Séance 10 de mécanique des milieux continus solides et fluides

Emmanuel Plaut

Fluides en écoulement 2

1 Retour sur la loi de comportement des fluides incompressibles newtoniens et l'équation de Navier-Stokes

2 Fluides parfaits : équation d'Euler et théorèmes de Bernoulli

3 Bilan d'énergie cinétique - Dissipation - Pertes de charge

4 Éléments sur l'analyse dimensionnelle en mécanique des fluides

Conclusion

Questions générales

Mouvement des fluides incompressibles newtoniens

décrit en **description eulérienne** à l'aide du **champ de vitesse $\overline{\mathbf{v}}$**.

Équation de conservation de la masse :

$$\boxed{\mathrm{div}\overline{\mathbf{v}} \;=\; 0}$$

Loi de comportement : tenseur des efforts intérieurs

$$\overline{\overline{\sigma}} \;=\; -p\overline{\overline{\mathbf{1}}} \;+\; \overline{\overline{\tau}}$$

avec p = **pression hydrostatique** ,

$\overline{\overline{\tau}}$ = **tenseur des contraintes visqueuses** $= 2\eta\overline{\overline{\mathbf{D}}}$,

$\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ = **tenseur des taux de déformation** $= \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{v}} + \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{v}}^{T}\right)$

donnant le taux d'évolution temporel d'un produit scalaire entre 2 petits segments

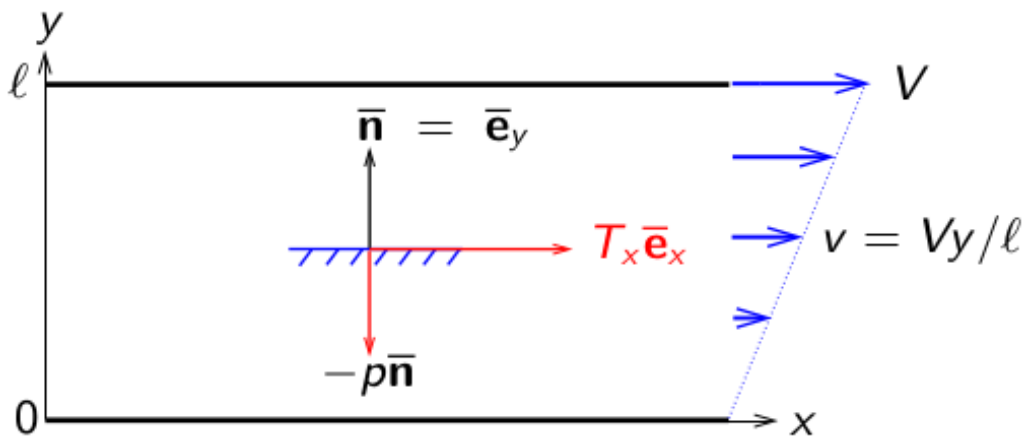
$$\frac{d(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}')}{dt} \;=\; 2d\overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}'$$

$$\boxed{\overline{\overline{\sigma}} \;=\; -p\overline{\overline{\mathbf{1}}} \;+\; 2\eta\overline{\overline{\mathbf{D}}}}$$

Loi de comportement des fluides newtoniens incompressibles

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{1}} + 2\eta\overline{\overline{D}}$$

Illustration en écoulement de Couette plan :



Les **contraintes tangentielles visqueuses** transmettent le mouvement dans les couches fluides successives de cet **écoulement laminaire** :

$$T_x = 2\eta D_{xy} = \eta\frac{V}{\ell} \quad \text{avec} \quad \eta = \textbf{viscosité dynamique } \underline{\textit{constante}} \text{ /écoulement.}$$

Loi de comportement des fluides newtoniens incompressibles

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{1}} + 2\eta\overline{\overline{D}}$$

Équation de Navier-Stokes :

$$\rho\frac{d\overline{v}}{dt} = \rho\overline{g} - \overline{\nabla}p + \eta\overline{\Delta}\overline{v} \iff \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{g} - \frac{1}{\rho}\overline{\nabla}p + \nu\overline{\Delta}\overline{v}$$

traduit notamment une **diffusion de la quantité de mouvement** avec

coefficient de diffusivité $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$ = **viscosité cinématique**.

