

Séance 6 de **mécanique des milieux continus solides et fluides**

Emmanuel Plaut & Sébastien Allain

Solides élastiques

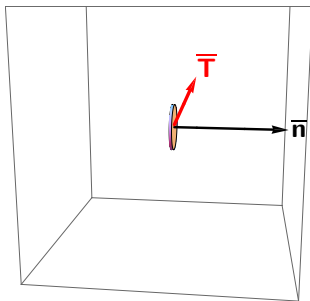
- 1 Rappels :**
tenseur des contraintes de Cauchy et **représentation de Mohr**
- 2 Loi de comportement** des **solides élastiques isotropes** en régime **linéaire** : établissement par une démarche de physicien
- 3 Propriétés et résolution d'un problème élastique linéarisé**
- 4 Expérience de flexion avec photoélasticité**

Rappels : contraintes dans un milieu continu

∀ la surface d^2S de normale sortante $\bar{\mathbf{n}}$,

le milieu « extérieur » (du côté de $\bar{\mathbf{n}}$) exerce sur le milieu « intérieur » une **force** $d^2\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) d^2S$ avec $\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ le **vecteur contrainte**,

$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ le **tenseur symétrique des contraintes de Cauchy**



↪ **nouveau terme** dans la loi d'évolution de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} + \overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} .$$

Représentation de Mohr de l'état de contraintes en (\bar{x}, t)

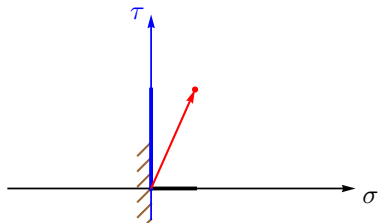
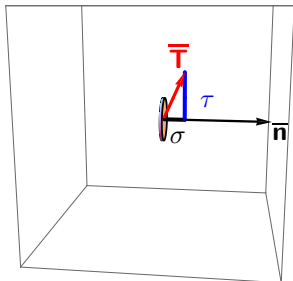
∀ la surface d^2S de normale sortante \bar{n} ,

le milieu « extérieur » (du côté de \bar{n}) exerce sur le milieu « intérieur »

une **force** $d^2\bar{f} = \bar{T}(\bar{n}) d^2S$ avec $\bar{T}(\bar{n}) = \bar{\sigma} \cdot \bar{n}$ le **vecteur contrainte** caractérisé par

- la **contrainte normale** $\sigma(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \bar{T}(\bar{n})$
- la **contrainte tangentielle** $\tau(\bar{n}) = \sqrt{\bar{T}^2(\bar{n}) - \sigma^2(\bar{n})}$

↪ à tracer dans le plan (σ, τ)

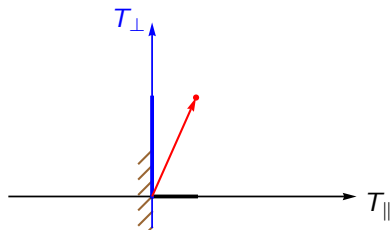
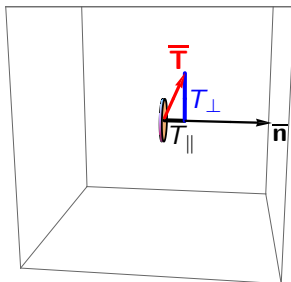


Représentation de Mohr de l'état de contraintes en (\bar{x}, t)

∀ la surface d^2S de normale sortante \bar{n} ,
le milieu « extérieur » (du côté de \bar{n}) exerce sur le milieu « intérieur »
une **force** $d^2\bar{f} = \bar{T}(\bar{n}) d^2S$ avec $\bar{T}(\bar{n}) = \bar{\sigma} \cdot \bar{n}$ le **vecteur contrainte**
caractérisé par

- la **contrainte normale** $\sigma(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \bar{T}(\bar{n})$
- la **contrainte tangentielle** $\tau(\bar{n}) = \sqrt{\bar{T}^2(\bar{n}) - \sigma^2(\bar{n})}$

↪ à tracer dans le plan $(\sigma, \tau) = (T_{\parallel}, T_{\perp})$



Représentation de Mohr de l'état de contraintes en (\bar{x}, t)

