

Mécanique des milieux continus solides et fluides

Séance 5

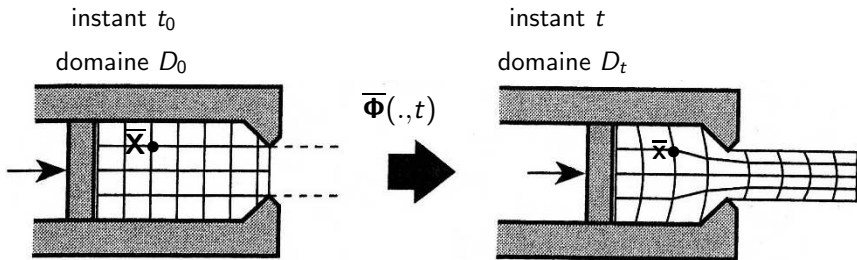
Emmanuel Plaut,
Sébastien Allain, Lucile Dézerald, Mathieu Jenny,
Matthieu Gisselbrecht & Jean-Sébastien Kroll

Bilans, transport et contraintes

- 1 Retour sur les tenseurs de déformation lagrangiens
- 2 Formules de bilan et de transport
- 3 **Efforts intérieurs : contraintes**
 - 3.1 Introduction du **tenseur des contraintes**
 - 3.2 **Représentation de Mohr des contraintes**
- 4 Consignes TD et test - Questions

Retour sur les tenseurs de déformation lagrangiens

Rappel : description lagrangienne du mouvement :

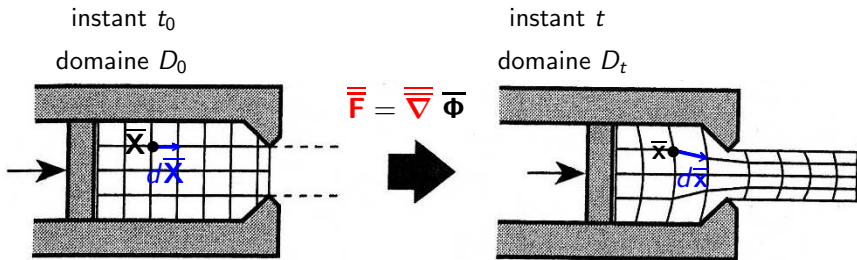


[Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. 2000 The finite elements method]

Placement $\bar{\mathbf{X}} \mapsto \bar{\mathbf{x}} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t)$... ou déplacement $\bar{\mathbf{X}} \mapsto \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}$.

Retour sur les tenseurs de déformation lagrangiens

Rappel : description lagrangienne du mouvement :



$$d\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}$$

En terme du champ de déplacement $\bar{\mathbf{u}}$ t.q. $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{u}}$,

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{u}}.$$

Retour sur les tenseurs de déformation

Le **tenseur des dilatations de Cauchy**

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}} = \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}} = (\bar{\mathbf{1}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}})^T \cdot (\bar{\mathbf{1}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}})$$

permet de calculer les normes carrées transportées

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}} : (d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}) \mapsto \bar{\bar{\mathbf{C}}}(d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}) = d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}.$$

Le **tenseur des déformations de Green-Lagrange**

$$\bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{\mathbf{C}}} - \bar{\mathbf{1}}) = \frac{1}{2}(\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}})$$

permet de calculer les variations de norme carrée transportée

$$\bar{\mathbf{e}} : (d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}) \mapsto \bar{\mathbf{e}}(d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2}(d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} - d\bar{\mathbf{X}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}).$$

Son approximation en petite transformation, le **tenseur des déformations linéarisé**

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T)$$

permet de faire de même...

Les déformations c'est physique et cela se voit !

Dans la **machine de traction du Lemta**, grâce à un système de **corrélations d'images** par logiciel :

$$\textit{Intercorrélations} \rightarrow \bar{\mathbf{u}} \rightarrow \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} \rightarrow \bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \left(\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} \right)$$

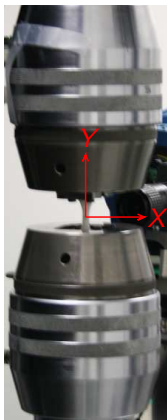


(certaines composantes
seulement...)

Les déformations c'est physique et cela se voit !

