

## Séance 2 de **mécanique des milieux continus solides et fluides**

### L'outil mathématique calcul tensoriel et différentiel

Emmanuel Plaut

#### 1 Retour sur l'analyse tensorielle (cartésienne)

#### 2 Notions sur les symétries des systèmes

Principe de Curie, illustration sur un exemple

#### 3 Analyse tensorielle en coordonnées cylindriques

Illustration sur le même exemple

#### 4 Infos sur le TD - Questions

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc>

## Analyse tensorielle : gradient

**Champ tensoriel  $\mathbf{T}^0$**  d'ordre 0 :

application de  $\Omega$  ouvert de l'espace physique  $\mathcal{T}_1$  dans  $\mathcal{T}_0 = \mathbb{R}$ ,

$$\forall \bar{\mathbf{x}} \in \Omega, \quad \mathbf{T}^0(\bar{\mathbf{x}}) \in \mathcal{T}_0.$$

**Champ tensoriel  $\mathbf{T}^n$**  d'ordre  $n \geq 1$  :

application de  $\Omega$  ouvert de l'espace physique  $\mathcal{T}_1$  dans  $\mathcal{T}_n$ ,

$$\forall \bar{\mathbf{x}} \in \Omega, \quad \mathbf{T}^n(\bar{\mathbf{x}}) \text{ application linéaire } \begin{array}{l} \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_{n-1} \\ \bar{\mathbf{h}} \longmapsto \mathbf{T}^n(\bar{\mathbf{x}}) \cdot \bar{\mathbf{h}} \end{array}.$$

**Gradient :  $\nabla \mathbf{T}^n$**  champ tensoriel d'ordre  $n+1$  tq

$$\forall \bar{\mathbf{x}} \in \Omega, \quad \nabla \mathbf{T}^n(\bar{\mathbf{x}}) \text{ application linéaire } \begin{array}{l} \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_n \\ d\bar{\mathbf{x}} \longmapsto \nabla \mathbf{T}^n(\bar{\mathbf{x}}) \cdot d\bar{\mathbf{x}} = d\mathbf{T}^n(\bar{\mathbf{x}}) \end{array},$$

$d\mathbf{T}^n(\bar{\mathbf{x}})$  étant  $\mathbf{T}^n(\bar{\mathbf{x}} + d\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{T}^n(\bar{\mathbf{x}})$  linéarisé pour  $d\bar{\mathbf{x}}$  infinitésimal.

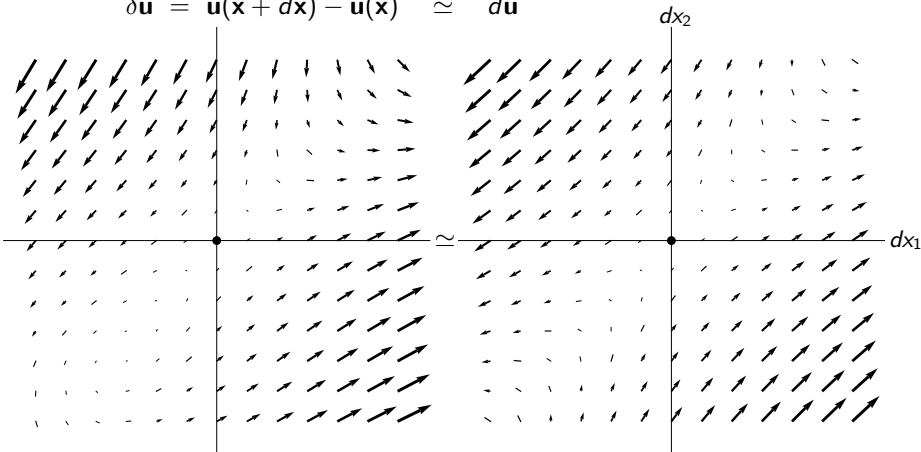
NB : souvent on note, au lieu de  $\nabla \mathbf{T}^n(\bar{\mathbf{x}})$ ,  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{T}^n$  voire  $\nabla \mathbf{T}^n$ .

## Gradient d'un champ vectoriel

Au point  $\bar{x}$ ,

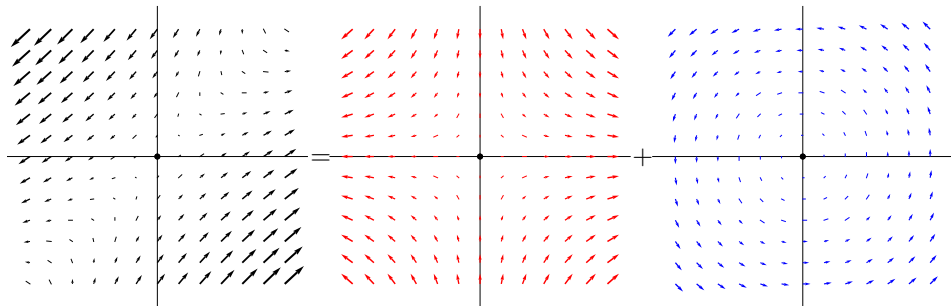
$\overline{\nabla} \bar{u}$  application linéaire  $d\bar{x} \mapsto \overline{\nabla} \bar{u} \cdot d\bar{x} = d\bar{u} = \bar{u}(\bar{x} + d\bar{x}) - \bar{u}(\bar{x})$  linéarisé.

$$\delta \bar{u} = \bar{u}(\bar{x} + d\bar{x}) - \bar{u}(\bar{x}) \simeq d\bar{u}$$



# Décomposition du gradient en parties **symétrique** + **antisymétrique**

$$d\bar{\mathbf{u}} = \overline{\nabla \mathbf{u}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} = \underbrace{\bar{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}}_{\text{déformation}} + \underbrace{\bar{\boldsymbol{\Omega}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}}_{\text{rotation}}$$



$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} (\overline{\nabla \mathbf{u}} + \overline{\nabla \mathbf{u}}^T)$$

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2} (\overline{\nabla \mathbf{u}} - \overline{\nabla \mathbf{u}}^T), \quad \bar{\boldsymbol{\Omega}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} = \bar{\boldsymbol{\Omega}} \wedge d\bar{\mathbf{x}}$$

$$\text{avec } \bar{\boldsymbol{\Omega}} = \overline{\mathbf{v}d}(\bar{\boldsymbol{\Omega}}) = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} : \bar{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} : \overline{\nabla \mathbf{u}} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot}(\mathbf{u})}$$

## Divergence d'un champ vectoriel- Formule intégrale

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = \overline{\overline{\nabla \mathbf{u}}} : \bar{\mathbf{1}} = \operatorname{tr} \overline{\overline{\nabla \mathbf{u}}} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} \, d^3x = \iint_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d^2S \quad (\text{en 3D})$$

$$\iint_S \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} \, d^2S = \int_{\partial S} \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, dl \quad (\text{en 2D})$$

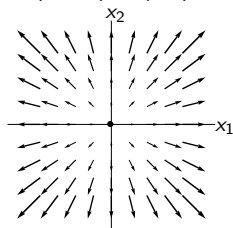
↪ interprétation  $\Phi$ , cas d'un champ  $\bar{\mathbf{u}} = \lambda_1 x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \lambda_2 x_2 \bar{\mathbf{e}}_2$  :

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1),$$

$$(1, -\frac{1}{2}),$$

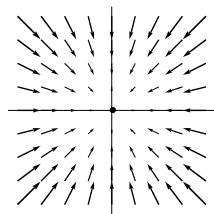
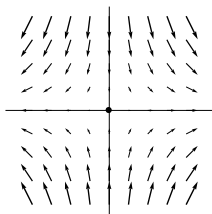
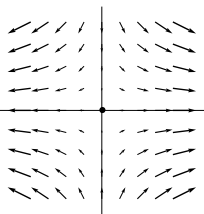
$$(\frac{1}{2}, -1),$$

$$(-1, -1)$$



$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} > 0$$

$\bar{\mathbf{u}}$  divergent



$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} < 0$$

$\bar{\mathbf{u}}$  convergent !

## Divergence d'un champ tensoriel d'ordre 2

$$\overline{\text{div}} \overline{\mathbb{T}} = \overline{\nabla} \overline{\mathbb{T}} : \overline{\mathbb{1}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \overline{\mathbf{e}}_i$$

### Formule intégrale de la divergence

$$\iiint_{\Omega} \overline{\text{div}} \overline{\mathbb{T}} d^3x = \iint_{\partial\Omega} \overline{\mathbb{T}} \cdot \overline{\mathbf{n}} d^2S$$

Interprétation  $\Phi$  : cas  $\overline{\mathbb{T}}$  symétrique, cf. l'ex. 2.7 :

$$\overline{\mathbf{e}}_i \cdot \overline{\text{div}} \overline{\mathbb{T}} = \text{div}(\overline{\mathbb{T}} \cdot \overline{\mathbf{e}}_i)$$

donc mesure si  $\overline{\mathbb{T}} \cdot \overline{\mathbf{e}}_i$  diverge ou converge...

## Laplacien d'un champ scalaire

$$\Delta\rho = \operatorname{div}\overline{\nabla}\rho = \frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_i}$$

mesure si  $\overline{\nabla}\rho$  diverge ou converge...

## Laplacien d'un champ tensoriel d'ordre 1

$$\Delta\overline{\mathbf{u}} = \overline{\operatorname{div}}\overline{\nabla}\overline{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}\overline{\mathbf{e}}_i = \Delta u_i\overline{\mathbf{e}}_i$$

## Systèmes symétriques : principe de Curie (1894)

### SUR LA SYMÉTRIE DANS LES PHÉNOMÈNES PHYSIQUES, SYMÉTRIE D'UN CHAMP ÉLECTRIQUE ET D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE ;

PAR M. P. CURIE.

I. Je pense qu'il y aurait intérêt à introduire dans l'étude des phénomènes physiques les considérations sur la symétrie familières aux cristallographes.

...

lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits

...ces éléments de symétrie se retrouvant déjà  
dans la forme du domaine occupé par le milieu...

## En mécanique des milieux continus

Milieu	Causes	Effet
Solide	Champs de forces volumiques $d^3\vec{f}$	Champ de déplacement $\vec{u}(\vec{X}, t)$
Fluide	ou surfaciques $d^2\vec{f}$	Champ de vitesse $\vec{v}(\vec{x}, t)$



## Ex. en mécanique des fluides : rhéomètre de Couette cylindrique

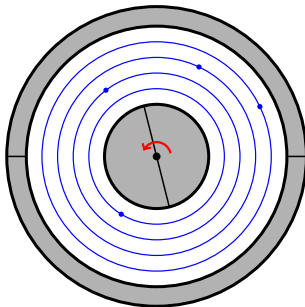
Vue 3D :



[ Benbelkacem & Skali-Lami 2008 - Lemta ]

## Ex. en mécanique des fluides : rhéomètre de Couette cylindrique

Vue de dessus :

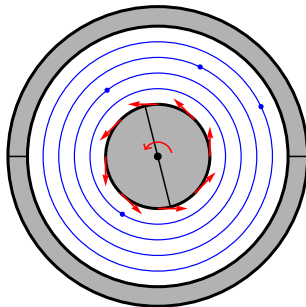


**Cause :**

**Effet :**

## Ex. en mécanique des fluides : rhéomètre de Couette cylindrique

Vue de dessus :

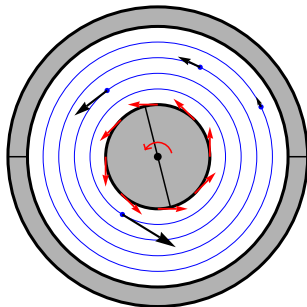


**Cause :** densité de forces surfaciques  $\bar{\mathbf{T}} = \frac{d^2\bar{\mathbf{f}}}{d^2S} = \tau\bar{\mathbf{e}}_\theta$  avec  $\tau$  constante  $> 0$

**Effet :**

## Ex. en mécanique des fluides : rhéomètre de Couette cylindrique

Vue de dessus :



**Cause** : densité de forces surfaciques  $\bar{\mathbf{T}} = \frac{d^2\bar{\mathbf{f}}}{d^2S} = \tau\bar{\mathbf{e}}_\theta$  avec  $\tau$  constante  $> 0$

**Effet** : champ de vitesse simplifié avec le principe de Curie

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{v}}(r, \theta) = U(r, \theta)\bar{\mathbf{e}}_r + V(r, \theta)\bar{\mathbf{e}}_\theta = U(r)\bar{\mathbf{e}}_r + V(r)\bar{\mathbf{e}}_\theta$$

## Ex. en mécanique des fluides : rhéomètre de Couette cylindrique

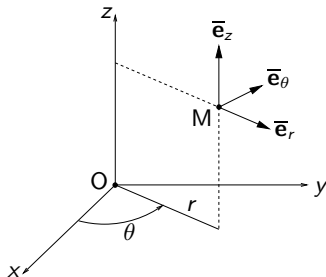
↪ analyse tensorielle en coordonnées cylindriques, cf. le pb. 2.2

lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits

$$\implies \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = U(r) \vec{e}_r + V(r) \vec{e}_\theta$$

L'étude mécanique nécessite le calcul de

- ▶  $\vec{\nabla} \vec{v}$
- ▶  $\text{div} \vec{v}$
- ▶  $\vec{\Delta} \vec{v}$



**Ex. en mécanique des fluides : rhéomètre de Couette cylindrique**↪ **analyse tensorielle en coordonnées cylindriques, cf. le pb. 2.2**