\forall la surface d^2S de normale sortante \bar{n} ,

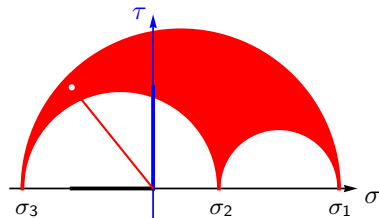
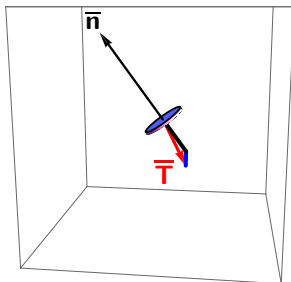
le milieu « extérieur » (du côté de \bar{n}) exerce sur le milieu « intérieur »

une **force** $d^2\bar{f} = \bar{T}(\bar{n}) d^2S$ avec $\bar{T}(\bar{n}) = \bar{\sigma} \cdot \bar{n}$ le **vecteur contrainte**

caractérisé par

- la **contrainte normale** $\sigma(\bar{n}) = \bar{n} \cdot \bar{T}(\bar{n})$
- la **contrainte tangentielle** $\tau(\bar{n}) = \sqrt{\bar{T}^2(\bar{n}) - \sigma^2(\bar{n})}$

\leftrightarrow à tracer dans le plan $(\sigma, \tau) \dots \forall \bar{n} \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^3)$



« cercles de Mohr »

Loi de l'élasticité

Même en **petits déplacements** et **petite transformation**, le système posé par l'équation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2}(\bar{\mathbf{X}}, t) = \rho \bar{\mathbf{g}} + \overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

et l'équation de conservation de la masse

$$\rho(\bar{\mathbf{X}}, t) = \rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0) (1 - \text{div} \bar{\mathbf{u}}) \simeq \rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0)$$

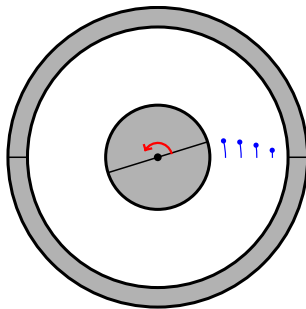
n'est **pas fermé !**

⇒ nécessité d'une **loi de comportement élastique** liant $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\bar{\mathbf{u}}$ sous **forme locale tensorielle intrinsèque**.

Même à **faibles contraintes**, on ne peut avoir proportionnalité directe entre le **tenseur des contraintes** $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ et le **champ de déplacement** $\bar{\mathbf{u}}$!

Loi de l'élasticité

Dans l'expérience de Couette avec rotation du cylindre intérieur seul, on mesure des **forces tangentielles faibles** liées à de **petits gradients de déplacements**

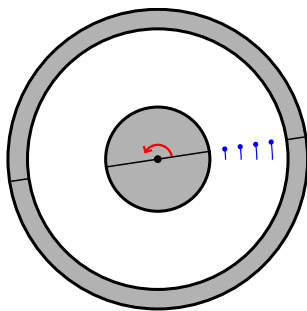


↔ suggère une proportionnalité entre le **tenseur des contraintes** $\overline{\overline{\sigma}}$ et le **gradient de déplacement** $\overline{\overline{\nabla u}}$?...

Loi de l'élasticité :