Dans la **machine de traction du Lemta**, grâce à un système de **corrélations d'images** par logiciel :

$$\text{Intercorrélations} \rightarrow \bar{\mathbf{u}} \rightarrow \overline{\nabla \mathbf{u}} \rightarrow \bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla \mathbf{u}} + \overline{\nabla \mathbf{u}}^T + \overline{\nabla \mathbf{u}}^T \cdot \overline{\nabla \mathbf{u}} \right)$$



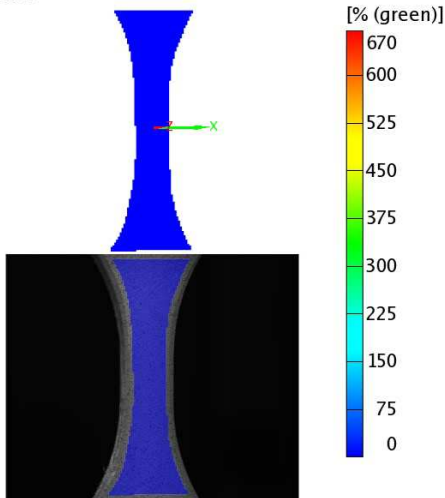
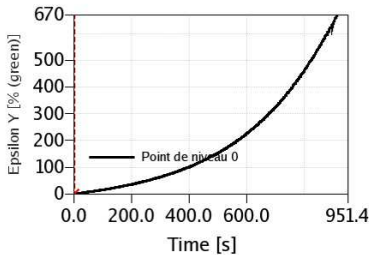
Échantillon de Polyéthylène Haute Densité

$$\text{Mesure de } e_{YY} = \frac{1}{2} \left(\frac{dy^2}{dY^2} - 1 \right)$$

dans la zone de traction pure

Niveau 0
Time 0.00 s

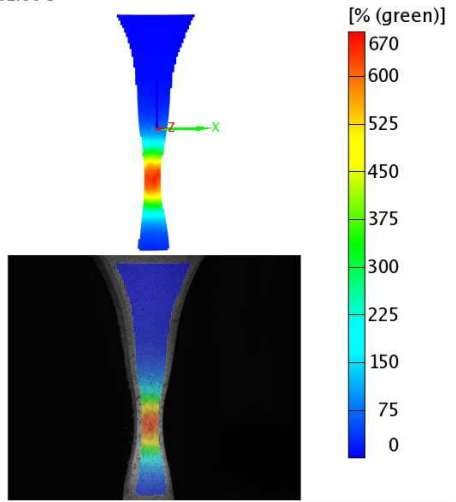
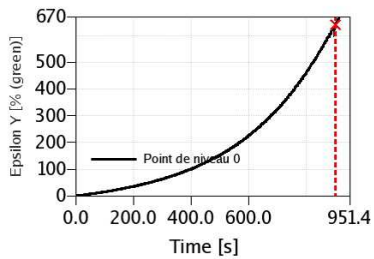
Epsilon Y



Niveau 0

Niveau 445
Time 901.00 s

Epsilon Y



Niveau 445

2 Formules de transport

Formule lagrangienne locale de transport de la masse volumique

$$\frac{d^3x}{d^3X} = J(\bar{\mathbf{X}}, t) \implies \boxed{\rho(\bar{\mathbf{X}}, t) = \frac{\rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0)}{J(\bar{\mathbf{X}}, t)}}$$

avec $J = \det \bar{\mathbf{F}} = \det (\bar{\mathbf{1}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}})$ la **dilatation volumique**.

En petite transformation

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} \ll 1 &\implies J \simeq 1 + \text{tr} \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} = 1 + \text{div} \bar{\mathbf{u}} \simeq 1 \\ &\implies \rho(\bar{\mathbf{X}}, t) \simeq \rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0) . \end{aligned}$$

2 Formules de transport

Formule eulerienne globale de transport de la quantité de mouvement

$$\bar{\mathbf{p}} = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{v}} d^3x \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x}$$

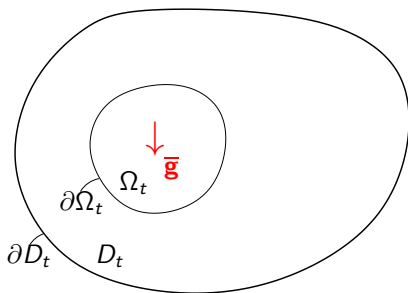
Loi d'évolution de la quantité de mouvement

