Séance 4 de **mécanique des milieux continus solides et fluides**

Emmanuel Plaut

Cinématique avancée : déformations d'un milieu continu

1 **Approche lagrangienne (plutôt pertinente pour les solides)**

2 **Approche eulerienne (plutôt pertinente pour les fluides)**

http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc

Principe de base : on fait une analyse différentielle locale

Donc en **lagrangien**, comme le mouvement est décrit par le **placement**

$$\begin{array}{cccccc} \overline{\mathbf{\Phi}}(.,t) & : & D_0 & \longrightarrow & D_t \\ & & \text{domaine initial} & & \text{domaine actuel} \\ & & \overline{\mathbf{X}} & \longmapsto & \overline{\mathbf{x}} \ = \ \overline{\mathbf{\Phi}}(\overline{\mathbf{X}},t) \\ & & \text{position initiale} & & \text{position actuelle} \end{array}$$

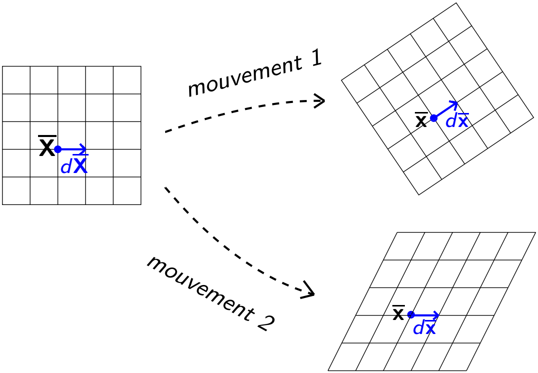
la **question** est : si $\overline{\mathbf{X}}$ varie de $d\overline{\mathbf{X}}$, comment varie $\overline{\mathbf{x}}$? $d\overline{\mathbf{x}} =$?

$d\overline{\mathbf{x}} = \overline{\overline{\mathbf{F}}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}$ avec $\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{\mathbf{\nabla}}}_{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{\Phi}}$ le **tenseur gradient de la transformation**

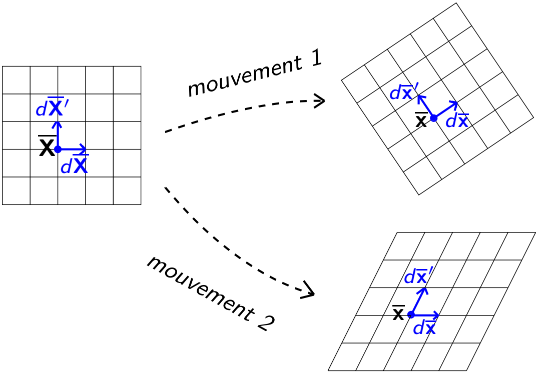
$$\overline{\overline{\mathbf{F}}} \ = \ \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}\overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j \ \text{ est sans dimension,}$$

comme tous les tenseurs que nous allons introduire ce jour en lagrangien.

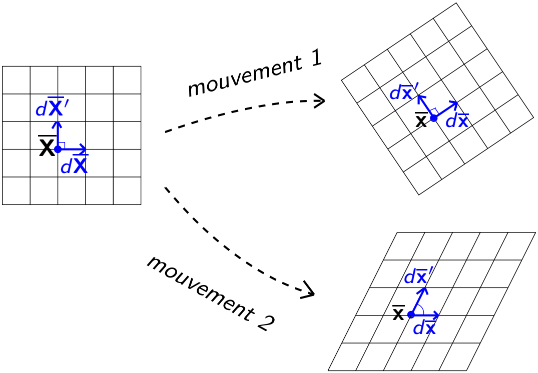
Alors : comment mesurer les déformations ?



Alors : comment mesurer les déformations ?



Idée : regarder le produit scalaire entre un $d\overline{\mathbf{X}}$ et un $d\overline{\mathbf{X}}'$



Idée : regarder le produit scalaire entre un $d\overline{\mathbf{X}}$ et un $d\overline{\mathbf{X}}'$

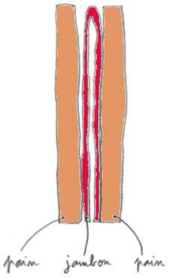
Le produit scalaire transporté se calcule à l'aide du **tenseur des dilatations de Cauchy**

