

Séance 5 de **mécanique des milieux continus solides et fluides**

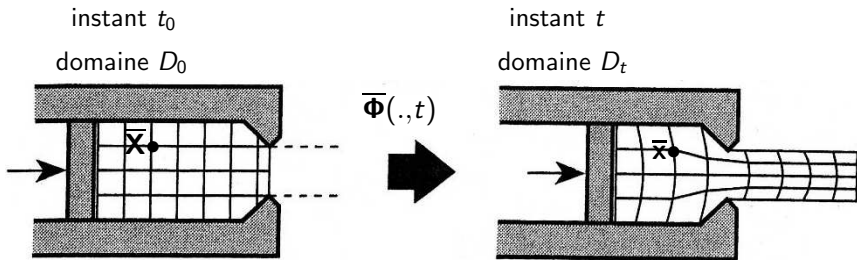
Emmanuel Plaut

Bilans, transport et contraintes

- 1 Retour sur les tenseurs de déformation lagrangiens**
- 2 Formules de bilan et de transport**
- 3 Efforts intérieurs : contraintes**
 - 3.1 Introduction du tenseur des contraintes**
 - 3.2 Représentation de Mohr des contraintes**
- 4 Consignes TD - Questions**

Retour sur les tenseurs de déformation lagrangiens

Rappel : description lagrangienne du mouvement :

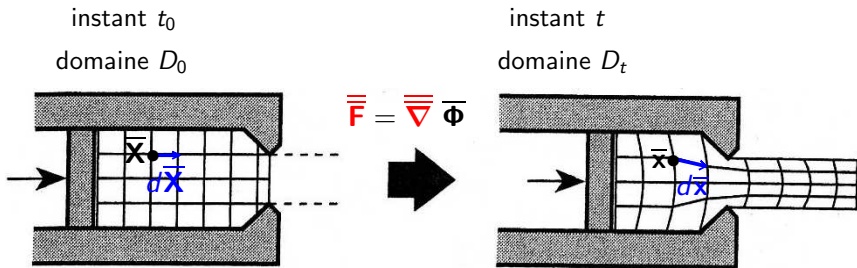


[Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. 2000 The finite elements method]

Placement $\bar{\mathbf{X}} \mapsto \bar{\mathbf{x}} = \bar{\Phi}(\bar{\mathbf{X}}, t)$... ou déplacement $\bar{\mathbf{X}} \mapsto \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{X}}$.

Retour sur les tenseurs de déformation lagrangiens

Rappel : description lagrangienne du mouvement :



$$d\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}$$

En terme du champ de déplacement $\bar{\mathbf{u}}$ t.q. $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{u}}$,

$$\bar{\mathbf{F}} = \text{gradient de la transformation} = \bar{\mathbf{I}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}.$$

Retour sur les tenseurs de déformation

Le tenseur des dilatations de Cauchy

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}} = \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}} = (\bar{\mathbf{1}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}})^T \cdot (\bar{\mathbf{1}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}})$$

permet de calculer les normes carrées transportées

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}} : (d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}) \mapsto \bar{\bar{\mathbf{C}}}(d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}) = d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}.$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange

$$\bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} (\bar{\bar{\mathbf{C}}} - \bar{\mathbf{1}}) = \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}})$$

permet de calculer les variations de norme carrée transportée

$$\bar{\mathbf{e}} : (d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}) \mapsto \bar{\mathbf{e}}(d\bar{\mathbf{X}}, d\bar{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2} (d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} - d\bar{\mathbf{X}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}).$$

Son approximation en petite transformation, le **tenseur des déformations linéarisé**

$$\bar{\bar{\mathbf{\epsilon}}} = \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T)$$

permet de faire de même...

Les déformations c'est physique et cela se voit !

Dans la **machine de traction** du Lemta, grâce à un système de **corrélations d'images** par logiciel :

$$\text{Intercorrélations} \rightarrow \bar{\mathbf{u}} \rightarrow \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} \rightarrow \bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \left(\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} \right)$$



*certaines composantes
seulement...*

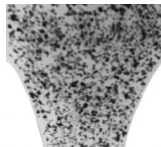
Les déformations c'est physique et cela se voit !

