

## Séance 3 de **mécanique des milieux continus solides et fluides**

Emmanuel Plaut

- 1 Objet de l'étude : solides et fluides**
- 2 Retour sur le modèle du milieu continu**
- 3 Cinématique élémentaire**
- 4 Équipe & méthodes pédagogiques - Questions**

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc>

## Avant tout il y a les solides et les fluides

- le **solide** possède une **forme propre** indépendante du support sur lequel il est posé ;
- le **fluide** (**liquide** ou **gaz**, selon sa densité + ou – grande) **épouse la forme** du support sur ou dans lequel il est posé.

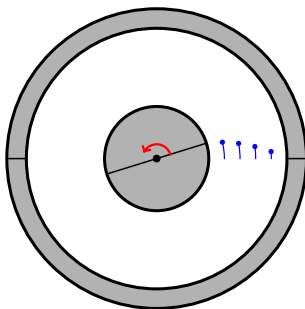
Sauf que

- l'expérience « garder sa forme propre » est peu contrôlée, ne permet pas de mesures simples...
- cette distinction a ses limites, et dépend sans doute de la durée de l'expérience, cf. la notion de « nombre de Déborah » par exemple...

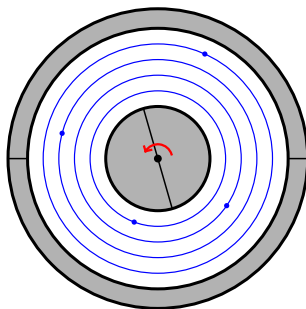
↪ nécessité a minima d'une **expérience de rhéologie** mieux définie.

## L'expérience de Couette (cylindrique) permet de discriminer entre solides et fluides

On soumet un lopin de **matériau solidaire de cylindres** à des **petites forces tangentielles** via un **couple imposé au cylindre intérieur** de façon permanente :



réponse du **solide** :  
petits déplacements  
vitesses = 0



**fluide** :  
grands déplacements  
petites vitesses  $\neq 0$

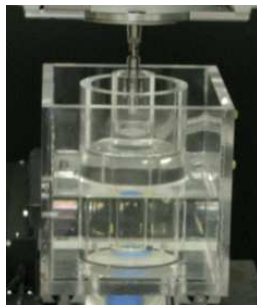
## L'expérience de Couette (cylindrique) permet de discriminer entre solides et fluides



Entreprise VULKAN

Cf. le Pb. 4.3

*Système d'accouplement élastique*



Lemta

Cf. le Pb. 7.2

*Rhéomètre de Couette cylindrique*

**But du module :** mettre en place toutes les notions et équations qui permettront de **modéliser ces systèmes** !

Pour décrire les mouvements de **solides** ou **fluides**,  
il est hors de question de calculer le mouvement de tous les **atomes**  
ou **molécules** !

En effet cette tâche dépassera encore pendant très longtemps les capacités des meilleurs ordinateurs, parce que le **nombre d'Avogadro** est très grand !

Dans un litre d'eau par exemple, comme la masse d'une mole d'eau est

$$M_{\text{H}_2\text{O}} = 2M_{\text{H}} + M_{\text{O}} = 2 \text{ g} + 16 \text{ g} = 18 \text{ g} ,$$

il y a

$$n = \frac{1 \text{ kg}}{18 \text{ g}} = 56 \text{ moles d'eau}$$

soit

$$n N_A = 3,3 \cdot 10^{25} \text{ molécules...}$$

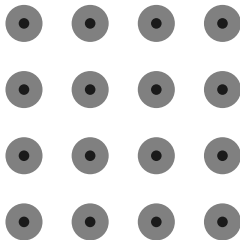
à comparer aux quelques petaoctets de mémoire des plus grands clusters,

$$1 \text{ petaoctet} = 10^{15} \text{ octets} .$$

Pour décrire les mouvements de **solides** ou **fluides**,  
il est hors de question de calculer le mouvement de tous les **atomes**  
ou **molécules** !

D'où la nécessité d'une **approche à plus grande échelle**  
basée sur une **prise de moyenne**.

Pour l'illustrer on considère un **crystal**. À l'échelle des atomes,  $\ell \simeq$  quelques Å,  
il est fortement hétérogène :





Pour décrire les mouvements de **solides** ou **fluides**,  
il est hors de question de calculer le mouvement de tous les **atomes**  
ou **molécules** !

D'où la nécessité d'une **approche à plus grande échelle**  
basée sur une **prise de moyenne**.