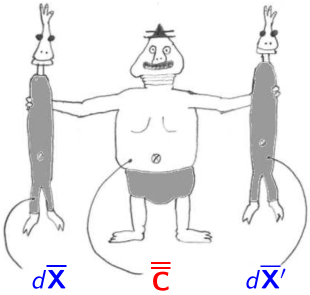
$$\overline{\overline{\mathbf{C}}} \;=\; \overline{\overline{\mathbf{F}}}^{T} \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}}$$

suivant la formule

$$d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}' \;=\; \overline{\overline{\mathbf{C}}}(d\overline{\mathbf{X}}, d\overline{\mathbf{X}}') \;=\; d\overline{\mathbf{X}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{C}}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}' \;,$$

qui met en œuvre la *« règle du sandwich »* :





Idée : regarder le produit scalaire entre un $d\overline{\mathbf{X}}$ et un $d\overline{\mathbf{X}}'$

Le produit scalaire transporté se calcule à l'aide du **tenseur des dilatations de Cauchy**

$$\overline{\overline{\mathbf{C}}} = \overline{\overline{\mathbf{F}}}^T \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}}$$

suivant la formule

$$d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}' = \overline{\overline{\mathbf{C}}}(d\overline{\mathbf{X}}, d\overline{\mathbf{X}}') = d\overline{\mathbf{X}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{C}}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}' ,$$

Le mouvement n'est pas déformant autour de $\overline{\mathbf{X}}$ $\iff$ $\overline{\overline{\mathbf{C}}} = \overline{\overline{\mathbf{1}}}$

$\iff$ $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ transformation orthogonale (directe, rotation !)

$$\iff \overline{\overline{\mathbf{e}}} = \overline{\overline{\mathbf{0}}}$$

si $\overline{\overline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathbf{C}}} - \overline{\overline{\mathbf{1}}}\right)$ **tenseur des déformations de Green-Lagrange**.

Interprétation du tenseur des déformations de Green-Lagrange

$$\overline{\overline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathbf{C}}} - \overline{\overline{\mathbf{1}}}\right)$$

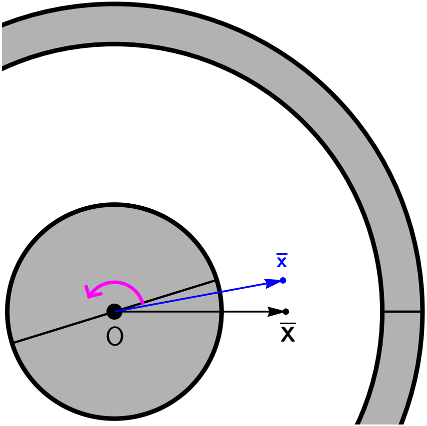
donc ce tenseur permet de calculer la variation du produit scalaire

$$\overline{\overline{\mathbf{e}}}(d\overline{\mathbf{X}}, d\overline{\mathbf{X}}') = \frac{1}{2}\left(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}' - d\overline{\mathbf{X}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}'\right)$$

$\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ et $\overline{\overline{\mathbf{e}}}$ **symétriques** sont **diagonalisables** sur une base orthonormée ;
vecteurs et valeurs propres ont une signification physique ;
les composantes des matrices représentatives ont une signification physique...
Cf. les exercices 2.1 et 2.2 que nous n'aurons malheureusement pas le temps d'aborder en TD...

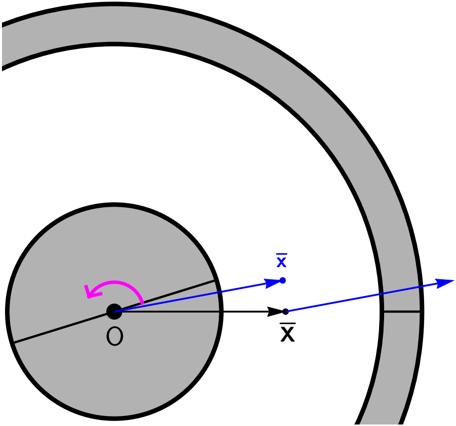
Retour sur la cinématique des solides avec l'expérience de Couette

Le **vecteur placement** $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{\Phi}}(\overline{\mathbf{X}})$ n'est **pas très intrinsèque**,
au sens où il dépend du choix de l'origine O du repère :