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \bar{\mathbf{R}} \text{ somme des forces appliquées}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_1 = \text{forces volumiques à distance} = \text{poids} = \iiint_{\Omega_t} d^3\bar{\mathbf{f}} = \iiint_{\Omega_t} d^3m \bar{\mathbf{g}}$$

+ éventuellement **forces d'inertie** si référentiel non galiléen :

$$\bar{\mathbf{g}} \mapsto \bar{\mathbf{g}}' = \bar{\mathbf{g}} - \bar{\gamma}_e(M,t) - \bar{\gamma}_c(M,t) \dots$$

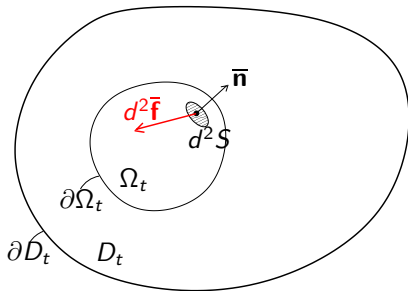


Loi d'évolution de la quantité de mouvement : efforts « intérieurs »

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \bar{\mathbf{R}} \text{ somme des forces appliquées}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_2 = \text{forces surfaciques de contact} = \iint_{\partial\Omega_t} d^2\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}) = \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) d^2S$$

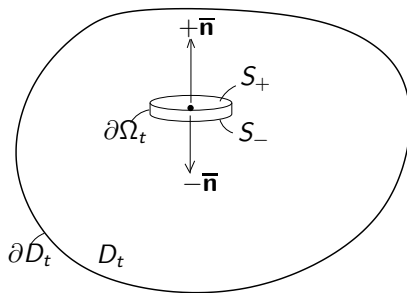
Ⓜ ● extensivité : $d^2\bar{\mathbf{f}} \propto d^2S$ $\implies \exists$ vecteur contrainte $\bar{\mathbf{T}}$
 ● localité : $d^2\bar{\mathbf{f}} = d^2\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{n}})$ t.q. $d^2\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) d^2S$



Loi d'évolution de la quantité de mouvement : efforts « intérieurs »

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) d^2S$$

Dans le cas d'un petit domaine cylindrique aplati,



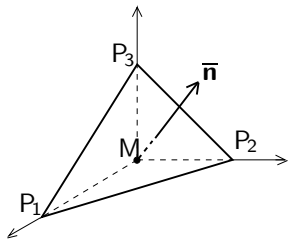
les termes de volume et de surface latérale sont négligeables

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{0}} \simeq \bar{\mathbf{0}} + \bar{\mathbf{T}}(+\bar{\mathbf{n}}) \pi a^2 + \bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{n}}) \pi a^2 \Rightarrow \bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{n}}) = -\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}).$$

Loi d'évolution de la quantité de mouvement : efforts « intérieurs »

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) d^2S$$

Dans le cas d'un petit tétraèdre,



les termes de volume sont négligeables

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{0}} \simeq \bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{e}}_1) S_1 + \bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{e}}_2) S_2 + \bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{e}}_3) S_3 + \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) S$$

Or $S_i = S n_i$ donc $\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = n_i \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{e}}_i)$, $\bar{\mathbf{T}}$ dépend **linéairement de $\bar{\mathbf{n}}$**

$$\Rightarrow \exists \text{ tenseur des contraintes de Cauchy } \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\mathbf{n}} \mapsto \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

ou encore $d^2\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}, d^2S) = \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}) d^2S = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S$

Loi d'évolution de la quantité de mouvement : efforts « intérieurs »

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \underbrace{\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}}_{d^2\bar{\mathbf{f}}} d^2S$$

La formule intégrale de la divergence donne

$$\iint_{\partial\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S = \iiint_{\Omega_t} \overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} d^3x$$

avec

$$\overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \overline{\nabla} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\mathbf{1}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \bar{\mathbf{e}}_i .$$

Il faut des **gradients de tenseur des contraintes**
pour que la « force volumique effective » $\overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \neq \bar{\mathbf{0}}$!

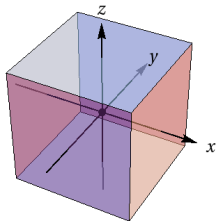
Loi d'évolution de la quantité de mouvement : efforts « intérieurs »

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \underbrace{\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}}_{d^2\bar{\mathbf{f}}} d^2S$$

La formule intégrale de la divergence donne

$$\iint_{\partial\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S = \iiint_{\Omega_t} \bar{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} d^3x \quad \text{avec} \quad \bar{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \bar{\mathbf{e}}_i.$$

Cela peut se retrouver à la main dans le cas d'un petit volume cubique :



les faces étant entre $x - \frac{dx}{2}$ et $x + \frac{dx}{2}$, etc...

Loi d'évolution de la quantité de mouvement : efforts « intérieurs »

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \underbrace{\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \bar{\mathbf{n}}}_{d^2\bar{\mathbf{f}}} d^2S$$

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} (\rho \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{div}} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}) d^3x$$

Ceci $\forall \Omega_t \implies$ **loi locale d'évolution de la quantité de mouvement :**

$$\boxed{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{div}}_x \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}} .$$

Loi **eulerienne** aussi valable en **approche lagrangienne** si **petits déplacements**
 $\bar{\mathbf{x}} \simeq \bar{\mathbf{X}}$ et **petite transformation** $\rho \simeq \rho_0$, $\bar{\mathbf{n}} \simeq \bar{\mathbf{n}}_0$, $d^2S \simeq d^2S_0$, $\bar{\nabla}_x \simeq \bar{\nabla}_X$:

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} = \rho_0 \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{div}}_x \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}} .$$

Loi d'évolution du moment cinétique

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge d^3m \mathbf{v} = \overline{\mathbf{r}}_{\text{ext}}(\mathbf{O}) = \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge d^3\overline{\mathbf{f}} + \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge d^2\overline{\mathbf{f}}$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho \overline{\mathbf{OM}} \wedge \mathbf{v} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge \rho \overline{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge (\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \overline{\mathbf{n}}) d^2S$$

⇒ **symétrie** du **tenseur des contraintes de Cauchy**

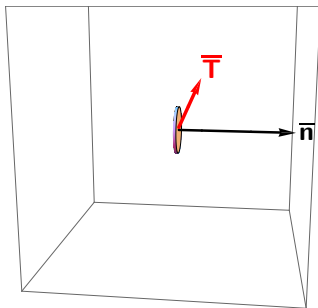
$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}^T .$$

Comment caractériser l'état de contrainte en un point \bar{x} où le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ est connu ?

Physiquement il faudrait étudier, pour $\bar{\mathbf{n}}$ direction de normale quelconque,

$$\forall \bar{\mathbf{n}} \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^3), \text{ le vecteur contrainte } \overline{\overline{\mathbf{T}}}(\bar{\mathbf{n}}) = \frac{d^2 \vec{\mathbf{f}}}{d^2 S} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

↪ beaucoup de vecteurs à étudier en 3D !...

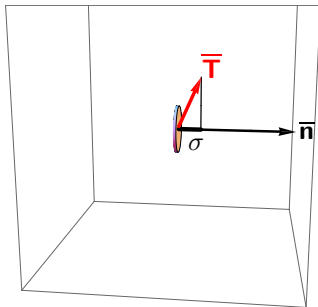


Comment caractériser l'état de contrainte en un point \bar{x} ?

$$\forall \bar{\mathbf{n}} \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^3), \text{ le vecteur contrainte } \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \frac{d^2 \bar{\mathbf{f}}}{d^2 S} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

Idée de **Mohr** : ce qui importe c'est

- la **contrainte normale** $\sigma(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}})$
-

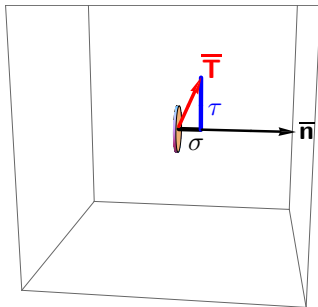


Comment caractériser l'état de contrainte en un point \bar{x} ?

$$\forall \bar{\mathbf{n}} \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^3), \text{ le vecteur contrainte } \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \frac{d^2 \bar{\mathbf{f}}}{d^2 S} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

Idée de **Mohr** : ce qui importe c'est

- la **contrainte normale** $\sigma(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}})$
- la **contrainte tangentielle** $\tau(\bar{\mathbf{n}}) = \sqrt{\bar{\mathbf{T}}^2(\bar{\mathbf{n}}) - \sigma^2(\bar{\mathbf{n}})}$



