

## Séance 7 de **Mécanique des milieux continus solides et fluides**

Emmanuel Plaut, Sébastien Allain,  
Lucile Dézerald, Matthieu Gisselbrecht, Mathieu Jenny & Jean-Sébastien Kroll

### 1 Retour sur la loi de comportement des solides élastiques

### 2 Ouverture Recherche & Développement (S. A.)

Comportement en traction de l'acier TWIP

### 3 Principes de l'analyse dimensionnelle

Méthodologie de Vaschy-Buckingham - Théorème  $\pi$

### 4 1<sup>er</sup> exemple d'application : impact élastique d'une balle

### 5 2<sup>ème</sup> exemple d'application : flambement d'une poutre

### 6 Question

## Retour sur la loi de comportement des solides élastiques

Version **contraintes** → **déformations**

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{\mathbf{1}}} = O \left( \frac{\bar{\bar{\sigma}}}{E} \right)$$

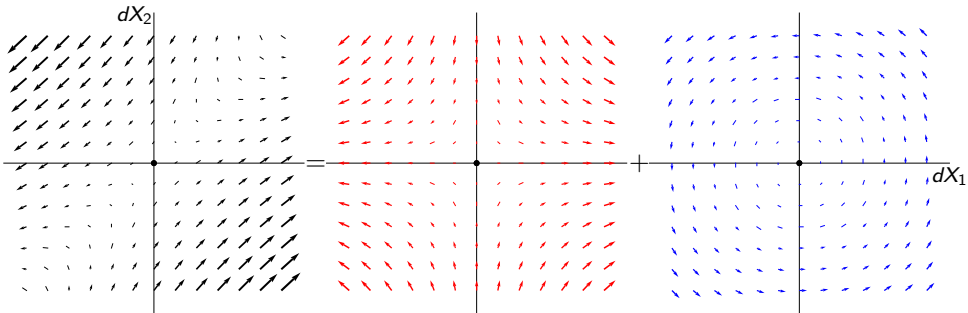
Matériau solide	$E$ [GPa]	$\nu$
Acier	180 à 220	0,28
Aluminium	70	0,33
Diamant	1000	0,2
Verre	90	0,22
Caoutchouc	0,001 à 0,1	0,49
Béton	20 à 50	0,2

## Retour sur la loi de comportement des solides élastiques

Version déplacements et **déformations** → **contraintes** ; avec  $\lambda$  et  $\mu = O(E)$  :

$$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\epsilon} + \lambda (\text{tr}\bar{\epsilon}) \bar{\mathbf{1}} = 2\mu \bar{\epsilon} + \lambda (\text{div}\bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{1}}$$

$$d\bar{\mathbf{u}} = \bar{\nabla}\bar{\mathbf{u}} \cdot d\bar{\mathbf{X}} = \underbrace{\bar{\epsilon} \cdot d\bar{\mathbf{X}}}_{d\bar{\mathbf{u}}_{\text{d\'ef}}} + \underbrace{\bar{\Omega} \cdot d\bar{\mathbf{X}}}_{d\bar{\mathbf{u}}_{\text{rot}}}$$



Donc sur une coupe virtuelle cercle - sphère centrée sur le point analysé :

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{d\bar{\mathbf{X}}}{\|d\bar{\mathbf{X}}\|} \implies \bar{\mathbf{T}} = \bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \frac{2\mu d\bar{\mathbf{u}}_{\text{d\'ef}}}{\|d\bar{\mathbf{X}}\|} + \lambda (\text{div}\bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{n}}.$$

## Principes de l'analyse dimensionnelle

Toute **grandeur physique**  $\phi$  rencontrée en mécanique classique a une **dimension physique** produit de puissances des **dimensions physiques fondamentales** masse  $m$ , longueur  $\ell$  et temps  $t$ ,

$$\phi \equiv m^\alpha \ell^\beta t^\gamma$$

«  $\phi$  est homogène au produit d'une masse puissance  $\alpha$   
par une longueur puissance  $\beta$   
par un temps puissance  $\gamma$  »

$(\alpha, \beta, \gamma)$  **exposants des dimensions fondamentales**

$m^\alpha \ell^\beta t^\gamma$  **fonction de dimensions** de  $\phi$

## Principes de l'analyse dimensionnelle

$$\forall \phi, \quad \exists (\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{tels que} \quad \phi \equiv \underbrace{m^\alpha \ell^\beta t^\gamma}_{\text{fonction de dimensions de } \phi}$$