Dans la **machine de traction** du Lemta, grâce à un système de **corrélations d'images** par logiciel :

$$\text{Intercorrélations} \rightarrow \bar{\mathbf{u}} \rightarrow \overline{\nabla \bar{\mathbf{u}}} \rightarrow \bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{u}}} + \overline{\nabla \bar{\mathbf{u}}}^T + \overline{\nabla \bar{\mathbf{u}}}^T \cdot \overline{\nabla \bar{\mathbf{u}}} \right)$$



par suivi d'un « mouchetis »



entre 2 images successives...

Les déformations c'est physique et cela se voit !

Dans la **machine de traction** du Lemta, grâce à un système de **corrélations d'images** par logiciel :

$$\text{Intercorrélations} \rightarrow \bar{\mathbf{u}} \rightarrow \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} \rightarrow \bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \left(\bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} \right)$$



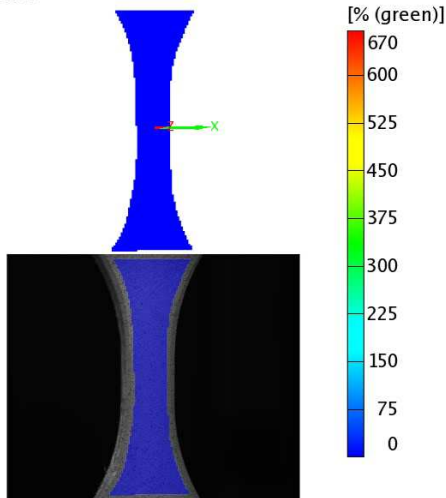
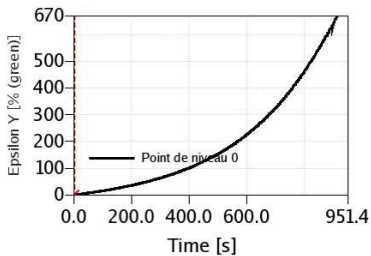
Échantillon de Polyéthylène Haute Densité

$$\text{Mesure de } e_{YY} = \frac{1}{2} \left(\frac{dy^2}{dY^2} - 1 \right)$$

dans la zone de **traction pure**

Niveau 0
Time 0.00 s

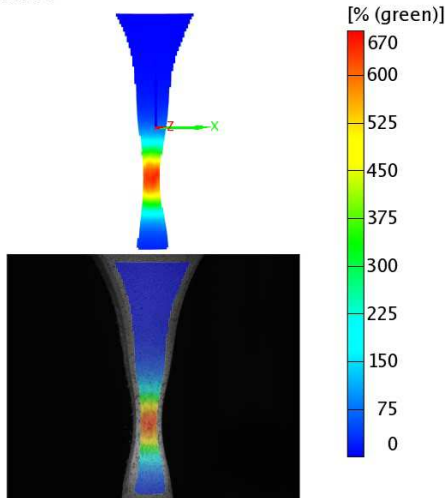
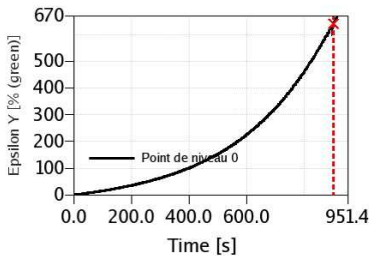
Epsilon Y



Niveau 0

Niveau 445
Time 901.00 s

Epsilon Y



Niveau 445

2 Formules de transport

Formule lagrangienne locale de transport de la masse volumique

$$\frac{d^3x}{d^3X} = J(\bar{\mathbf{X}}, t) \implies \boxed{\rho(\bar{\mathbf{X}}, t) = \frac{\rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0)}{J(\bar{\mathbf{X}}, t)}}$$

avec $J = \det \bar{\mathbf{F}} = \det (\bar{\mathbf{1}} + \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}})$ la **dilatation volumique**.

