E_c = \frac{1}{2}mV_{\text{verticale}}^2$$



Statique des fluides

Définition physique d'un fluide ?

Cf. expérience de Couette :

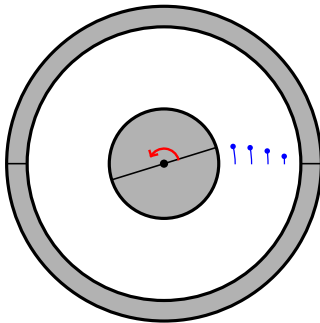


Statique des fluides

Définition physique d'un fluide ?

Cf. **expérience de Couette** :

couple appliqué à solide \rightarrow nouvel **équilibre** :



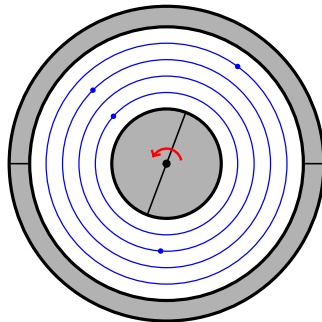
Statique des fluides

Définition physique d'un fluide :

Matériau ne pouvant supporter des **contraintes tangentielles** au repos.

Cf. **expérience de Couette** :

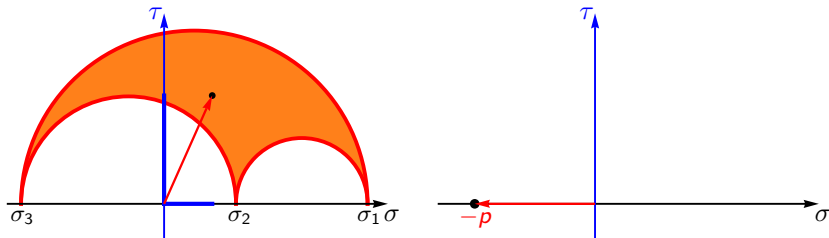
couple appliqué à fluide → **écoulement** :



Statique des fluides

Matériaux ne pouvant supporter des **contraintes tangentielles** au repos

Quelle peut être la **représentation de Mohr** correspondante ?



$\sigma_3 = \sigma_2 = \sigma_1 = -p$ **champ de pression** scalaire

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{\bar{1}}$$

Statique des fluides

∃ **champ de pression** scalaire p tel que

$$\bar{\bar{\sigma}} = -\rho \bar{\mathbf{1}}$$

⇒ avec la **loi d'évolution de la quantité de mouvement** :

$$\bar{\mathbf{0}} = \rho \bar{\mathbf{g}} + \bar{\text{div}} \bar{\bar{\sigma}} = \rho \bar{\mathbf{g}} - \bar{\nabla} p = -\bar{\nabla} \hat{p}$$

⇒ **loi de l'hydrostatique** (suppose $\bar{\mathbf{g}} = -g \bar{\mathbf{e}}_z$ et ρ constants !) :
la pression motrice

$$\hat{p} = p + \rho g z \text{ est indépendante de } \bar{\mathbf{x}} \text{ dans un domaine fluide}$$

Une interprétation physique simple est possible:
il faut supporter le poids des colonnes fluides supérieures.

Application de la loi de l'hydrostatique \simeq loi de l'aérostatique

L'**air** composant notre **atmosphère** est en première approximation un **gaz parfait** de masse molaire $M = 29$ g,

On peut mesurer la pression et la température au niveau du sol,

$$p \simeq 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad \text{et} \quad T \simeq 300 \text{ K}$$

\implies ordre de grandeur de la **masse volumique**

$$\rho = \frac{Mp}{RT} \simeq \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{8,3 \cdot 300} \simeq 1,2 \text{ kg/m}^3 \simeq 1 \text{ kg/m}^3$$

\implies ordre de grandeur de la **hauteur h d'atmosphère « homogène »**

$$p \simeq \rho gh \iff h \simeq \frac{p}{\rho g} \simeq \frac{10^5}{1 \cdot 10} \simeq 10^4 \text{ m} = 10 \text{ km.}$$

Attention, $p \neq \rho_0 g(h - z)$ dans toute l'atmosphère, cf. la Fig. 7.4 du tome 2 !

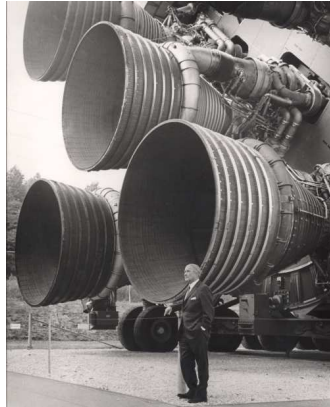
L'expérience de Magdeburg par von Guericke en 1654 prouve que 10^5 Pa c'est beaucoup !



[Schott 1657 Page 'Magdeburg hemispheres' de Wikipedia]

Les forces de pression agissent aussi sur les fusées
et on les prend en général en compte dans le calcul de la poussée

⇒ poussée dans le vide > poussée au niveau de la mer !



[NASA Fusée Saturn V]

TD : Pb 4.8 Ondes dans un solide élastique**Équipe pédagogique pour le TD :**

| Groupes | salle | chargé de TD | Département | Laboratoire |
|-----------|-------|----------------------|-------------------------|-------------|
| 1.1 & 2.1 | A303 | Antonio Pereira* | ENSG* | Lemta* |
| 1.2 & 2.2 | A304 | Sébastien Allain | Matériaux | IJL |
| 1.3 & 2.3 | A306 | Jean-Sébastien Kroll | Procédés, Énergie, Env. | IJL |
| 1.4 & 2.4 | A307 | Mathieu Jenny | Énergie & Fluides | Lemta |

* en remplacement de Lucile Dezerald | Matériaux | IJL, absente pour raison familiale...

Les élèves en exposé de TD**sont en salle 5 minutes avant pour démarrer à l'heure !****Rappel : page web du module :**

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc>

Questions ?