La fonction de dimensions de  $\phi$  se déduit de sa formule de définition physique :

$$\phi = \text{vitesse } \bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad v \equiv \frac{\ell}{t} \equiv \ell t^{-1}$$

$$\phi = \text{accélération } \bar{\gamma} = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \gamma \equiv \frac{v}{t} \equiv \ell t^{-2}$$

$$\phi = \text{force } \bar{F} = m \bar{\gamma} \quad \Longrightarrow \quad F \equiv m \ell t^{-2}$$

$$\phi = \text{gradient de pression } \bar{\nabla} p \quad \Longrightarrow \quad \bar{\nabla} p \equiv m \ell^{-2} t^{-2}$$

## L'analyse dimensionnelle est liée au problème de la mesure des grandeurs physiques par choix d'un système d'unités

### Mesure des grandeurs fondamentales :

Comparaison à des **étalons de mesure** :

$$\text{mes}(m) = \frac{m}{M} \quad \text{avec} \quad M = 1 \text{ kg dans le SI}$$

$$\text{mes}(\ell) = \frac{\ell}{L} \quad \text{avec} \quad L = 1 \text{ m dans le SI}$$

$$\text{mes}(t) = \frac{t}{T} \quad \text{avec} \quad T = 1 \text{ s dans le SI}$$

### Mesure des grandeurs dérivées :

La **fonction de dimensions** détermine l'**unité dérivée**.

Par exemple

$$p = \text{pression} \equiv m^1 \ell^{-1} t^{-2} \quad \implies \quad 1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg}/(\text{m s}^2) .$$

Toute équation de la physique doit être invariante par changement de système d'unité donc homogène dimensionnellement : fonctions de dimensions de tous les termes identiques.

Dans le cas contraire on a une équation

**inhomogène dimensionnellement !**

Vous devez toujours tester l'homogénéité dimensionnelle de vos formules, pour éliminer des **erreurs (INHD)**.

Exemple : 2 formules du laplacien en cylindriques se contredisent :

$$(F1) \quad \iff \quad \Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

$$(F2) \quad \iff \quad \Delta p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad \text{INHD !}$$

Qui a tort, qui a raison ? **F2 a forcément tort.** F1 a peut-être raison.

**Toute ambiguïté concernant le choix d'un système d'unités est extrêmement dangereuse ! ... voire mortelle !**

Cf. l'exemple de la **sonde américaine Mars Climate Orbiter**, construite pour la partie infrastructures et moteurs par **Lockheed Martin Astronautics** pour la **NASA** en 1997-98 :



Coût de la sonde  
 $\simeq 200$  M\$



**Toute ambiguïté concernant le choix d'un système d'unités est extrêmement dangereuse ! ... voire mortelle !**

**sonde américaine Mars Climate Orbiter,**  
lancée par la **NASA**, sous le contrôle du **Jet Propulsion Laboratory**,  
en décembre 1998 :

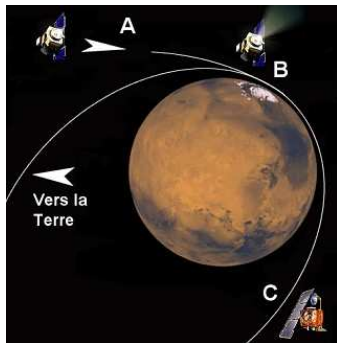


Coût du lancement  
 $\simeq 90$  M\$

**Toute ambiguïté concernant le choix d'un système d'unités est extrêmement dangereuse ! ... voire mortelle !**

sonde américaine **Mars Climate Orbiter**,  
pilotée vers Mars sous le contrôle du **Jet Propulsion Laboratory**,  
de façon à préparer sa mise en orbite,  
entre décembre 1998 et septembre 1999.

Le 23 septembre 1999 devait avoir lieu cette mise en orbite elliptique par freinage  
moteur, la sonde devant passer à 140 km environ de Mars :

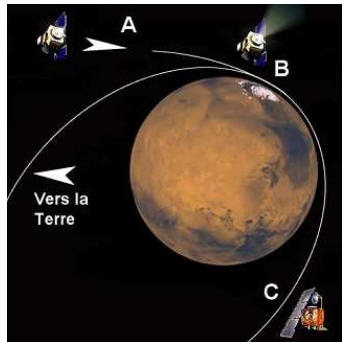


## Toute ambiguïté concernant le choix d'un système d'unités est extrêmement dangereuse ! ... voire mortelle !

la sonde américaine Mars Climate Orbiter,  
disparaît à jamais le 23 septembre 1999 à 11h06 !

Sonde passée à 57 km de Mars donc **brûlée dans son atmosphère** !

Dans les manœuvres de pilotage de la sonde, les ingénieurs du JPL envoyaient des **commandes de poussée** qu'ils croyaient en **Newton** au moteur de LMA qui les interprétait en **livre-force** !