Retour sur la cinématique des solides avec l'expérience de Couette

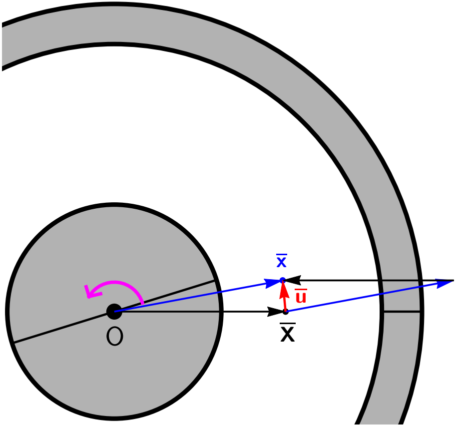
Le **vecteur placement $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{\Phi}}(\overline{\mathbf{X}})$** n'est **pas très intrinsèque**,
au sens où il dépend du choix de l'origine O du repère :



De plus, si on attache $\overline{\mathbf{\Phi}}$ à $\overline{\mathbf{X}}$ on arrive « n'importe où »...

Retour sur la cinématique des solides avec l'expérience de Couette

Le **vecteur placement $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{\Phi}}(\overline{\mathbf{X}})$** n'est **pas très intrinsèque**,
au sens où il dépend du choix de l'origine O du repère :



Par contre le **vecteur déplacement $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{X}}$** est **« très intrinsèque »**,
et naturellement « attaché » à $\overline{\mathbf{X}}$.

Reformulations en termes du champ de déplacement

$$\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{X}} \implies$$ **gradient de la transformation**

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{\nabla}}_{\mathbf{X}}\, \overline{\mathbf{x}} = \overline{\overline{1}} + \overline{\overline{\nabla}}_{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{u}}$$

$\implies$ **tenseur des dilatations de Cauchy**

$$\overline{\overline{\mathbf{C}}} = \overline{\overline{\mathbf{F}}}^T \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{1}} + \overline{\overline{\nabla}} \overline{\mathbf{u}} + \overline{\overline{\nabla}} \overline{\mathbf{u}}^T + \overline{\overline{\nabla}} \overline{\mathbf{u}}^T \cdot \overline{\overline{\nabla}} \overline{\mathbf{u}}$$

$\implies$ **tenseur des déformations de Green-Lagrange**

$$\overline{\overline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathbf{C}}} - \overline{\overline{1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\nabla}} \overline{\mathbf{u}} + \overline{\overline{\nabla}} \overline{\mathbf{u}}^T + \overline{\overline{\nabla}} \overline{\mathbf{u}}^T \cdot \overline{\overline{\nabla}} \overline{\mathbf{u}}\right)$$

Cas de petites transformations

Si

$$||\overline{\overline{\mathbf{F}}} - \overline{\overline{\mathbf{1}}}|| \ll 1 \iff ||\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}}|| \ll 1$$

alors

$$\overline{\overline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2}\Big(\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}} + \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}}^T + \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}}^T \cdot \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}}\Big)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{e}}} \simeq \frac{1}{2}\Big(\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}} + \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}}^T\Big) =: \overline{\overline{\epsilon}}$$ **tenseur des déformations linéarisé**

Interprétation physique

$$\overline{\overline{\epsilon}}(d\overline{\mathbf{X}}, d\overline{\mathbf{X}}') \simeq \frac{1}{2}\big(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}' - d\overline{\mathbf{X}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}'\big) \iff d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}' \simeq d\overline{\mathbf{X}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}' + 2 d\overline{\mathbf{X}} \cdot \overline{\overline{\epsilon}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}'$$

- $d\overline{\mathbf{X}} = dX\ \overline{\mathbf{e}}_1 \implies \dfrac{dx}{dX} = \sqrt{1 + 2\epsilon_{11}} \simeq 1 + \epsilon_{11}$

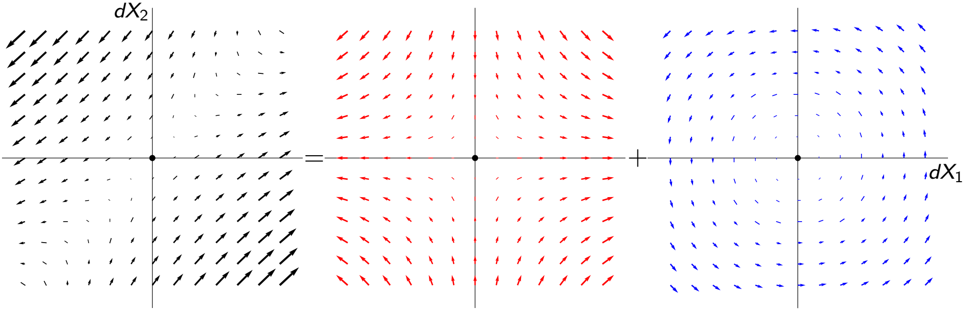
  ϵ_{11} allongement réduit ou relatif

- $d\overline{\mathbf{X}} = dX\ \overline{\mathbf{e}}_1$ et $d\overline{\mathbf{X}}' = dX\ \overline{\mathbf{e}}_2$

  $\implies \theta =$ angle de glissement $= \dfrac{\pi}{2} - (\widehat{d\overline{\mathbf{x}}, d\overline{\mathbf{x}}'}) \simeq 2\epsilon_{12}$

Décomposition locale d'un champ de déplacement linéarisé

$$d\overline{\mathbf{x}} = d\overline{\mathbf{X}} + d\overline{\mathbf{u}} \quad \text{avec} \quad d\overline{\mathbf{u}} = \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}} \cdot d\overline{\mathbf{X}} = \underbrace{\overline{\overline{\epsilon}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}}_{\text{déformation}} + \underbrace{\overline{\mathbf{\Omega}} \wedge d\overline{\mathbf{X}}}_{\text{rotation}}$$

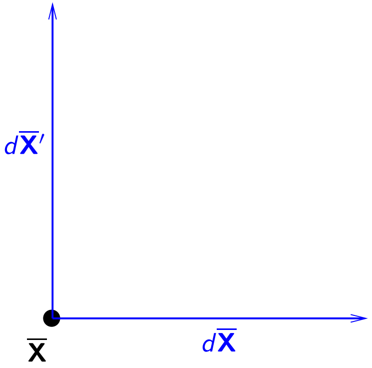


$$\overline{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{2}\,\overline{\mathbf{rot}}(\overline{\mathbf{u}})$$

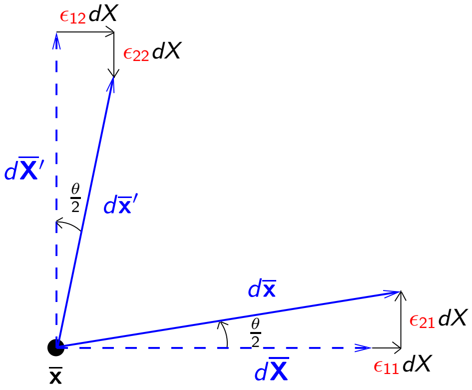
Cas d'un mouvement plan déformant sans rotation

$$d\overline{\mathbf{x}} = d\overline{\mathbf{X}} + d\overline{\mathbf{u}} \quad \text{avec} \quad d\overline{\mathbf{u}} = \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}} \cdot d\overline{\mathbf{X}} = \overline{\overline{\epsilon}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}$$

configuration de référence :



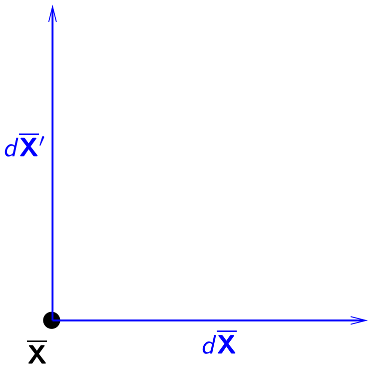
actuelle :

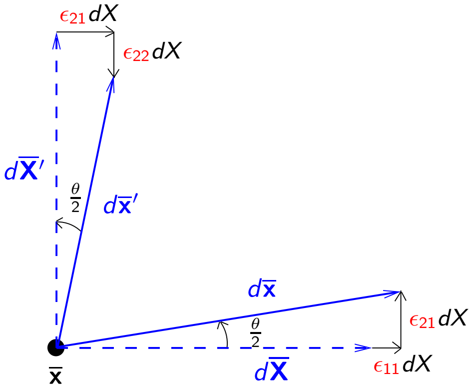


Cas d'un mouvement plan déformant sans rotation

$$d\overline{\mathbf{x}} = d\overline{\mathbf{X}} + d\overline{\mathbf{u}} \quad \text{avec} \quad d\overline{\mathbf{u}} = \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}} \cdot d\overline{\mathbf{X}} = \overline{\overline{\epsilon}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}$$