$$\bar{\bar{\sigma}} = E \bar{\bar{\nabla}} \bar{\bar{u}} ?$$

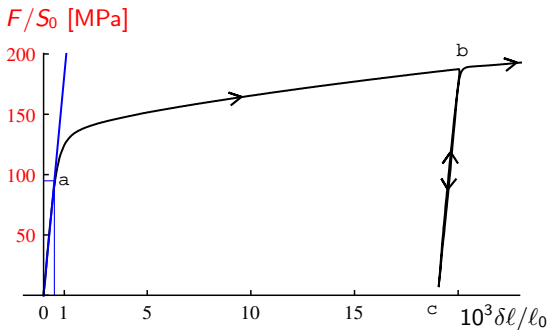
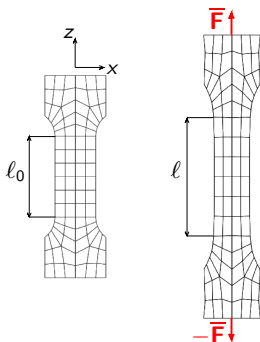
- **Impossible** car $\bar{\bar{\sigma}}$ est **symétrique** contrairement à $\bar{\bar{\nabla}} \bar{\bar{u}}$.
- **Impossible** car dans une expérience de type Couette avec rotation en bloc des 2 cylindres on n'observe pas de contraintes à la fin :



Pourrait-on avoir

$$\bar{\bar{\sigma}} = E \bar{\bar{\epsilon}} = \frac{E}{2} \left(\bar{\bar{\nabla}} \bar{\bar{u}} + \bar{\bar{\nabla}} \bar{\bar{u}}^T \right) ?$$

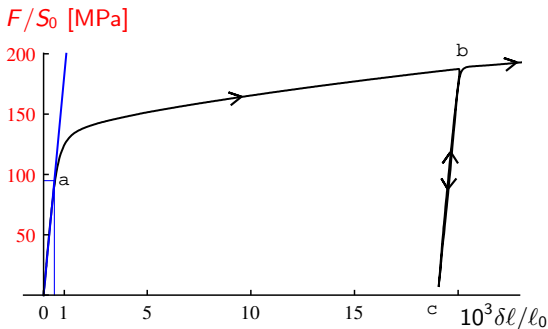
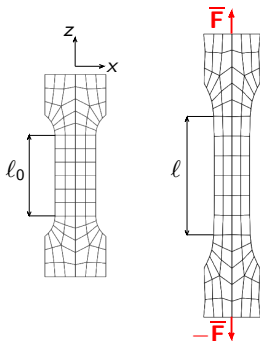
Ce que nous apprend une expérience de traction sous $\bar{\mathbf{F}} = F \bar{\mathbf{e}}_z$



Expé. numérique sur matériau mou | Expé. réelle sur acier

[Allain 2010 & 2013 - Arcelor Mittal & UL]

Ce que nous apprend une expérience de traction sous $\vec{F} = F \vec{e}_z$



∃ régime **linéaire réversible** à **faibles contraintes de traction** σ ,

$$\sigma = \sigma_{zz} = \frac{F}{S_0} = E \frac{\delta l}{l_0} = E \epsilon_{zz} \text{ avec } E \text{ le } \mathbf{module\ d'Young}.$$

∃ une **contraction isotrope** dans les directions \perp à la traction,

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = -\nu \epsilon_{zz} \text{ avec } \nu \text{ le } \mathbf{coefficient\ de\ Poisson}.$$

⚠ à **fort** σ , régime non linéaire, **élastoplastique**, puis **rupture** !...

Ce que l'on pourrait deviner comme loi de l'élasticité linéaire

À **faibles contraintes**

donc en **petits déplacements** et **petite transformation** !

Donc $\bar{\mathbf{x}} \simeq \bar{\mathbf{X}}$ dans $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$, $\bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$ et $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$...

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = E \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \iff \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} = \frac{1}{E} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$$

Mais alors en **traction pure**

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} = 0$$

contredit

$$\epsilon_{xx} = -\nu \epsilon_{zz} < 0 !$$

Ce qu'il faut poser comme loi de l'élasticité linéaire ou loi de Hooke

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{L}}(\bar{\bar{\sigma}}) = \frac{1}{E_1} \bar{\bar{\sigma}} + \frac{1}{E_2} (\text{tr} \bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{1}}$$

Identifier avec le cas de la **traction pure** :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} &= \sigma \bar{\bar{e}}_z \otimes \bar{\bar{e}}_z \\ \iff \bar{\bar{\epsilon}} &= \frac{1}{E} \sigma \bar{\bar{e}}_z \otimes \bar{\bar{e}}_z - \frac{\nu}{E} \sigma (\bar{\bar{e}}_x \otimes \bar{\bar{e}}_x + \bar{\bar{e}}_y \otimes \bar{\bar{e}}_y) \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{E_1} = \frac{1+\nu}{E}, \quad \frac{1}{E_2} = -\frac{\nu}{E}$$

