Séance 7 de mécanique des milieux continus solides et fluides

Sébastien Allain & Emmanuel Plaut

1 **Retour sur la loi de comportement des solides élastiques**

2 **Ouverture Recherche & Développement** (S. A.)

Comportement en traction de l'acier TWIP

3 **Principes de l'analyse dimensionnelle**

Méthodologie de Vaschy-Buckingham - Théorème π

4 **1er exemple d'application : impact élastique d'une balle**

5 **2ème exemple d'application : flambement d'une poutre**

6 **Sur le TD, les exposés de TD - Question**

Retour sur la loi de comportement des solides élastiques

Version **contraintes** → **déformations**

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\overline{\overline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,(\mathrm{tr}\overline{\overline{\sigma}})\,\overline{\overline{\mathbf{1}}} = O\left(\frac{\overline{\overline{\sigma}}}{E}\right)$$

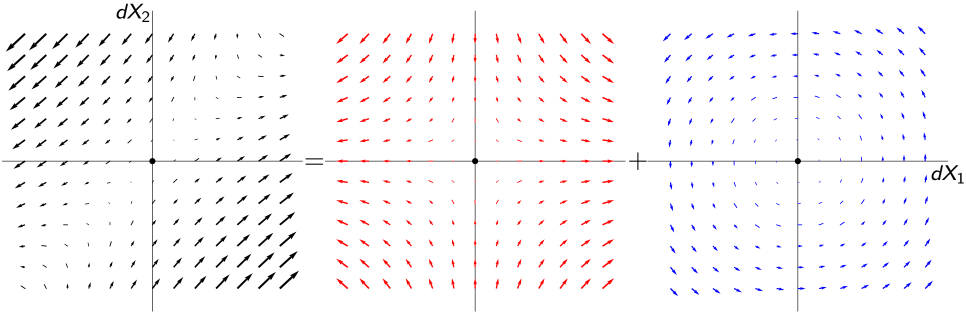
Matériau solide	E [GPa]	ν
Acier	180 à 220	0,28
Aluminium	70	0,33
Diamant	1000	0,2
Verre	90	0,22
Caoutchouc	0,001 à 0,1	0,49
Béton	20 à 50	0,2

Retour sur la loi de comportement des solides élastiques

Version déplacements et **déformations** → **contraintes** ; avec λ et $\mu = O(E)$:

$$\overline{\overline{\sigma}} = 2\mu\, \overline{\overline{\epsilon}} + \lambda\, (\mathrm{tr}\overline{\overline{\epsilon}})\, \overline{\overline{\mathbf{1}}} = 2\mu\, \overline{\overline{\epsilon}} + \lambda\, (\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}})\, \overline{\overline{\mathbf{1}}}$$

$$d\overline{\mathbf{u}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\overline{\mathbf{u}} \cdot d\overline{\mathbf{X}} = \underbrace{\overline{\overline{\epsilon}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}}_{d\overline{\mathbf{u}}_{\text{déf}}} + \underbrace{\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}}_{d\overline{\mathbf{u}}_{\text{rot}}}$$



Donc sur une coupe virtuelle cercle - sphère centrée sur le point analysé :

$$\overline{\mathbf{n}} = \frac{d\overline{\mathbf{X}}}{||d\overline{\mathbf{X}}||} \implies \overline{\mathbf{T}} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \overline{\mathbf{n}} = \frac{2\mu\; d\overline{\mathbf{u}}_{\text{déf}}}{||d\overline{\mathbf{X}}||} + \lambda\, (\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}})\, \overline{\mathbf{n}}\,.$$

Principes de l'analyse dimensionnelle

Toute **grandeur physique** ϕ rencontrée en mécanique classique a une **dimension physique** produit de puissances des **dimensions physiques fondamentales** masse m, longueur ℓ et temps t,

$$\phi \equiv m^{\alpha} \ell^{\beta} t^{\gamma}$$

« ϕ est homogène au produit d'une masse puissance α
par une longueur puissance β
par un temps puissance γ »

(α, β, γ) **exposants des dimensions fondamentales**

$m^{\alpha} \ell^{\beta} t^{\gamma}$ **fonction de dimensions** de ϕ

Principes de l'analyse dimensionnelle

$$\forall\phi, \quad \exists(\alpha,\,\beta,\,\gamma) \quad \text{tels que} \quad \phi \;\equiv\; \underbrace{m^{\alpha}\;\ell^{\beta}\;t^{\gamma}}_{\text{fonction de dimensions de } \phi}$$