	masse volumique	viscosité dynamique	viscosité cinématique
Fluide	ρ [kg/m^3]	η [Pa s]	ν [m^2/s]
Eau sous $p = 1$ atm, $T = 20\,^\circ$C	998	$1{,}00\ 10^{-3}$	$1{,}00\ 10^{-6}$
Air sous $p = 1$ atm, $T = 20\,^\circ$C	1,20	$1{,}82\ 10^{-5}$	$1{,}51\ 10^{-5}$

Avec z coordonnée verticale, on introduit la **pression motrice** $\widehat{p} = p + \rho g z$ d'où

$$\rho\frac{d\overline{v}}{dt} = -\overline{\nabla}\widehat{p} + \eta\overline{\Delta}\overline{v} \iff \frac{d\overline{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\overline{\nabla}\widehat{p} + \nu\overline{\Delta}\overline{v}$$

Équation de Navier-Stokes - non linéaire

$$\boxed{\frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\nabla}\mathbf{v}}\right)\cdot\overline{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho}\overline{\nabla}\widehat{p} + \nu\overline{\Delta}\overline{\mathbf{v}}}$$

difficile à résoudre **de ce fait**

et parce qu'elle contient des **termes physiquement très différents** !

- Si les termes instationnaire et de viscosité dominent

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} \simeq \nu\overline{\Delta}\overline{\mathbf{v}} \quad \longleftrightarrow \quad \textbf{effets de diffusion et d'amortissement}$$

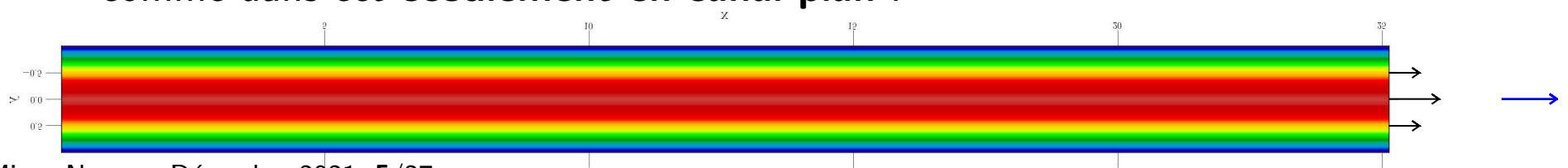
- Si les termes instationnaire et de pression dominent

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} \simeq -\frac{1}{\rho}\overline{\nabla}\widehat{p} \quad \longleftrightarrow \quad \textbf{écoulements instationnaires vers les dépressions, ondes}$$

- Si les termes de pression et de viscosité dominent

$$0 \simeq -\frac{1}{\rho}\overline{\nabla}\widehat{p} + \nu\overline{\Delta}\overline{\mathbf{v}} \quad \longleftrightarrow \quad \textbf{écoulements laminaires vers les dépressions}$$

comme dans cet **écoulement en canal plan** :



Équation de Navier-Stokes - non linéaire

$$\boxed{\frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\nabla}\mathbf{v}}\right)\cdot\overline{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho}\overline{\nabla}\widehat{p} + \nu\overline{\Delta}\overline{\mathbf{v}}}$$

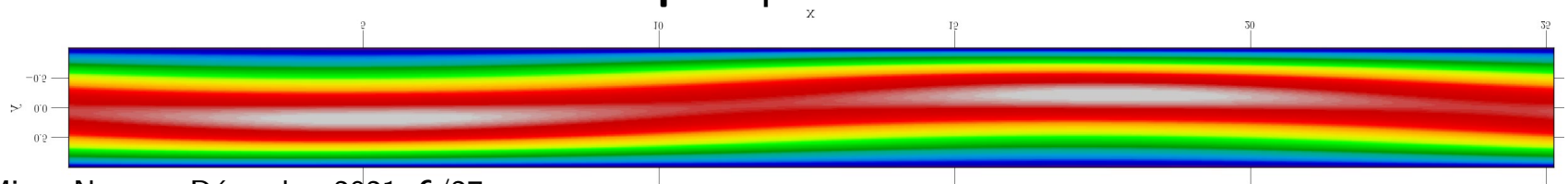
difficile à résoudre **de ce fait**

et parce qu'elle contient des **termes physiquement très différents** !