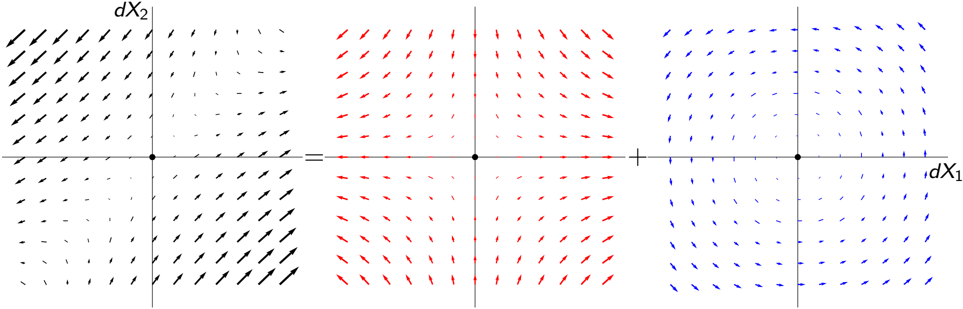
configuration de référence : actuelle :





Décomposition locale d'un champ de déplacement linéarisé

$$d\overline{\mathbf{x}} \;=\; d\overline{\mathbf{X}} \;+\; d\overline{\mathbf{u}} \quad \text{avec} \quad d\overline{\mathbf{u}} \;=\; \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}}\cdot d\overline{\mathbf{X}} \;=\; \underbrace{\overline{\overline{\epsilon}}\cdot d\overline{\mathbf{X}}}_{\text{déformation}} \;+\; \underbrace{\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}\wedge d\overline{\mathbf{X}}}_{\text{rotation}}$$



En général la **dilatation volumique**

$$J \;=\; \frac{d^3x}{d^3X} \;=\; \det\overline{\overline{\mathbf{F}}} \;=\; \det\left(\overline{\overline{\mathbf{1}}} \;+\; \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}}\right)$$

ce qui donne **en petite transformation** (cf. l'exercice de CT 1.11)

$$J \;=\; 1 \;+\; \mathrm{div}\overline{\mathbf{u}} \quad\longrightarrow\quad \text{signification de } \mathrm{div}\overline{\mathbf{u}} = \mathrm{tr}\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}} = \mathrm{tr}\overline{\overline{\epsilon}}$$

Approche lagrangienne des déformations : bilan (1)

Tenseur gradient de la transformation :

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{\nabla}}_{\mathbf{X}} \overline{\mathbf{\Phi}} \;:\quad d\overline{\mathbf{X}} \longmapsto \overline{\overline{\mathbf{F}}} \cdot d\overline{\mathbf{X}} = d\overline{\mathbf{x}}$$

Tenseur des dilatations de Cauchy :

$$\overline{\overline{\mathbf{C}}} = \overline{\overline{\mathbf{F}}}^T \cdot \overline{\overline{\mathbf{F}}} \;:\quad (d\overline{\mathbf{X}}, d\overline{\mathbf{X}}') \longmapsto \overline{\overline{\mathbf{C}}}(d\overline{\mathbf{X}}, d\overline{\mathbf{X}}') = d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}'$$

Tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\overline{\overline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathbf{C}}} - \overline{\overline{\mathbf{1}}}\right) \;:\quad (d\overline{\mathbf{X}}, d\overline{\mathbf{X}}') \longmapsto \overline{\overline{\mathbf{e}}}(d\overline{\mathbf{X}}, d\overline{\mathbf{X}}') = \frac{1}{2}(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}' - d\overline{\mathbf{X}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}')$$

Petite transformation :

$$\overline{\overline{\mathbf{F}}} - \overline{\overline{\mathbf{1}}} = \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}} \ll 1 \quad \text{avec} \quad \overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{X}} \text{ le } \textbf{champ de déplacement}$$

Tenseur des déformations linéarisé :

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \left(\overline{\overline{\mathbf{e}}} \text{ à l'ordre } \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}} + \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}}^T\right)$$

Approche lagrangienne des déformations : bilan (2)

Décomposition locale du champ de déplacement linéarisé :

$$d\overline{\mathbf{u}} = \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}} \cdot d\overline{\mathbf{X}} = \underbrace{\overline{\boldsymbol{\Omega}} \wedge d\overline{\mathbf{X}}}_{\text{rotation}} + \underbrace{\overline{\overline{\epsilon}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}}_{\text{déformation}}$$

Rotationnel de $\overline{\mathbf{u}}$:

$$\overline{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{rot}}(\overline{\mathbf{u}})$$

Divergence de $\overline{\mathbf{u}}$:

$$\mathrm{div}\overline{\mathbf{u}} = \mathrm{tr}\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{u}} = \mathrm{tr}\overline{\overline{\epsilon}}$$

Dilatation volumique :

$$J = \frac{d^3x}{d^3X} = \det \overline{\overline{\mathbf{F}}}$$

ce qui donne **en petite transformation**

$$J = 1 + \mathrm{div}\overline{\mathbf{u}}$$

Approche eulerienne : bilan (cf. poly)

Tenseur gradient de vitesse :

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}} = \overline{\overline{\nabla}}_{\mathbf{x}} \overline{\mathbf{v}} \quad : \quad d\overline{\mathbf{x}} \longmapsto \overline{\overline{\mathbf{K}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} = \frac{d(d\overline{\mathbf{x}})}{dt}$$

Divergence de la vitesse :

$$\mathrm{div}\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{d^3x} \frac{d(d^3x)}{dt} = \textbf{taux de dilatation volumique}$$

Tenseur des taux de déformation :

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathbf{K}}} + \overline{\overline{\mathbf{K}}}^T\right) \quad : \quad (d\overline{\mathbf{x}}, d\overline{\mathbf{x}}') \longmapsto \overline{\overline{\mathbf{D}}}(d\overline{\mathbf{x}}, d\overline{\mathbf{x}}') = \frac{1}{2} \frac{d(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}')}{dt}$$

Décomposition locale du champ de vitesse linéarisé :

$$d\overline{\mathbf{v}} = \overline{\overline{\nabla}} \overline{\mathbf{v}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} = \underbrace{\overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}}_{\text{déformation}} + \underbrace{\overline{\omega} \wedge d\overline{\mathbf{x}}}_{\text{rotation}} \quad \text{avec} \quad \overline{\omega} = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{rot}}(\overline{\mathbf{v}})$$

En conclusion...

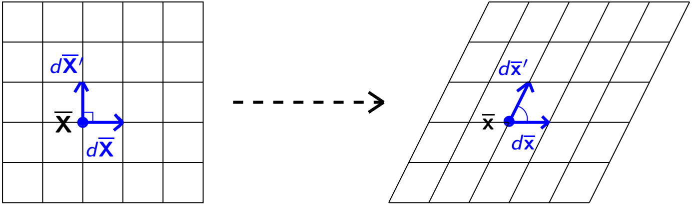
Il importe d'être capable de faire le lien entre les deux approches

$\rightarrow$ cf. le document de cours

$\rightarrow$ cf. le problème 2.1 traité en TD,
qui consiste à étudier une « **transformation homogène** »

$$\left(\begin{array}{rl} & \overline{\overline{\mathbf{F}}} \text{ homogène i.e. ne dépend pas de } \overline{\mathbf{X}} \\ \Longleftrightarrow & \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}_0 + \overline{\overline{\mathbf{F}}} \cdot \overline{\mathbf{X}} \ \text{ avec } \overline{\overline{\mathbf{F}}} \text{ indép. de } \overline{\mathbf{X}} \end{array} \right)$$

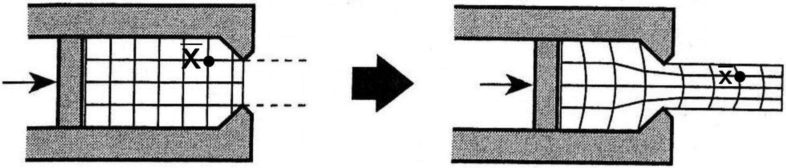
de « **cisaillement pur** » (= « système de Couette plan ») :



Attention :

toutes les transformations ne sont pas homogènes !

C'est le cas par exemple de l'**extrusion** :



[Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. 2000 *The finite elements method*]

Rappel : page web du module :

http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc

Équipe pédagogique (avec un changement de salle) :

Groupe après-midi 14h30 - 16h30	matin 11h - 13h	Salle	Chargé(e) de TD	Laboratoire
A	E	B304	Lucile Dezerald	IJL
B	F	A306	Mathieu Jenny	Lemta
C	G	A304	Sébastien Allain	IJL
D	H	A303	Jean-Sébastien Kroll	IJL
	I	B301	Antonio Pereira	Lemta

Les binômes ou trinômes en exposé de TD
sont en salle 5 minutes avant pour démarrer à l'heure !

Question ?