Coût de l'**erreur d'unité**  
 $\simeq 300$  M\$

## Théorème $\pi$ (VB) : réduction de $\phi = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$

- Soit un système physique dépendant de **paramètres de contrôle**  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  numérotés d. s. q. les 3 premières colonnes de la **matrice des exposants des dimensions**

	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\dots$	$\phi_k$	$\dots$	$\phi_n$
$m$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\dots$	$\alpha_k$	$\dots$	$\alpha_n$
$l$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\dots$	$\beta_k$	$\dots$	$\beta_n$
$t$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\dots$	$\gamma_k$	$\dots$	$\gamma_n$

forment une matrice  $3 \times 3$  inversible

$\iff \phi_1, \phi_2, \phi_3$  **grandeurs fondamentales**

**dimensionnellement indépendantes.**

- **Adimensionner** les autres **paramètres de contrôle** en introduisant des **groupements  $\pi$**

$$\pi_k = \frac{\phi_k}{\phi_1^{a_k} \phi_2^{b_k} \phi_3^{c_k}} \equiv 1 \text{ pour } k = 4, \dots, n.$$

## Théorème $\pi$ (VB) : réduction de $\phi = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$

- ▶ **Adimensionner** les autres **paramètres de contrôle** en introduisant des **groupements**  $\pi$

$$\pi_k = \frac{\phi_k}{\phi_1^{a_k} \phi_2^{b_k} \phi_3^{c_k}} \equiv 1 \quad \text{pour } k = 4, \dots, n.$$

- ▶ **Adimensionner** de même la **grandeur physique dépendante** d'intérêt  $\phi$ , i.e. introduire

$$\pi_0 = \frac{\phi}{\phi_1^{a_0} \phi_2^{b_0} \phi_3^{c_0}} \equiv 1.$$

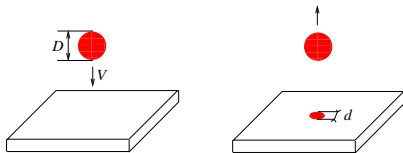
- ▶ Alors la relation  $\phi = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  peut s'écrire

$$\pi_0 = F(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \pi_4, \dots, \pi_n) = F\left(\frac{\phi_1}{\Phi_1}, \frac{\phi_2}{\Phi_2}, \frac{\phi_3}{\Phi_3}, \pi_4, \dots, \pi_n\right)$$

et en changeant les étalons de mesure indépendants  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , il vient

$$\pi_0 = F(\pi_4, \dots, \pi_n).$$

## 1<sup>er</sup> exemple d'application : impact élastique d'une balle



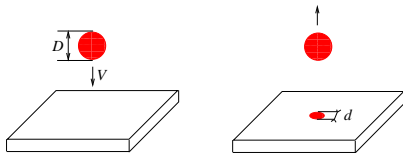
- ▶ Grandeur dépendante : diamètre  $d$  de la zone d'impact
- ▶ Paramètres de contrôle :  $D$ ,  $\rho$ ,  $V$ ,  $E$  et  $\nu$

Expériences numériques de Bathe :

Matériau	$E$ [MPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$V$ [m/s]	$\nu$	$d/D$	Symbole
Alumine	366000	3960	43	0,22	0,15	●
	"	"	59	0,22	0,17	●
	"	"	77	0,22	0,19	●
Aluminium	69000	2705	80	0,33	0,25	●
	"	"	126	0,33	0,30	●
	"	"	345	0,33	0,45	●
Caoutchouc	3,93	1060	5	0,47	0,50	●
	"	"	7	0,47	0,55	●
	"	"	12	0,47	0,70	●

[ Sonin 2001 The  $\Phi$  basis of dimensional analysis. MIT Lecture ]

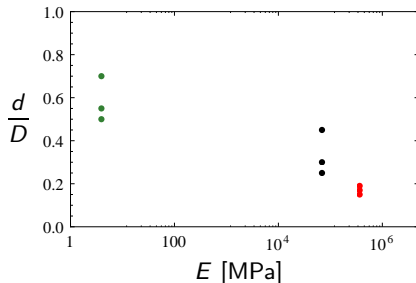
## 1<sup>er</sup> exemple d'application : impact élastique d'une balle



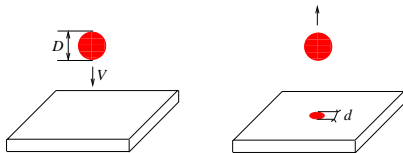
- ▶ Grandeur dépendante : diamètre  $d$  de la zone d'impact
- ▶ Paramètres de contrôle :  $D$ ,  $\rho$ ,  $V$ ,  $E$  et  $\nu$

Expériences numériques de Bathe : Alumine ● Aluminium ● Caoutchouc ●

Influence de  $E$  ?