Si on le considère à une échelle encore plus grande,  
il apparait comme un « **milieu continu** » :





Pour décrire les mouvements de **solides** ou **fluides**,  
il est hors de question de calculer le mouvement de tous les **atomes**  
ou **molécules** !

D'où la nécessité d'une

## Modèle du milieu continu (MC) :

### Collection « continue » de « particules matérielles »

échelle des  
 particules matérielles  
 $d$

$\ll$

échelle des  
 hétérogénéités macroscopiques  
 $L$

### « Volumes Élémentaires Représentatifs » dans un état local homogène de quasi-équilibre thermodynamique

échelle des  
 hétérogénéités microscopiques  
 $l$

$\ll$

échelle des  
 particules matérielles  
 $d$

- dans un **solide** ou **liquide simple**,  
 $l \simeq 10 \text{ \AA} \ll d \simeq 10 \text{ \mu m} \ll L \simeq 1 \text{ cm} \implies$  hyp. du MC OK.
- dans un **gaz** c'est plus compliqué, cf. le poly.

## Modèle du milieu continu (MC)

Attention dans certains **matériaux de type « composites »**  
le « **Volume Élémentaire Représentatif** » peut être très gros,  
cf. ce « **béton chargé bois** »,  
nouveau matériau pour l'isolation dans le bâtiment :



[ Rémy, B.  
CRITT Bois  
2008 ]

## Modèle du milieu continu (MC)

Pire certains « géomatériaux » comme cette « moraine » présentent des hétérogénéités sur une gamme d'échelles très vaste, des plaquettes d'argiles de quelques microns à des blocs rocheux de quelques mètres :



[ Gunzburger, Y.  
2006 ]

## Modèle du milieu continu (MC)

Pire certains « géomatériaux » comme cette « moraine » présentent des hétérogénéités sur une gamme d'échelles très vaste, des plaquettes d'argiles de quelques microns à des blocs rocheux de quelques mètres :



[ Gunzburger, Y. 2006 ]

↔ on ne peut sans doute pas définir de « VÉR »,  
et pourtant ce matériau existe !...

Revenant à des matériaux pour lesquels le modèle du MC s'applique, on peut définir en tout « point matériel »  $\bar{\mathbf{x}}$

= particule matérielle

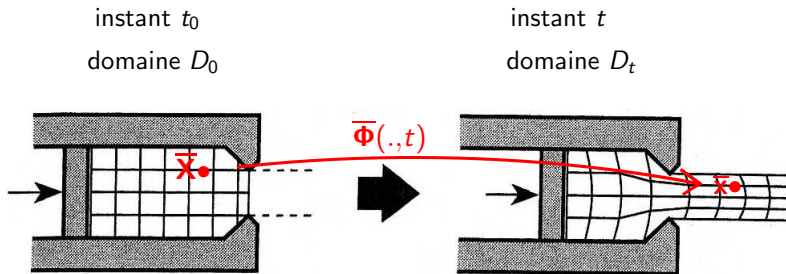
= **VÉR en quasi-équilibre thermodynamique**

- une masse volumique **moyenne**  $\rho(\bar{\mathbf{x}}, t)$  ;
- une vitesse **moyenne**  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$  ;
- une température **moyenne**  $T(\bar{\mathbf{x}}, t)$ ...

d'où la possibilité de décrire le **mouvement** par la « **cinématique** » comme expliqué dans le poly...

## Cinématique des MC : approche lagrangienne

Ce qui prime c'est la **matière**, il faut donc la suivre dans son mouvement, par exemple un **mouvement d'« extrusion »** :

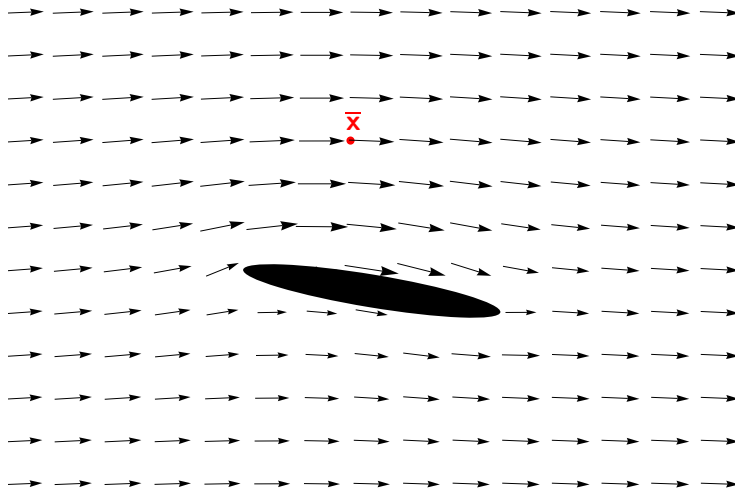


[ Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. 2000 The finite elements method ]