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{1}}$$

On peut inverser cette loi de l'élasticité linéaire ou loi de Hooke

$$\bar{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\sigma}) \bar{\mathbf{1}} \iff \bar{\sigma} = \lambda (\text{tr} \bar{\epsilon}) \bar{\mathbf{1}} + 2\mu \bar{\epsilon}$$

$$\lambda = \mathbf{1}^{\text{er}} \text{ coefficient de Lamé} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \mathbf{2}^{\text{d}} \text{ coefficient de Lamé} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Matériau solide	E [GPa]	ν
Acier	180 à 220	0,28
Aluminium	70	0,33
Diamant	1000	0,2
Verre	90	0,22
Caoutchouc	0,001 à 0,1	0,49
Béton	20 à 50	0,2

On peut inverser cette loi de l'élasticité linéaire ou loi de Hooke

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{\mathbf{1}}} \iff \bar{\bar{\sigma}} = \lambda (\text{tr} \bar{\bar{\epsilon}}) \bar{\bar{\mathbf{1}}} + 2\mu \bar{\bar{\epsilon}}$$

$$\lambda = \mathbf{1}^{\text{er}} \text{ coefficient de Lamé} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \mathbf{2}^{\text{d}} \text{ coefficient de Lamé} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Cf. poly § **Compression pure** :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = -\epsilon \bar{\bar{\mathbf{1}}}, \quad \bar{\bar{\sigma}} = -p \bar{\bar{\mathbf{1}}} \quad \text{avec} \quad \epsilon \text{ et } p > 0$$

$$\implies \frac{\delta \rho}{\rho} = -\text{div} \bar{\mathbf{u}} = -\text{tr} \bar{\bar{\epsilon}} = 3\epsilon = 3 \frac{1-2\nu}{E} p$$

$$\implies \left[1 - 2\nu \geq 0 \iff \nu \leq \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{et} \left[\nu = \frac{1}{2} \iff \text{matériau incompressible} \right]$$

Problème élastique linéarisé

(H) petits déplacements, petite transformation $\Rightarrow \bar{\mathbf{x}} \simeq \bar{\mathbf{X}}$ dans $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}}, t)$,

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}(\bar{\mathbf{X}}, t) = \frac{1}{2} \left(\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T \right)$$

et

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}(\bar{\mathbf{X}}, t) = \lambda (\text{tr} \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}) \bar{\mathbf{I}} + 2\mu \bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}.$$

Équation dans le volume = **équation de la quantité de mouvement**

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} = \rho_0 \bar{\mathbf{g}} + \bar{\text{div}} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}.$$

Exercice de calcul tensoriel 2.9 \rightarrow équation de Navier

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} = \rho_0 \bar{\mathbf{g}} + (\lambda + \mu) \bar{\nabla} \text{div} \bar{\mathbf{u}} + \mu \bar{\Delta} \bar{\mathbf{u}}.$$

Problème élastique linéarisé : solution en déplacements

Équation dans le volume = équation de Navier

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} - (\lambda + \mu) \bar{\nabla} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} - \mu \bar{\Delta} \bar{\mathbf{u}} = \rho_0 \bar{\mathbf{g}} .$$

Conditions limites (régulières) : $\forall \bar{\mathbf{X}} \in \partial D, \forall i \in \{1, 2, 3\},$

$$u_i(\bar{\mathbf{X}}) = u_i^d(\bar{\mathbf{X}}) \text{ déplacement donné}$$

$$\text{ou } T_i(\bar{\mathbf{X}}) = [\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{X}}) \cdot \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{X}})]_i = T_i^d(\bar{\mathbf{X}}) \text{ contrainte donnée}$$

Ce problème est linéaire vis-à-vis de $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}})$

des « sources » $\rho_0 \bar{\mathbf{g}}, u_i^d(\bar{\mathbf{X}})$ et $T_i^d(\bar{\mathbf{X}})$

⇒ principe de superposition :

$$\text{sources} = S_1 + S_2 \quad \Rightarrow \quad \text{solution } \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_1 + \bar{\mathbf{u}}_2$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_2$$

Problème élastostatique linéarisé : solution en contraintes

Équation dans le volume = **équation de la quantité de mouvement**

$$\bar{\mathbf{0}} = \rho_0 \bar{\mathbf{g}} + \overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} .$$

1^{ères} conditions limites prises en compte : celles en contrainte

$$T_i(\bar{\mathbf{X}}) = [\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{X}}) \cdot \bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{X}})]_i = T_i^d(\bar{\mathbf{X}}) \text{ contrainte donnée.}$$

Pour prendre en compte celles en déplacement, calculer

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1 + \nu}{E} \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \bar{\mathbf{1}}$$

⚠ pour qu'existe $\bar{\mathbf{u}}$ tel que

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\overline{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \overline{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T) ,$$

vérifier des **conditions de compatibilité géométrique**, les éq. (4.63) du cours de méca, qui traduisent l'éq. (3.9) du cours de calcul tensoriel,

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}}(\bar{\boldsymbol{\epsilon}})) = \bar{\mathbf{0}} .$$

Problème élastostatique linéarisé : solution en contraintes

Alors on peut intégrer

$$\overline{\overline{\nabla \mathbf{u}}} + \overline{\overline{\nabla \mathbf{u}}^T} = 2\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = 2\frac{1+\nu}{E} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} - 2\frac{\nu}{E} (\text{tr}\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}) \overline{\overline{\mathbf{1}}} \quad (*)$$

et vérifier les conditions limites en déplacement,

$$u_i(\overline{\mathbf{X}}) = u_i^d(\overline{\mathbf{X}}) \text{ déplacement donné...}$$

⚠ la solution de (*) seule n'est pas unique
mais connue seulement à un champ de moments près

$$\delta \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}}_0 + \overline{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \overline{\mathbf{X}}.$$

⇒ être prudent quand on résoud (*),
cf. le poly et le pb 4.1 traité en TD.

Les contraintes c'est physique et cela se voit !

En tout cas un état de **contraintes planes** dans un milieu transparent bien choisi (type plexyglass) peut se visualiser par **photoélasticité** [annexe C du poly PDF].

Sous l'effet d'un **chargement mécanique**, un matériau isotrope est en général déformé de façon **anisotrope** :

$$\text{déformations propres } \epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_3$$

⇒ apparition d'une **anisotropie optique**, avec trois indices différents

$$n_{o1} > n_{o2} > n_{o3}, \text{ en loi de réponse linéaire } n_{o1} - n_{o3} = C(\epsilon_1 - \epsilon_3)$$

⇒ en lumière polarisée, **interférences**

⇒ visualisation d'**isochromatiques** car déphasage entre 2 ondes

$$\delta\phi = (n_{o1} - n_{o3})k_0e = C(\epsilon_1 - \epsilon_3)k_0e = C\frac{1+\nu}{E}(\sigma_1 - \sigma_3)k_0e = C'(\sigma_1 - \sigma_3)$$

⇔ visualisation du champ $\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{\max}$

Les contraintes c'est physique et cela se voit !

Visualisation du champ $\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{\max}$ dans un barreau en flexion grâce à un système **photoélasticimétrique** :



Des conditions limites « globales » en terme de **force** et **couple** suffisent, cf. le « principe de St Venant » et le pb 4.1 en TD !..

TD : pb. 4.1 Barreau en flexion pure



Des conditions limites « globales » en terme de **force** et **couple** suffisent, cf. le « principe de St Venant »...

Groupe après-midi 14h30 - 16h30	matin 11h - 13h	Salle	Chargé(e) de TD	Laboratoire
A	E	B304	Lucile Dezerald	IJL
B	F	A306	Mathieu Jenny	Lemta
C	G	A304	Sébastien Allain	IJL
D	H	A303	Jean-Sébastien Kroll	IJL
	I	B301	Antonio Pereira	Lemta

Les élèves en exposé de TD
sont en salle **5 minutes avant pour démarrer à l'heure !**

Question ?..