La fonction de dimensions de ϕ se déduit de sa formule de définition physique :

$$\phi \;=\; \text{vitesse } \overline{\mathbf{v}} \;=\; \frac{d\overline{\mathbf{x}}}{dt} \quad\Longrightarrow\quad v \;\equiv\; \frac{\ell}{t} \;\equiv\; \ell\; t^{-1}$$

$$\phi \;=\; \text{accélération } \overline{\gamma} \;=\; \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} \quad\Longrightarrow\quad \gamma \;\equiv\; \frac{v}{t} \;\equiv\; \ell\; t^{-2}$$

$$\phi \;=\; \text{force } \overline{\mathbf{F}} \;=\; m\,\overline{\gamma} \quad\Longrightarrow\quad F \;\equiv\; m\;\ell\;t^{-2}$$

$$\phi \;=\; \text{gradient de pression } \overline{\boldsymbol{\nabla}}p \quad\Longrightarrow\quad \overline{\boldsymbol{\nabla}}p \;\equiv\; m\;\ell^{-2}\;t^{-2}$$

L'analyse dimensionnelle est liée au problème de la mesure des grandeurs physiques par choix d'un système d'unités

Mesure des grandeurs fondamentales :

Comparaison à des **étalons de mesure** :

$$\mathrm{mes}(m) = \frac{m}{M} \quad \text{avec} \quad M = 1 \text{ kg dans le SI}$$

$$\mathrm{mes}(\ell) = \frac{\ell}{L} \quad \text{avec} \quad L = 1 \text{ m dans le SI}$$

$$\mathrm{mes}(t) = \frac{t}{T} \quad \text{avec} \quad T = 1 \text{ s dans le SI}$$

Mesure des grandeurs dérivées :

La **fonction de dimensions** détermine l'**unité dérivée**.

Par exemple

$$p = \text{pression} \equiv m^1 \, \ell^{-1} \, t^{-2} \quad \Longrightarrow \quad 1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg}/(\text{m s}^2) \, .$$

Toute équation de la physique doit être invariante par changement de système d'unité donc homogène dimensionnellement :

fonctions de dimensions de tous les termes identiques.

Dans le cas contraire on a une équation

inhomogène dimensionnellement !

Vous devez toujours tester l'**homogénéité dimensionnelle** de vos formules, pour éliminer des **erreurs (INHD)**.

Exemple : 2 formules du laplacien en cylindriques se contredisent :

$$\text{(F1)} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

$$\text{(F2)} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta p = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad \textbf{INHD !}$$

Qui a tort, qui a raison ? F2 a forcément tort. F1 a peut-être raison.

Toute ambiguité concernant le choix d'un système d'unités est extrêmement dangereuse ! ... voire mortelle !

Cf. l'exemple de la **sonde américaine Mars Climate Orbiter**, construite pour la partie infrastructures et moteurs par **Lockheed Martin Astronautics** pour la **NASA** en 1997-98 :

Coût de la sonde $\simeq$ 200 $M\$$

Toute ambiguité concernant le choix d'un système d'unités est extrêmement dangereuse ! ... voire mortelle !

sonde américaine Mars Climate Orbiter,

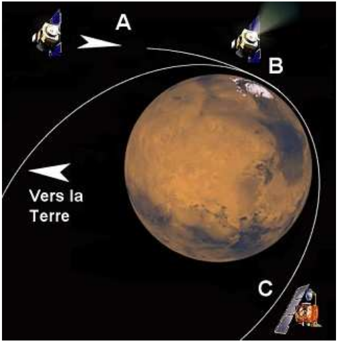
lancée par la **NASA**, sous le contrôle du **Jet Propulsion Laboratory**, en décembre 1998 :

Coût du lancement $\simeq$ 90 $M\$$

Toute ambiguité concernant le choix d'un système d'unités est extrêmement dangereuse ! ... voire mortelle !

sonde américaine Mars Climate Orbiter,
pilotée vers Mars sous le contrôle du **Jet Propulsion Laboratory**,
de façon à préparer sa mise en orbite,
entre décembre 1998 et septembre 1999.

Le 23 septembre 1999 devait avoir lieu cette mise en orbite elliptique par freinage moteur, la sonde devant passer à 140 km environ de Mars :

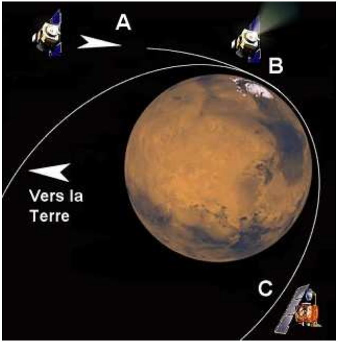


[Labrot P. www.nirgal.net]

Toute ambiguité concernant le choix d'un système d'unités est extrêmement dangereuse ! ... voire mortelle !

la **sonde américaine Mars Climate Orbiter**, disparaît à jamais le 23 septembre 1999 à 11h06 !

Sonde passée à 57 km de Mars donc **brûlée dans son atmosphère** !
Dans les manœuvres de pilotage de la sonde, les ingénieurs du JPL envoyaient des **commandes de poussée** qu'ils croyaient en **Newton** au moteur de LMA qui les interprétait en **livre-force** !



Coût de l'**erreur d'unité** $\simeq$ 300 $M\$$

Théorème π (VB) : réduction de $\phi = f(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$

- Soit un système physique dépendant de **paramètres de contrôle** $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n$ numérotés d. s. q. les 3 premières colonnes de la **matrice des exposants des dimensions**

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	$\cdots$	ϕ_k	$\cdots$	ϕ_n
m	α_1	α_2	α_3	$\cdots$	α_k	$\cdots$	α_n
ℓ	β_1	β_2	β_3	$\cdots$	β_k	$\cdots$	β_n
t	γ_1	γ_2	γ_3	$\cdots$	γ_k	$\cdots$	γ_n

forment une matrice 3×3 inversible

$\iff$ ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 **grandeurs fondamentales dimensionnellement indépendantes**.

- **Adimensionner** les autres **paramètres de contrôle** en introduisant des **groupements** π

$$\boxed{\pi_k = \frac{\phi_k}{\phi_1^{a_k}\ \phi_2^{b_k}\ \phi_3^{c_k}} \equiv 1} \text{ pour } k = 4, \cdots, n.$$

Théorème π (VB) : réduction de $\phi = f(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$

- **Adimensionner** les autres **paramètres de contrôle** en introduisant des **groupements** π

$$\boxed{\pi_k = \frac{\phi_k}{\phi_1^{a_k}\ \phi_2^{b_k}\ \phi_3^{c_k}} \equiv 1} \text{ pour } k = 4, \cdots, n.$$

- **Adimensionner** de même la **grandeur physique dépendante** d'intérêt ϕ, i.e. introduire

$$\boxed{\pi_0 = \frac{\phi}{\phi_1^{a_0}\ \phi_2^{b_0}\ \phi_3^{c_0}} \equiv 1}\,.$$

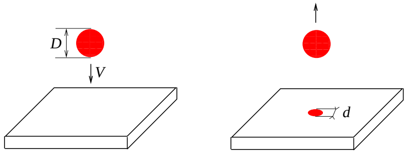
- Alors la relation $\phi = f(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$ peut s'écrire

$$\pi_0 = F(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \pi_4, \cdots, \pi_n) = F\left(\frac{\phi_1}{\Phi_1}, \frac{\phi_2}{\Phi_2}, \frac{\phi_3}{\Phi_3}, \pi_4, \cdots, \pi_n\right)$$

et en changeant les étalons de mesure indépendants Φ_1, Φ_2, Φ_3, il vient

$$\boxed{\pi_0 = F(\pi_4, \cdots, \pi_n)}\,.$$

1er exemple d'application : impact élastique d'une balle



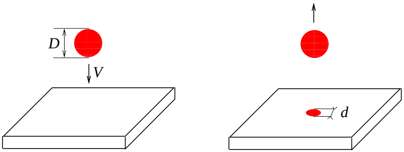
- Grandeur dépendante : diamètre d de la zone d'impact
- Paramètres de contrôle : D, ρ, V, E et ν

Expériences numériques de Bathe :

Matériau	E [MPa]	ρ [kg/m^3]	V [m/s]	ν	d/D	Symbole
Alumine	366000	3960	43	0,22	0,15	•
	"	"	59	0,22	0,17	•
	"	"	77	0,22	0,19	•
Aluminium	69000	2705	80	0,33	0,25	•
	"	"	126	0,33	0,30	•
	"	"	345	0,33	0,45	•
Caoutchouc	3,93	1060	5	0,47	0,50	•
	"	"	7	0,47	0,55	•
	"	"	12	0,47	0,70	•

[Sonin 2001 The Φ basis of dimensional analysis. *MIT Lecture*]

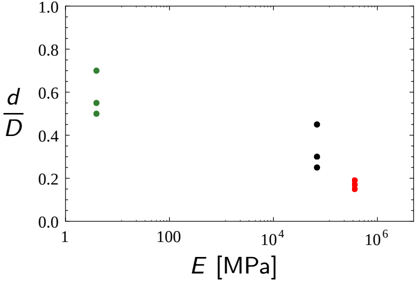
1er exemple d'application : impact élastique d'une balle



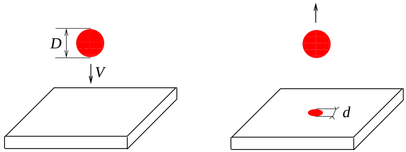
- Grandeur dépendante : diamètre d de la zone d'impact
- Paramètres de contrôle : D, ρ, V, E et ν

Expériences numériques de Bathe : Alumine • Aluminium • Caoutchouc •

Influence de E ?



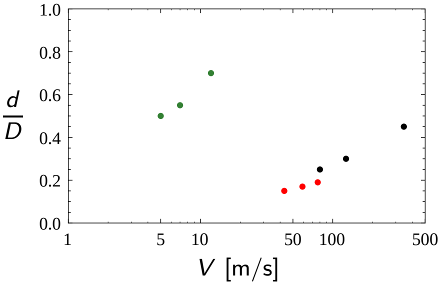
1er exemple d'application : impact élastique d'une balle



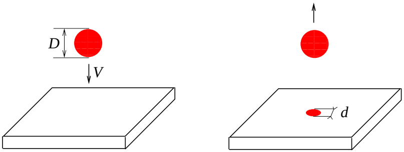
- Grandeur dépendante : diamètre d de la zone d'impact
- Paramètres de contrôle : D, ρ, V, E et ν

Expériences numériques de Bathe : Alumine • Aluminium • Caoutchouc •

Influence de V ?



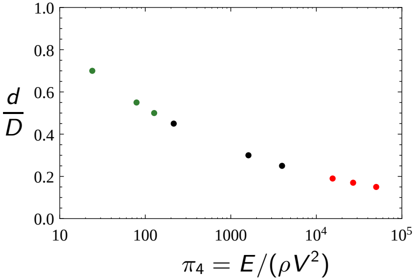
1er exemple d'application : impact élastique d'une balle



- Grandeur dépendante : diamètre d de la zone d'impact
- Paramètres de contrôle : D, ρ, V, E et ν

Expériences numériques de Bathe : Alumine • Aluminium • Caoutchouc •

Analyse dim. : VB $\rightarrow \quad \pi_0 = \dfrac{d}{D} = F(D,\rho,V,\pi_4,\pi_5) = F\left(\dfrac{E}{\rho V^2}, \nu\right) \simeq F\left(\dfrac{E}{\rho V^2}\right)$



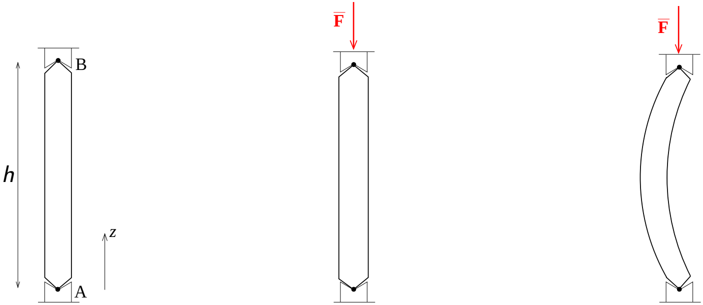
$\exists$ une courbe maîtresse !

$\hookrightarrow$ notion de **similitude** !