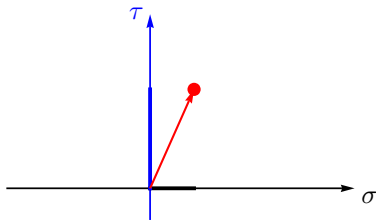
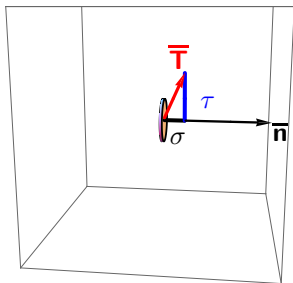
Comment caractériser l'état de contrainte en un point \bar{x} ?

$$\forall \bar{\mathbf{n}} \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^3), \text{ le vecteur contrainte } \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \frac{d^2 \bar{\mathbf{f}}}{d^2 S} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

Idée de **Mohr** : ce qui importe c'est

- la **contrainte normale** $\sigma(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}})$
- la **contrainte tangentielle** $\tau(\bar{\mathbf{n}}) = \sqrt{\bar{\mathbf{T}}^2(\bar{\mathbf{n}}) - \sigma^2(\bar{\mathbf{n}})}$

↪ à tracer dans le plan (σ, τ)



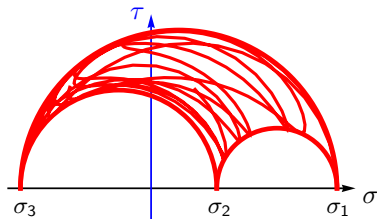
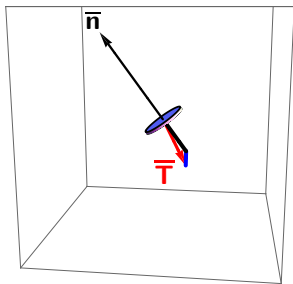
Comment caractériser l'état de contrainte en un point \bar{x} ?

$$\forall \bar{\mathbf{n}} \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^3), \text{ le vecteur contrainte } \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \frac{d^2 \bar{\mathbf{f}}}{d^2 S} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

Idée de **Mohr** : ce qui importe c'est

- la **contrainte normale** $\sigma(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}})$
- la **contrainte tangentielle** $\tau(\bar{\mathbf{n}}) = \sqrt{\bar{\mathbf{T}}^2(\bar{\mathbf{n}}) - \sigma^2(\bar{\mathbf{n}})}$

↪ à tracer dans le plan (σ, τ) ... $\forall \bar{\mathbf{n}} \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^3)$ → **cercles de Mohr** :



Mise en œuvre de ces notions en TD :

- Ex. 3.1 **Représentation de Mohr en contraintes planes**
plus précise car en 2D on peut définir une **contrainte tangentielle** signée !...
- Ex. 3.2 **Contraintes en cisaillement pur**



Chargé(e) de TD	Labo.	Spécialité	Groupe(s)	Salle
L. Dézerald	IJL	Méca. et Φ des solides	XM1 & YM1	B301
M. Jenny	Lemta	Méca. et Φ des fluides	XM2 & YM2	B304
S. Allain	IJL	Méca. et Φ des solides	XM3 & YM3	B305
M. Gisselbrecht	IJL	Méca. des fluides multiphasiques	XM4 & YM4	B306
J.-S. Kroll	IJL	Méca. des fluides multiphasiques	XM5	B307-308

Questions ?..

Rappel : on se retrouve pour le test dès 16h55

avec calculatrice, règle graduée, crayon gris et gomme, stylo à encre, effaceur...

- ▶ groupes XM1, YM1, élèves Bouraoui à Giron du groupe XM5 en A006
- ▶ groupes XM4, YM4, élèves Guilloré à Wieskotten du groupe XM5 en A007
- ▶ groupes XM2, YM2, XM3, YM3 en amphi 200

Lors de ce test court on vous demandera quand même de **rédigier** un minimum, des points au barème seront dédiés à la rédaction !

Chargé(e) de TD	Labo.	Spécialité	Groupe(s)	Salle
L. Dézerald	IJL	Méca. et Φ des solides	XM1 & YM1	B301
M. Jenny	Lemta	Méca. et Φ des fluides	XM2 & YM2	B304
S. Allain	IJL	Méca. et Φ des solides	XM3 & YM3	B305
M. Gisselbrecht	IJL	Méca. des fluides multiphasiques	XM4 & YM4	B306
J.-S. Kroll	IJL	Méca. des fluides multiphasiques	XM5	B307-308

Questions ?..