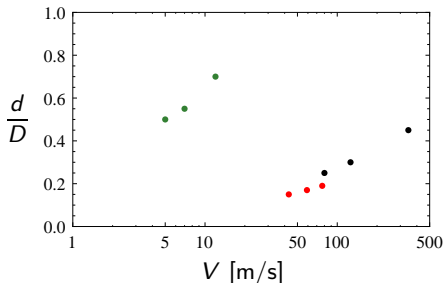
## 1<sup>er</sup> exemple d'application : impact élastique d'une balle



- ▶ Grandeur dépendante : diamètre  $d$  de la zone d'impact
- ▶ Paramètres de contrôle :  $D$ ,  $\rho$ ,  $V$ ,  $E$  et  $\nu$

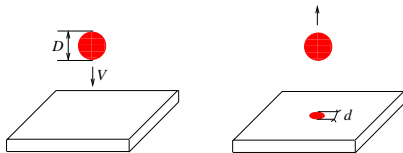
Expériences numériques de Bathe : Alumine ● Aluminium ● Caoutchouc ●

Influence de  $V$  ?





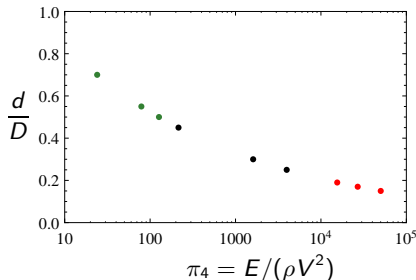
# 1<sup>er</sup> exemple d'application : impact élastique d'une balle



- ▶ Grandeur dépendante : diamètre  $d$  de la zone d'impact
- ▶ Paramètres de contrôle :  $D$ ,  $\rho$ ,  $V$ ,  $E$  et  $\nu$

Expériences numériques de Bathe : Alumine ● Aluminium ● Caoutchouc ●

Analyse dim. : théorème  $\pi \rightarrow \pi_0 = \frac{d}{D} = F(\pi_4, \pi_5) = F\left(\frac{E}{\rho V^2}, \nu\right) \simeq F\left(\frac{E}{\rho V^2}\right)$

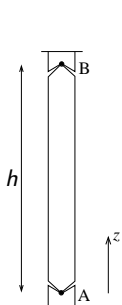


∃ une courbe maîtresse !

## 2<sup>ème</sup> exemple d'application : flambement d'une poutre

Poutre cylindrique de diamètre  $d$ , axe  $Az$ , en liaison pivot en A, pivot - glissière en B :

Pas de force appliquée :    Force appliquée  $F < F_c$  :    Force appliquée  $F > F_c$  :



compression pure



**instabilité de flambement !**

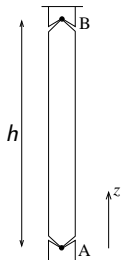
- ▶ Grandeur dépendante : **seuil de flambement  $F_c$** .
- ▶ Paramètres de contrôle : diamètre  $d$ , hauteur  $h$ , module d'Young  $E$ .  
Seulement 2 grandeurs dimensionnellement indépendantes :  $d$  et  $E$ .

$$VB \rightarrow \pi_3 = h/d, \quad \pi_0 = F_c/(d^a E^b) = F_c/(d^2 E) = f(d, E, \pi_3) = f(\pi_3)$$

## 2<sup>ème</sup> exemple d'application : flambement d'une poutre

Poutre cylindrique de diamètre  $d$ , axe  $Az$ , en liaison pivot en A, pivot - glissière en B :

Pas de force appliquée : Force appliquée  $F < F_c$  : Force appliquée  $F > F_c$  :



compression pure



**instabilité de flambement !**

Vaschy - Buckingham  $\rightarrow F_c = E d^2 f(h/d)$

Expériences  $\rightarrow F_c \propto d^4$ ,  $F_c \propto h^{-2}$

Idee :  $f(h/d) = F_0 (h/d)^\alpha \rightarrow \alpha = -2 \rightarrow$

$$F_c = F_0 \frac{E d^4}{h^2}$$

cf. le pb. 5.1...

## TD : Pb 4.3

### Dimensionnement d'un tuyau contenant un fluide sous pression

#### Rappel : équipe pédagogique pour le TD :

Chargé(e) de TD	Labo.	Spécialité	Groupe(s)	Salle
L. Dézerald	IJL	Méca. et $\Phi$ des <b>solides</b>	XM1 & YM1	B301
M. Jenny	Lemta	Méca. et $\Phi$ des <b>fluides</b>	XM2 & YM2	B304
S. Allain	IJL	Méca. et $\Phi$ des <b>solides</b>	XM3 & YM3	B305
M. Gisselbrecht	IJL	Méca. des <b>fluides multiphasiques</b>	XM4 & YM4	B306
J.-S. Kroll	IJL	Méca. des <b>fluides multiphasiques</b>	XM5	B307-308

#### Question ?

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc>