

Mécanique des milieux continus solides et fluides

Séance 3

Emmanuel Plaut,

Sébastien Allain, Lucile Dézerald, Mathieu Jenny,

Matthieu Gisselbrecht & Jean-Sébastien Kroll

- 1 **Objet de l'étude : milieux solides et fluides**
- 2 **Retour sur le modèle du milieu continu**
- 3 **Cinématique élémentaire**
- 4 **Questions**

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc>

Avant tout il y a les solides et les fluides

- ▶ le **solide** possède une **forme propre** indépendante du support sur lequel il est posé ;
- ▶ le **fluide** (**liquide** ou **gaz**, selon sa densité + ou – grande) **épouse la forme** du support sur ou dans lequel il est posé.

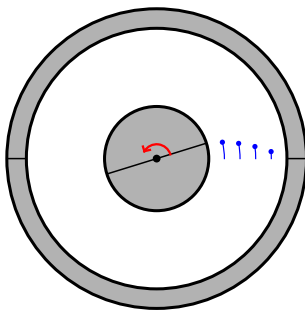
Sauf que

- ▶ cette distinction a ses limites, et dépend sans doute de la durée de l'expérience, cf. la notion de « nombre de Déborah » par exemple...
- ▶ l'expérience « garder sa forme propre » est peu contrôlée, ne permet pas de mesures simples...

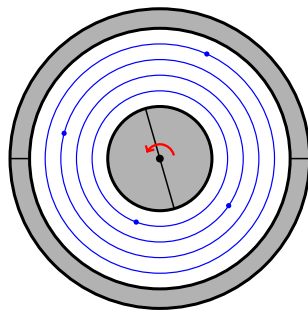
↔ nécessité a minima d'une **expérience de rhéologie** mieux définie.

L'expérience de Couette (cylindrique) permet de discriminer entre solides et fluides

On soumet un lopin de **matériau solidaire de cylindres** à des petites **forces tangentielles** via un couple imposé au cylindre intérieur de façon permanente :



réponse du **solide** :
petits déplacements
vitesses = 0



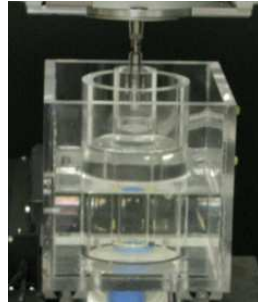
fluide :
grands déplacements
petites vitesses $\neq 0$

L'expérience de Couette (cylindrique) permet de discriminer
entre solides et fluides



Entreprise VULKAN
 Cf. le Pb. 4.2

Système d'accouplement élastique



Lemta
 Cf. le Pb. 7.2

Rhéomètre de Couette cylindrique

But du module : mettre en place toutes les notions et équations
 qui permettront de **modéliser ces systèmes** !

Pour décrire les mouvements de **solides** ou **fluides**,
il est hors de question de calculer le mouvement de tous les **atomes**
ou **molécules** !

En effet cette tâche dépassera encore pendant très longtemps les capacités des meilleurs ordinateurs, parce que le **nombre d'Avogadro** est très grand !

Dans un litre d'eau par exemple, comme la masse d'une mole d'eau est

$$M_{\text{H}_2\text{O}} = 2M_{\text{H}} + M_{\text{O}} = 2 \text{ g} + 16 \text{ g} = 18 \text{ g} ,$$

il y a

$$n = \frac{1 \text{ kg}}{18 \text{ g}} = 56 \text{ moles d'eau}$$

soit

$$n N_A = 3,3 \cdot 10^{25} \text{ molécules...}$$

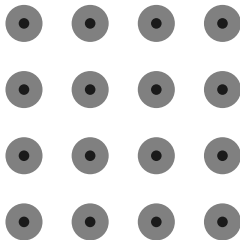
à comparer aux quelques petaoctets de mémoire des plus grands clusters,

$$1 \text{ petaoctet} = 10^{15} \text{ octets} .$$

Pour décrire les mouvements de **solides** ou **fluides**,
il est hors de question de calculer le mouvement de tous les **atomes**
ou **molécules** !

D'où la nécessité d'une **approche à plus grande échelle**
basée sur une **prise de moyenne**.

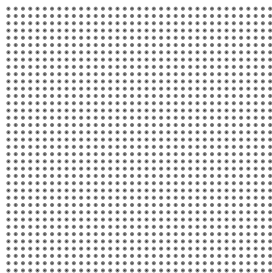
Pour l'illustrer on considère un cristal. À l'échelle des atomes, $\ell \simeq$ quelques Å,
il est fortement hétérogène :



Pour décrire les mouvements de **solides** ou **fluides**,
il est hors de question de calculer le mouvement de tous les **atomes**
ou **molécules** !

D'où la nécessité d'une **approche à plus grande échelle**
basée sur une **prise de moyenne**.

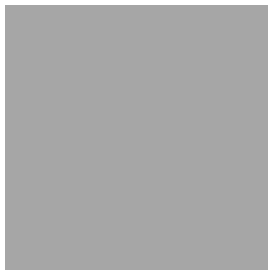
Si on le considère à une échelle plus grande,
on commence à voir une « texture » quasi-homogène :



Pour décrire les mouvements de **solides** ou **fluides**,
il est hors de question de calculer le mouvement de tous les **atomes**
ou **molécules** !

D'où la nécessité d'une **approche à plus grande échelle**
basée sur une **prise de moyenne**.

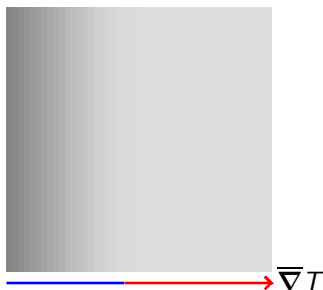
Si on le considère à une échelle encore plus grande,
il apparaît comme un « **milieu continu** » :



Pour décrire les mouvements de **solides** ou **fluides**,
il est hors de question de calculer le mouvement de tous les **atomes**
ou **molécules** !

D'où la nécessité d'une **approche à plus grande échelle**
basée sur une **prise de moyenne**.

À des très grandes échelles, de nouvelles inhomogénéités apparaîtront,
par exemple sous l'effet d'un gradient thermique :



Modèle du milieu continu (MC) :

Collection « continue » de « particules matérielles »

échelle des
particules matérielles
 d

«

échelle des
hétérogénéités macroscopiques
 L

« Volumes Élémentaires Représentatifs »

dans un état local homogène de quasi-équilibre
thermodynamique

échelle des
hétérogénéités microscopiques
 l

«

échelle des
particules matérielles
 d

- ▶ dans un **solide** ou **liquide simple**,
 $l \simeq 10 \text{ \AA} \ll d \simeq 10 \text{ \mu m} \ll L \simeq 1 \text{ cm} \implies$ hyp. du MC OK.
- ▶ dans un **gaz** c'est plus compliqué, cf. le poly.

Modèle du milieu continu (MC)

Attention dans certains **matériaux de type « composites »**
le « **Volume Élémentaire Représentatif** » peut être très gros,
cf. ce « **béton chargé bois** »,
nouveau matériau pour l'isolation dans le bâtiment :



[Rémy, B.
CRITT Bois
2008]

Modèle du milieu continu (MC)

Pire certains « géomatériaux » comme cette « moraine » présentent des hétérogénéités sur une gamme d'échelles très vaste, des plaquettes d'argiles de quelques microns à des blocs rocheux de quelques mètres :



[Gunzburger, Y.
2006]

Modèle du milieu continu (MC)

Pire certains « géomatériaux » comme cette « moraine » présentent des hétérogénéités sur une gamme d'échelles très vaste, des plaquettes d'argiles de quelques microns à des blocs rocheux de quelques mètres :



[Gunzburger, Y. 2006]

↔ on ne peut sans doute pas définir de « VÉR »,
et pourtant ce matériau existe !...

Revenant à des matériaux pour lesquels le modèle du MC s'applique, on peut définir en tout « point matériel » $\bar{\mathbf{x}}$

= particule matérielle

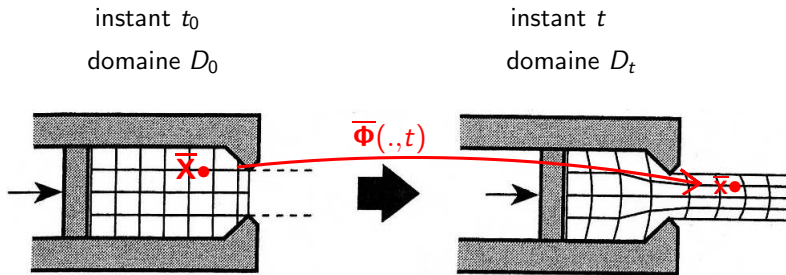
= VÉR en quasi-équilibre thermodynamique

- ▶ une masse volumique moyenne $\rho(\bar{\mathbf{x}}, t)$;
- ▶ une vitesse moyenne $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$;
- ▶ une température moyenne $T(\bar{\mathbf{x}}, t)$...

d'où la possibilité de décrire le **mouvement** par la « **cinématique** » comme expliqué dans le poly...