En petite transformation

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} \ll 1 &\implies J \simeq 1 + \text{tr} \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} = 1 + \text{div} \bar{\mathbf{u}} \simeq 1 \\ &\implies \rho(\bar{\mathbf{X}}, t) \simeq \rho(\bar{\mathbf{X}}, t_0) . \end{aligned}$$

2 Formules de transport

Formule eulerienne globale de transport de la quantité de mouvement

$$\bar{\mathbf{p}} = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{v}} d^3x \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x}$$

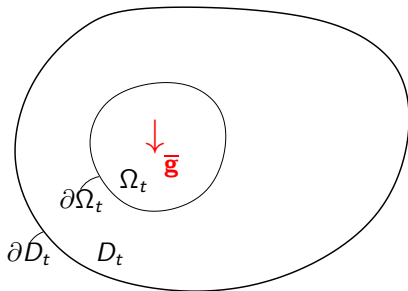
Loi d'évolution de la quantité de mouvement

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \bar{\mathbf{R}} \text{ somme des forces appliquées}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_1 = \text{forces volumiques à distance} = \text{poids} = \iiint_{\Omega_t} d^3\bar{\mathbf{f}} = \iiint_{\Omega_t} d^3m \bar{\mathbf{g}}$$

+ éventuellement **forces d'inertie** si référentiel non galiléen :

$$\bar{\mathbf{g}} \mapsto \bar{\mathbf{g}}' = \bar{\mathbf{g}} - \bar{\gamma}_e(M,t) - \bar{\gamma}_c(M,t) \dots$$

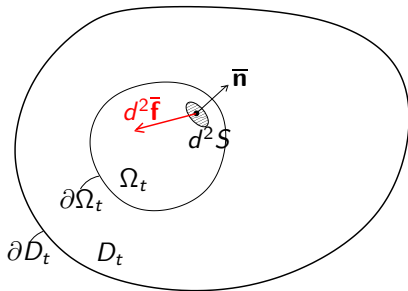


Loi d'évolution de la quantité de mouvement : efforts « intérieurs »

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \bar{\mathbf{R}} \text{ somme des forces appliquées}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_2 = \text{forces surfaciques de contact} = \iint_{\partial\Omega_t} d^2\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}) = \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) d^2S$$

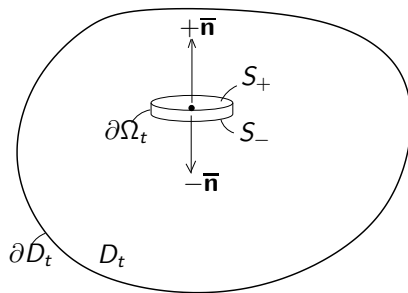
Ⓜ ● extensivité : $d^2\bar{\mathbf{f}} \propto d^2S$ \implies \exists vecteur contrainte $\bar{\mathbf{T}}$
 ● localité : $d^2\bar{\mathbf{f}} = d^2\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{n}})$ t.q. $d^2\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) d^2S$



Loi d'évolution de la quantité de mouvement : efforts « intérieurs »

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) d^2S$$

Dans le cas d'un petit domaine cylindrique aplati,



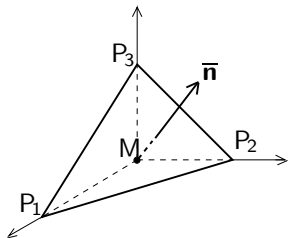
les termes de volume et de surface latérale sont négligeables

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{0}} \simeq \bar{\mathbf{0}} + \bar{\mathbf{T}}(+\bar{\mathbf{n}}) \pi a^2 + \bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{n}}) \pi a^2 \Rightarrow \bar{\mathbf{T}}(-\bar{\mathbf{n}}) = -\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}).$$

Loi d'évolution de la quantité de mouvement : efforts « intérieurs »

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \mathbf{g} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \mathbf{T}(\bar{\mathbf{n}}) d^2S$$

Dans le cas d'un petit tétraèdre,



les termes de volume sont négligeables

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{0}} \simeq \mathbf{T}(-\bar{\mathbf{e}}_1) S_1 + \mathbf{T}(-\bar{\mathbf{e}}_2) S_2 + \mathbf{T}(-\bar{\mathbf{e}}_3) S_3 + \mathbf{T}(\bar{\mathbf{n}}) S$$

Or $S_i = S n_i$ donc $\mathbf{T}(\bar{\mathbf{n}}) = n_i \mathbf{T}(\bar{\mathbf{e}}_i)$, \mathbf{T} dépend **linéairement de $\bar{\mathbf{n}}$**

$$\Rightarrow \exists \text{ tenseur des contraintes de Cauchy } \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\mathbf{n}} \mapsto \mathbf{T}(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

ou encore

$$d^2\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{T}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}) d^2S = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S$$

Loi d'évolution de la quantité de mouvement : efforts « intérieurs »

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \underbrace{\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}}_{d^2\bar{\mathbf{f}}} d^2S$$

La formule intégrale de la divergence donne

$$\iint_{\partial\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S = \iiint_{\Omega_t} \overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} d^3x$$

avec

$$\overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \overline{\nabla} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\mathbf{1}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \bar{\mathbf{e}}_i .$$

Il faut des **gradients de tenseur des contraintes**
pour que la « force volumique effective » $\overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \neq \bar{\mathbf{0}}$!

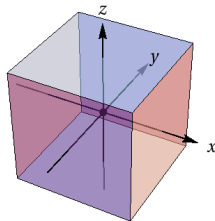
Loi d'évolution de la quantité de mouvement : efforts « intérieurs »

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \underbrace{\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}}_{d^2\bar{\mathbf{f}}} d^2S$$

La formule intégrale de la divergence donne

$$\iint_{\partial\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S = \iiint_{\Omega_t} \bar{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} d^3x \quad \text{avec} \quad \bar{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \bar{\mathbf{e}}_i.$$

Cela peut se retrouver à la main dans le cas d'un petit volume cubique :



les faces étant entre $x - \frac{dx}{2}$ et $x + \frac{dx}{2}$, etc...

Loi d'évolution de la quantité de mouvement : efforts « intérieurs »

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \underbrace{\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \bar{\mathbf{n}}}_{d^2\bar{\mathbf{f}}} d^2S$$

$$\iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} (\rho \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{div}} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}) d^3x$$

Ceci $\forall \Omega_t \implies$ loi locale d'évolution de la quantité de mouvement :

$$\boxed{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{div}}_x \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}} .$$

Loi eulerienne aussi valable en **approche lagrangienne** si **petits déplacements** $\bar{\mathbf{x}} \simeq \bar{\mathbf{X}}$ et **petite transformation** $\rho \simeq \rho_0$, $\bar{\mathbf{n}} \simeq \bar{\mathbf{n}}_0$, $d^2S \simeq d^2S_0$, $\bar{\nabla}_x \simeq \bar{\nabla}_X$:

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t^2} = \rho_0 \bar{\mathbf{g}} + \bar{\mathbf{div}}_X \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}} .$$

Loi d'évolution du moment cinétique

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge d^3m \mathbf{v} = \overline{\mathbf{r}}_{\text{ext}}(\mathbf{O}) = \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge d^3\bar{\mathbf{f}} + \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge d^2\bar{\mathbf{f}}$$

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho \overline{\mathbf{OM}} \wedge \mathbf{v} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge \rho \bar{\mathbf{g}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\mathbf{OM}} \wedge (\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S$$

⇒ **symétrie** du **tenseur des contraintes de Cauchy**

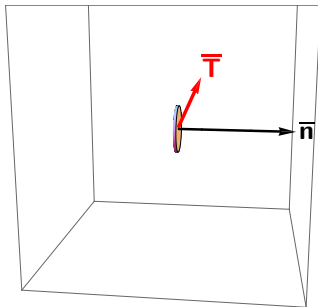
$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \overline{\boldsymbol{\sigma}}^T .$$

Comment caractériser l'état de contrainte en un point \bar{x} où le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ est connu ?

Physiquement il faudrait étudier, pour \bar{n} direction de normale quelconque,

$$\forall \bar{n} \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^3), \text{ le vecteur contrainte } \overline{T}(\bar{n}) = \frac{d^2 \vec{f}}{d^2 S} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \bar{n}$$

↪ beaucoup de vecteurs à étudier en 3D !...

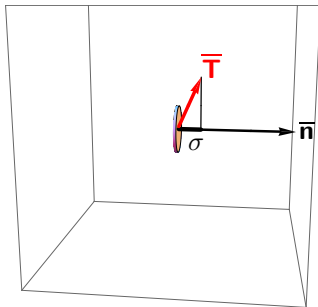


Comment caractériser l'état de contrainte en un point \bar{x} ?

$$\forall \bar{\mathbf{n}} \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^3), \text{ le vecteur contrainte } \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \frac{d^2 \bar{\mathbf{f}}}{d^2 S} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

Idée de **Mohr** : ce qui importe c'est

- la **contrainte normale** $\sigma(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}})$
-

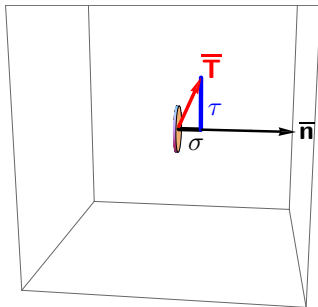


Comment caractériser l'état de contrainte en un point \bar{x} ?

$$\forall \bar{\mathbf{n}} \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^3), \text{ le vecteur contrainte } \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \frac{d^2 \bar{\mathbf{f}}}{d^2 S} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

Idée de **Mohr** : ce qui importe c'est

- la **contrainte normale** $\sigma(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}})$
- la **contrainte tangentielle** $\tau(\bar{\mathbf{n}}) = \sqrt{\bar{\mathbf{T}}^2(\bar{\mathbf{n}}) - \sigma^2(\bar{\mathbf{n}})}$



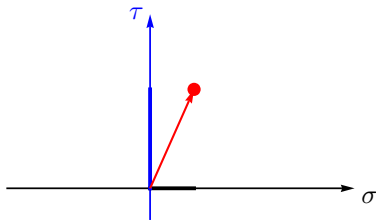
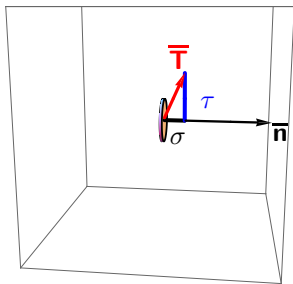
Comment caractériser l'état de contrainte en un point \bar{x} ?

$$\forall \bar{\mathbf{n}} \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^3), \text{ le vecteur contrainte } \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \frac{d^2 \bar{\mathbf{f}}}{d^2 S} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

Idée de **Mohr** : ce qui importe c'est

- la **contrainte normale** $\sigma(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}})$
- la **contrainte tangentielle** $\tau(\bar{\mathbf{n}}) = \sqrt{\bar{\mathbf{T}}^2(\bar{\mathbf{n}}) - \sigma^2(\bar{\mathbf{n}})}$

↪ à tracer dans le plan (σ, τ)



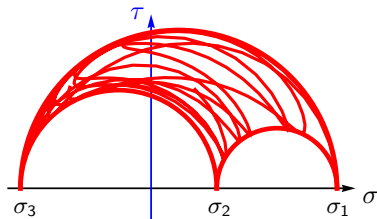
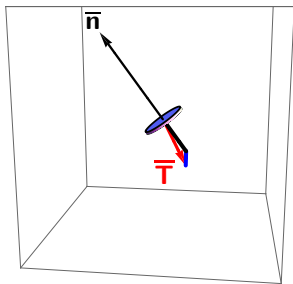
Comment caractériser l'état de contrainte en un point \bar{x} ?

$$\forall \bar{\mathbf{n}} \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^3), \text{ le vecteur contrainte } \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}}) = \frac{d^2 \bar{\mathbf{f}}}{d^2 S} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

Idée de **Mohr** : ce qui importe c'est

- la **contrainte normale** $\sigma(\bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{n}})$
- la **contrainte tangentielle** $\tau(\bar{\mathbf{n}}) = \sqrt{\bar{\mathbf{T}}^2(\bar{\mathbf{n}}) - \sigma^2(\bar{\mathbf{n}})}$

→ à tracer dans le plan (σ, τ) ... $\forall \bar{\mathbf{n}} \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^3) \rightarrow$ **cercles de Mohr** :



Mise en œuvre de ces notions en TD :

- Ex. 3.1 **Représentation de Mohr en contraintes planes**
plus précise car en 2D on peut définir une **contrainte tangentielle** signée !...
- Ex. 3.2 **Contraintes en cisaillement pur**



Groupes	salle	chargé(e) de TD	Département	Laboratoire
1.1 & 2.1	A303	Lucile Dezerald	Matériaux	IJL
1.2 & 2.2	A304	Sébastien Allain	Matériaux	IJL
1.3 & 2.3	A306	Jean-Sébastien Kroll	Procédés, Énergie, Env.	IJL
1.4 & 2.4	A307	Mathieu Jenny	Énergie & Fluides	Lemta

Les élèves en exposé de TD

sont en salle 5 minutes avant de démarrer à l'heure !

Questions ?..