En fait

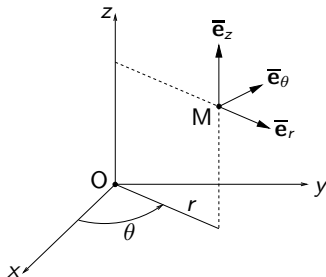
$$\underline{\underline{\mathbf{v}}}(\underline{\mathbf{x}}, t) = V(r)\underline{\underline{\mathbf{e}}}_\theta$$

$$\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\underline{\underline{\mathbf{v}}} \neq \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \underline{\underline{\mathbf{e}}}_i \otimes \underline{\underline{\mathbf{e}}}_j \quad \text{avec } i, j \in \{r, \theta, z\}$$

serait **INHD !**

La formule cartésienne  
ne se généralise pas à des coord. cylindriques !

$$\underline{\underline{\underline{\nabla}}}\underline{\underline{\mathbf{v}}} = \frac{dV}{dr} \underline{\underline{\mathbf{e}}}_\theta \otimes \underline{\underline{\mathbf{e}}}_r - \frac{V}{r} \underline{\underline{\mathbf{e}}}_r \otimes \underline{\underline{\mathbf{e}}}_\theta$$

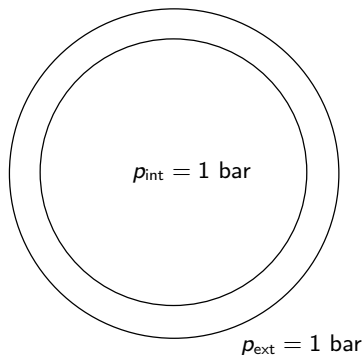


## Programme du TD

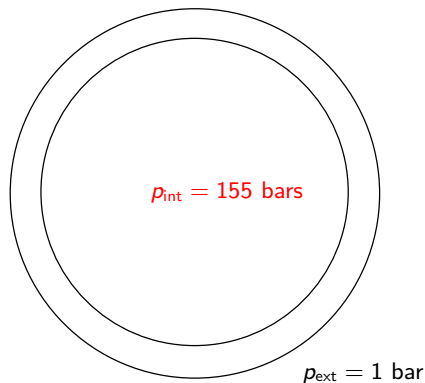
- Exercices d'analyse tensorielle cartésienne 2.6 et 2.8
- Problème d'analyse tensorielle cylindrique 2.1

Aspects mathématiques de l'étude d'un tuyau sous pression

Configuration de référence :



Configuration actuelle :



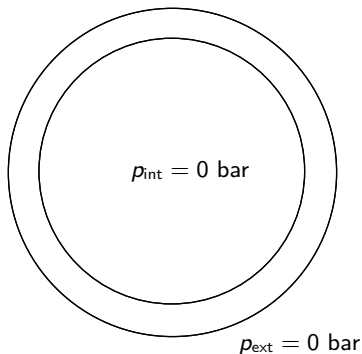
## Programme du TD

- Exercices d'analyse tensorielle cartésienne 2.6 et 2.8
- Problème d'analyse tensorielle cylindrique 2.1

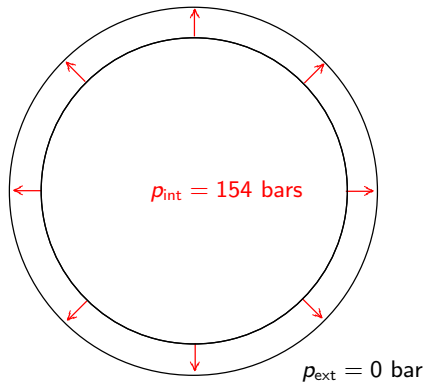
Aspects mathématiques de l'étude d'un tuyau sous pression

Par *linéarité*, on se ramène à :

Configuration de référence :



Configuration actuelle :





## Programme du TD

- Exercices d'analyse tensorielle cartésienne 2.6 et 2.8
- Problème d'analyse tensorielle cylindrique 2.1

Aspects mathématiques de l'étude d'un tuyau sous pression

## Rappel : équipe pédagogique pour le TD :

Groupe(s)	salle	chargé(e) de TD	Laboratoire
1.M1 & 2.M1	A306	Matthieu Gisselbrecht	IJL
1.P1 & 2.P1	A303	Lucile Dezerald	IJL
1.P2 & 2.P2	A304	Arthur Pascot	Lemta
1.P3	A305	Mathieu Jenny	Lemta
2.P3	A305	Antonio Pereira	Lemta



Le TD du groupe **1.P3** est décalé demain jeudi 21 septembre de 8h à 10h !

Questions ?