- ... **effets de diffusion et d'amortissement** ...
- ... **écoulements instationnaires vers les dépressions, ondes** ...
- ... **écoulements laminaires vers les dépressions** ...
- Si les termes instationnaire et d'advection dominent

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\nabla}\mathbf{v}}\right)\cdot\overline{\mathbf{v}} \simeq 0 \quad \longleftrightarrow \quad \textbf{ondes non amorties, instabilités, turbulence}$$

comme dans cette simulation numérique directe,
réalisée par Lee & Moser [`https://turbulence.oden.utexas.edu`],
d'un **écoulement en canal plan** perturbé :



Équation de Navier-Stokes - non linéaire

$$\boxed{\frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\,\overline{\mathbf{v}}\right)\cdot\overline{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho}\overline{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p} + \nu\overline{\Delta}\overline{\mathbf{v}}}$$

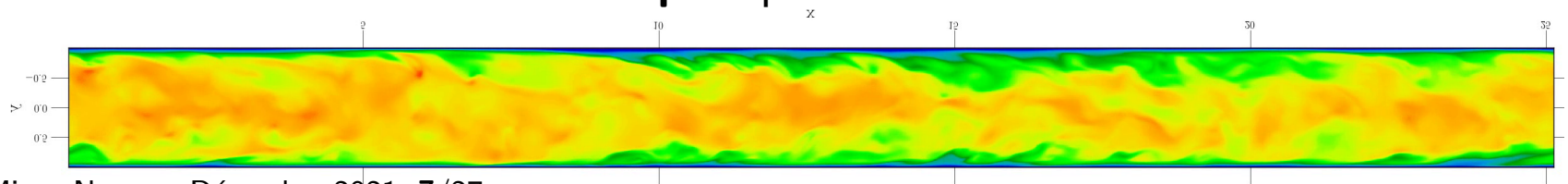
difficile à résoudre **de ce fait**

et parce qu'elle contient des **termes physiquement très différents** !

- ... **effets de diffusion et d'amortissement** ...
- ... **écoulements instationnaires vers les dépressions, ondes** ...
- ... **écoulements laminaires vers les dépressions** ...
- Si les termes instationnaire et d'advection dominent

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\,\overline{\mathbf{v}}\right)\cdot\overline{\mathbf{v}} \simeq 0 \quad \longleftrightarrow \quad \textbf{ondes non amorties, instabilités, turbulence}$$

comme dans cette simulation numérique directe,
réalisée par Lee & Moser [`https://turbulence.oden.utexas.edu`],
d'un **écoulement en canal plan** perturbé... devenant **turbulent** :



Équation de Navier-Stokes - non linéaire

$$\frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\mathbf{v}}\right) \cdot \overline{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho}\overline{\nabla}\widehat{p} + \nu\overline{\Delta}\overline{\mathbf{v}}$$

difficile à résoudre **de ce fait**

et parce qu'elle contient des **termes physiquement très différents** !

- ... **effets de diffusion et d'amortissement** ...
- ... **écoulements instationnaires vers les dépressions, ondes** ...
- ... **écoulements laminaires vers les dépressions** ...
- ... **ondes non amorties, instabilités, turbulence** ...

La **théorie mathématique complète** de cette équation **reste à faire**,

c'est l'un des **7 problèmes du millénaire** selon le 'Clay Mathematics Institute'

`www.claymath.org/millennium-problems` !

Équation de Navier-Stokes - non linéaire

$$\boxed{\frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\mathbf{v}}\right)\cdot\overline{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho}\overline{\nabla}\widehat{p} + \nu\overline{\Delta}\overline{\mathbf{v}}}$$

difficile à résoudre **de ce fait**

et parce qu'elle contient des **termes physiquement très différents** !

- ... **effets de diffusion et d'amortissement** ...
- ... **écoulements instationnaires vers les dépressions, ondes** ...
- ... **écoulements laminaires vers les dépressions** ...
- ... **ondes non amorties, instabilités, turbulence** ...

Conditions limites :

- à une paroi fixe, **adhérence** du fluide visqueux : $\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}}$
- pression donnée au moins en un point

Cf. poly pour **simplifications possibles** :

- écoulements **unidirectionnels** et **laminaires** ; alors $\left(\overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\mathbf{v}}\right)\cdot\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}}$;
- **modèle du fluide parfait** $\eta = 0 \iff \nu = 0$; alors **Navier-Stokes** $\rightarrow$ **Euler**...

Modèle du fluide parfait : équation d'Euler

$$\boxed{\frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\mathbf{v}}\right)\cdot\overline{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho}\overline{\nabla}\widehat{p}}$$

Version « dégénérée » de Navier-Stokes $\Longrightarrow$ conditions limites « dégradées » :

- à une paroi fixe, de normale $\overline{\mathbf{e}}_z$: imperméabilité : $v_z = 0$

  glissement possible du fluide parfait : v_x et v_y pas forcément nulles !
- pression donnée au moins en un point

Théorèmes de Bernoulli : théorèmes « énergétiques »

Écoulement permanent + ex. 2.10 de calcul tensoriel

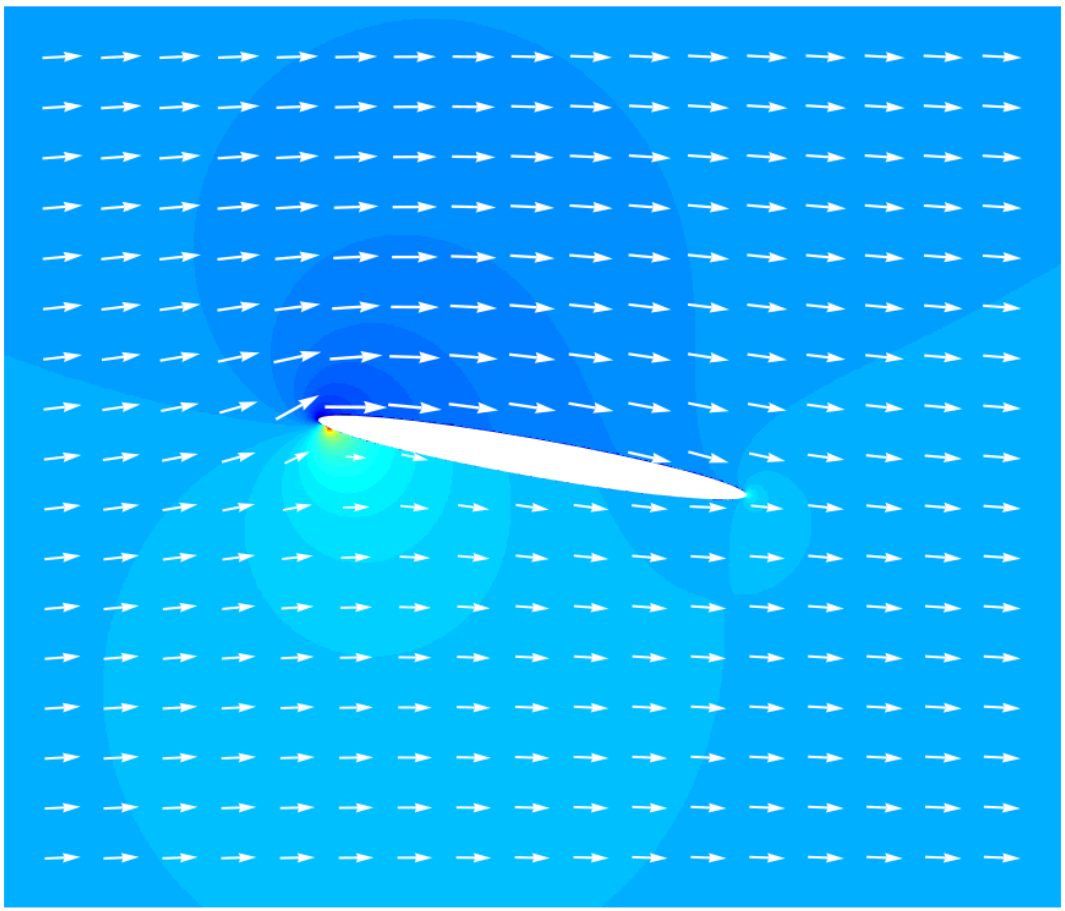
$$\Longrightarrow \quad \overline{\nabla}\left(\rho\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2}\right) + \rho\left(\overline{\mathbf{rot}}\,\overline{\mathbf{v}}\right)\wedge\overline{\mathbf{v}} = -\overline{\nabla}\widehat{p}$$

$$\Longrightarrow \quad \widehat{p} + \rho\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} = p + \rho g z + \rho\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} = c^{te} \text{ le long d'1 trajectoire.}$$

Écoulement permanent et irrotationnel $\Longrightarrow$ $p + \rho g z + \rho\frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} = c^{te}$ *partout !*

Application des théorèmes de Bernoulli : aérodynamique :

$\exists$ **survitesses** au-dessus d'une aile d'avion $\Longrightarrow$ $\exists$ **dépression** $\Longrightarrow$ $\exists$ **portance**,
cf. ces champs de vitesse (flèches blanches) et de pression (couleurs) :



[Plaut 2018 Mécanique des fluides : des bases à la turbulence.
Cours 2A département Énergie & Fluides]

Bilan d'énergie cinétique dans un fluide newtonien

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}}$$

avec la **puissance des efforts extérieurs**

$$\boxed{P_{\text{ext}} = P_{\text{pesanteur}} + P_{\text{pression}} + P_{\text{visqueux}}}$$

$$P_{\text{pesanteur}} = \iiint_{\Omega_t} d^3m\, \overline{\mathbf{g}} \cdot \overline{\mathbf{v}}$$

$$P_{\text{pression}} = \iint_{\partial\Omega_t} d^2\overline{\mathbf{f}}_p \cdot \overline{\mathbf{v}} \quad \text{avec} \quad d^2\overline{\mathbf{f}}_p = -p\, \overline{\mathbf{n}}\, d^2S$$

$$P_{\text{visqueux}} = \iint_{\partial\Omega_t} d^2\overline{\mathbf{f}}_v \cdot \overline{\mathbf{v}} \quad \text{avec} \quad d^2\overline{\mathbf{f}}_v = \overline{\overline{\tau}} \cdot \overline{\mathbf{n}}\, d^2S$$

et la **puissance des efforts intérieurs $\longleftrightarrow$ dissipation visqueuse !**

$$\boxed{P_{\text{int}} = -\iiint_{\Omega_t} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\mathbf{D}}}\, d^3x = -2\eta \iiint_{\Omega_t} \overline{\overline{\mathbf{D}}} : \overline{\overline{\mathbf{D}}}\, d^3x = -P_{\text{diss}} \leq 0}$$

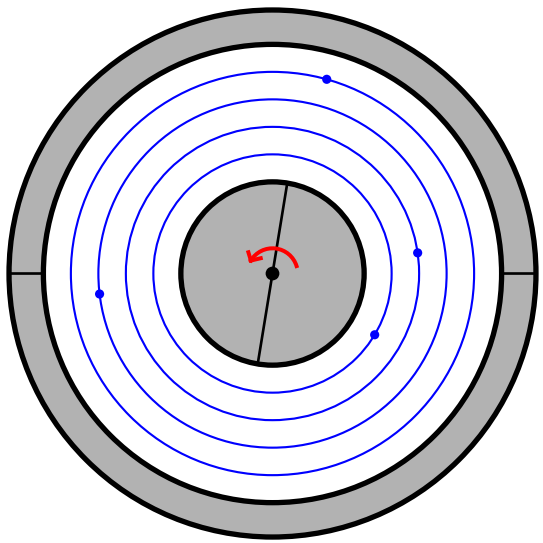
Bilan d'énergie cinétique dans un fluide newtonien

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{ext}} - P_{\text{diss}}}$$

avec **la puissance dissipée**

$$\boxed{P_{\text{diss}} = 2\eta \iiint_{\Omega_t} \overline{\overline{\mathbf{D}}} : \overline{\overline{\mathbf{D}}} \, d^3x \geq 0}$$

$\Rightarrow$ il faut **continuellement injecter de la puissance** pour **entretenir un écoulement permanent**, par ex. un écoulement de Couette :

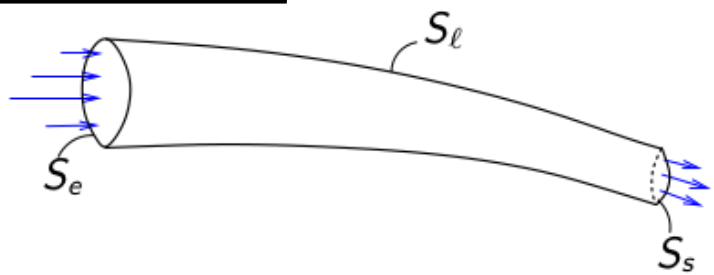


cf. pb. 7.2 !