2ème exemple d'application : flambement d'une poutre

Poutre cylindrique de diamètre d, axe Az, en liaison pivot en A, pivot - glissière en B :

Pas de force appliquée : Force appliquée $F < F_c$: Force appliquée $F > F_c$:



compression pure — **instabilité de flambement !**

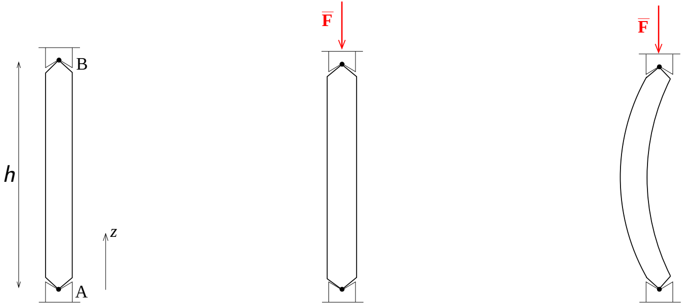
- Grandeur dépendante : seuil de flambement F_c .
- Paramètres de contrôle : diamètre d, hauteur h, module d'Young E.
  Seulement 2 grandeurs dimensionnellement indépendantes : d et E.

$$\text{VB} \;\rightarrow\; \pi_3 = h/d \;,\quad \pi_0 = F_c/(d^a\ E^b) = F_c/(d^2\ E) = F(d,E,\pi_3) = f(\pi_3)$$

2ème exemple d'application : flambement d'une poutre

Poutre cylindrique de diamètre d, axe Az, en liaison pivot en A, pivot - glissière en B :

Pas de force appliquée : | Force appliquée $F < F_c$: | Force appliquée $F > F_c$:



compression pure

instabilité de flambement !

Vaschy - Buckingham $\rightarrow$ $F_c = E\ d^2\ f(h/d)$

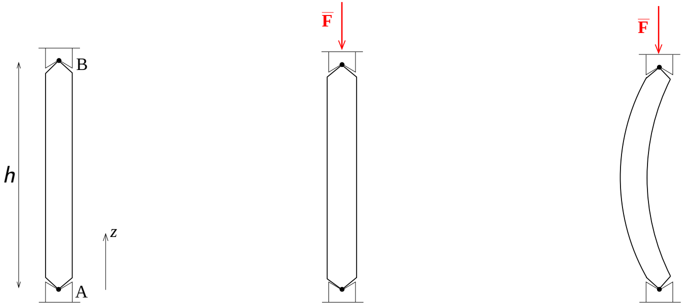
Expériences $\rightarrow$ $F_c \propto d^4\ ,\quad F_c \propto h^{-2}$

Idée : $f(h/d) = F_0\ (h/d)^{\alpha} \rightarrow \alpha = -2 \rightarrow$ $\boxed{F_c = G_0 \dfrac{E\ d^4}{h^2}}$

2ème exemple d'application : flambement d'une poutre

Poutre cylindrique de diamètre d, axe Az, en liaison pivot en A, pivot - glissière en B :

Pas de force appliquée : Force appliquée $F < F_c$: Force appliquée $F > F_c$:



compression pure

instabilité de flambement !

Analyse dimensionnelle + expériences $\rightarrow$ $\boxed{F_c \; = \; G_0 \, \dfrac{E \, d^4}{h^2}}$

Nécessité d'expériences précises ou d'un modèle fin pour déterminer G_0,

$G_0 = \pi^3/64 \simeq 0{,}48$, cf. le pb 5.1 **Étude de poutres en flexion plane** !..

TD : Pb 4.3

Dimensionnement d'un tuyau contenant un fluide sous pression

Rappel : équipe pédagogique pour le TD :

Groupes	salle	chargé(e) de TD	Département	Laboratoire
1.1 & 2.1	A303	Lucile Dezerald	Matériaux	IJL
1.2 & 2.2	A304	Sébastien Allain	Matériaux	IJL
1.3 & 2.3	A306	Jean-Sébastien Kroll	Procédés, Énergie, Env.	IJL
1.4 & 2.4	A307	Mathieu Jenny	Énergie & Fluides	Lemta

Retour sur les exposés de TD :

- En général, bon investissement, continuez !
- Soignez les graphiques !
- Expliquez la physique !

Les élèves en exposé de TD
sont en salle 5 minutes avant pour démarrer à l'heure !

Question ?