Cinématique des MC : approche lagrangienne

Ce qui prime c'est la **matière**, il faut donc la suivre dans son mouvement, par exemple un **mouvement d'« extrusion »** :

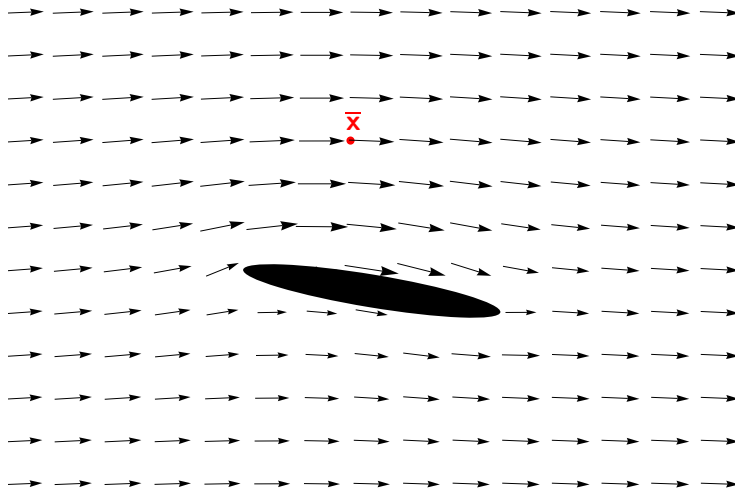


[Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. 2000 The finite elements method]

« placement »

Cinématique des MC : approche eulerienne

Ce qui prime c'est l'**espace**, il faut donc définir en tout point un **vecteur vitesse** $\vec{v}(\vec{x}, t)$, comme dans cet **écoulement autour d'une aile d'avion** :



Lagrange

Primauté de la **matière**

↔ champ de **placement** $\bar{\Phi}(.,t) : \bar{\mathbf{X}} \in D_0 \mapsto \bar{\mathbf{x}} \in D_t$

vs Euler

Primauté de l'**espace**

↔ champ de **vitesse** $\bar{\mathbf{v}}(.,t) : \bar{\mathbf{x}} \in D_t \mapsto \bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$

Il importe d'être capable de **faire le lien** entre les deux approches !

C'est grosso-modo le sujet du problème 1.1 qui sera traité en TD.

Dérivées particulières en approche eulerienne

- ▶ Si ρ est un **champ scalaire**,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\overline{\nabla\rho}) \cdot \mathbf{v}$$

où $\overline{\nabla\rho}$ est le tenseur d'ordre 1 tel que, dans le cas de variations spatiales seulement,

$$d\rho = (\overline{\nabla\rho}) \cdot d\mathbf{x}.$$

- ▶ Si \mathbf{u} est un **champ de vecteurs**,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\overline{\nabla\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v}.$$

où $\overline{\nabla\mathbf{u}}$ est le tenseur d'ordre 2 tel que, dans le cas de variations spatiales seulement,

$$d\mathbf{u} = (\overline{\nabla\mathbf{u}}) \cdot d\mathbf{x}.$$

- ▶ Les **termes d'« advection »** peuvent jouer un rôle important, cf. le problème 1.2...

Rappel : équipe pédagogique pour le TD :

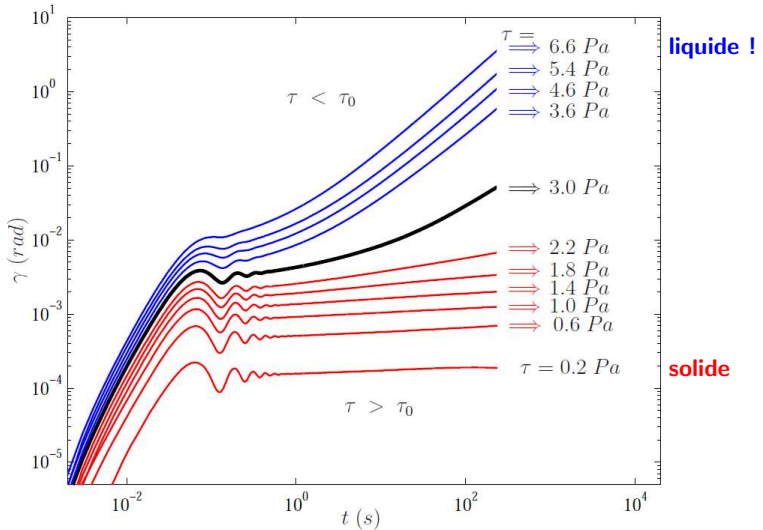
Chargé(e) de TD	Labo.	Spécialité	Groupe(s)	Salle
L. Dézerald	IJL	Méca. et Φ des solides	XM1 & YM1	B301
M. Jenny	Lemta	Méca. et Φ des fluides	XM2 & YM2	B304
S. Allain	IJL	Méca. et Φ des solides	XM3 & YM3	B305
M. Gisselbrecht	IJL	Méca. des fluides multiphasiques	XM4 & YM4	B306
J.-S. Kroll	IJL	Méca. des fluides multiphasiques	XM5	B307-308

Rappel : page web :

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc>

Questions ?

Complément : expérience rhéologique : fluage de Carpolol à 0,2%



[Esmael, A. 2008 *Thèse de doctorat UHP - Lemta* - Dir. de thèse : Nouar, C.]