« **placement** »

## Cinématique des MC : approche eulerienne

Ce qui prime c'est l'**espace**, il faut donc définir en tout point un **vecteur vitesse**  $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ , comme dans cet **écoulement autour d'une aile d'avion** :





## Lagrange

Primauté de la **matière**

↔ champ de **placement**  $\bar{\Phi}(.,t) : \bar{\mathbf{X}} \in D_0 \mapsto \bar{\mathbf{x}} \in D_t$

## vs Euler

Primauté de l'**espace**

↔ champ de **vitesse**  $\bar{\mathbf{v}}(.,t) : \bar{\mathbf{x}} \in D_t \mapsto \bar{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$

Il importe d'être capable de **faire le lien** entre les deux approches !

C'est grosso-modo le sujet du problème 1.1 qui sera traité en TD.

## Dérivées particulières en approche eulerienne

- Si  $\rho$  est un **champ scalaire**,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\overline{\nabla\rho}) \cdot \mathbf{v}$$

où  $\overline{\nabla\rho}$  est le tenseur d'ordre 1 tel que, dans le cas de variations spatiales seulement,

$$d\rho = (\overline{\nabla\rho}) \cdot d\mathbf{x}.$$

- Si  $\mathbf{u}$  est un **champ de vecteurs**,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\overline{\nabla\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{v}.$$

où  $\overline{\nabla\mathbf{u}}$  est le tenseur d'ordre 2 tel que, dans le cas de variations spatiales seulement,

$$d\mathbf{u} = (\overline{\nabla\mathbf{u}}) \cdot d\mathbf{x}.$$

- Les **termes d'« advection »** peuvent jouer un rôle important, cf. le problème 1.2...

## Équipe pédagogique pour le TD 3 :

Groupes	salle	chargé(e) de TD	Département	Laboratoire
1.1 & 2.1	A303	Lucile Dezerald	Matériaux	IJL
1.2 & 2.2	A304	Sébastien Allain	Matériaux	IJL
1.3 & 2.3	A306	Jean-Sébastien Kroll	Procédés, Énergie, Env.	IJL
1.4 & 2.4	A307	Matthieu Gisselbrecht*	Procédés, Énergie, Env.*	IJL*

\* en remplacement de Mathieu Jenny | Énergie & Fluides | Lemta, en déplacement...

### cf. la page web

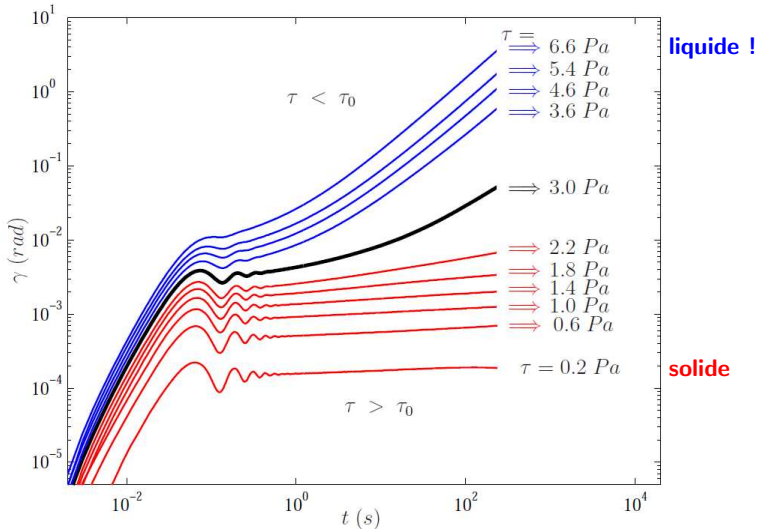
<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc>

### qui décrit aussi nos **méthodes pédagogiques & d'évaluation !**

- **Exposé de TD** par gpe (binôme ou trinôme) désigné à la fin du TD  $n= 3$  à 8, réalisé au début du TD  $n + 1$  :  
durée 8-9 minutes, présentation de 3 ou 4 plans...
- **Test final** de 3h vendredi 1er décembre : problème à rédigier !..

**Des questions ?**

## Complément : expérience rhéologique : fluage de Carbopol à 0,2%



[ Esmael, A. 2008 *Thèse de doctorat UHP - Lemta* - Dir. de thèse : Nouar, C. ]