Pertes de charge en général : reformulation du bilan d'E_c

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{pesanteur}} + P_{\text{pression}} + P_{\text{visqueux}} - P_{\text{diss}}}$$

en régime **permanent** dans un **tube de courant**



avec écoulements **undirectionnels en entrée et sortie**,
les sections correspondantes étant **peu étendues dans la direction** z.
On introduit les **charges généralisées**

$$H_e = z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{\alpha_e V_e^2}{2g} \quad \text{et} \quad H_s = z_s + \frac{p_s}{\rho g} + \frac{\alpha_s V_s^2}{2g}$$

avec $\alpha_{e,s}$ les **coefficients d'énergie cinétique** proches de 1 :

$$\boxed{P_{diss} = \dot{m}\, g\, (H_e - H_s) \geq 0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{H_e \geq H_s}\,.$$

$$H \simeq z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \equiv \ell \quad \leftrightarrow \text{ hauteur de liquide } \rightarrow \text{ densité d'énergie}$$

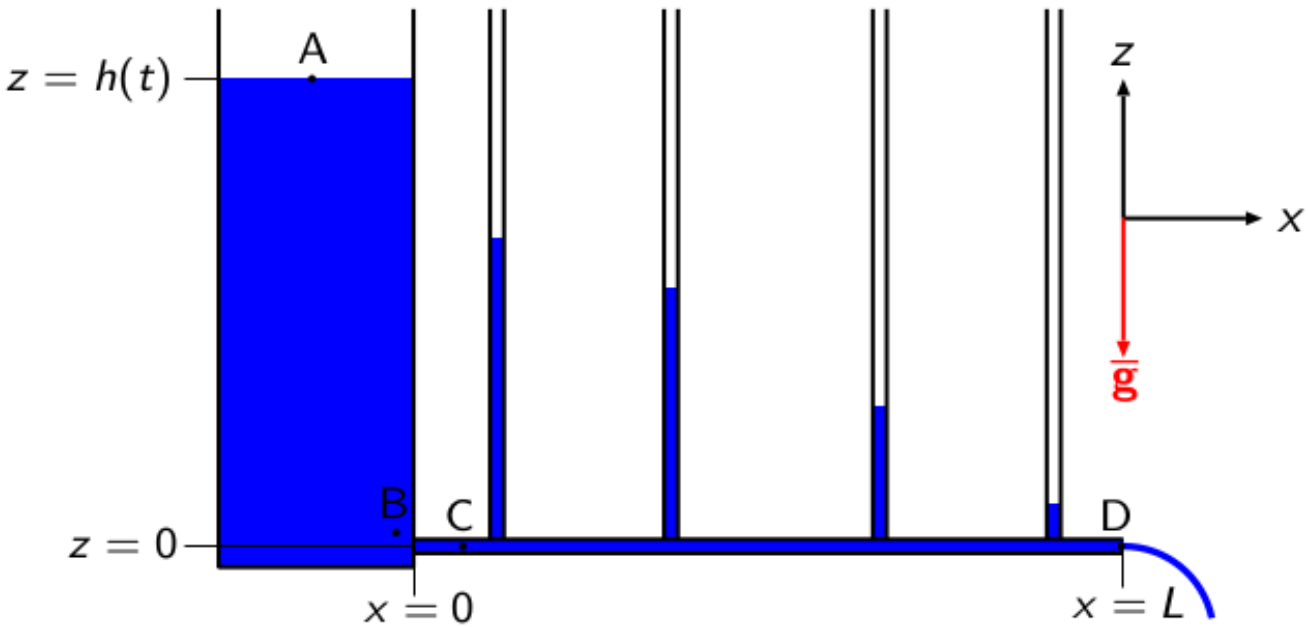
$$\underbrace{\rho g H}_{\text{enthalpie totale}} \simeq \underbrace{\rho g z}_{\text{énergie potentielle de pesanteur}} + \underbrace{p}_{\text{énergie de pression}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho V^2}_{\text{énergie cinétique}} \equiv E/\ell^3$$

Bilan de pertes de charge dans un circuit hydraulique

De la forme $\delta H_{AD} = \delta H_{AB} + \delta H_{BC} + \delta H_{CD}$, il doit tenir compte des

- **pertes de charge régulières**, dans des tuyaux ou canalisations « longs » ;
- **pertes de charge singulières**, associées à un coude, un convergent, un rétrécissement brusque, etc...
- **gains de charge** dûs par exemple à un **« château d'eau »** !

Cf. pb. 7.5 :

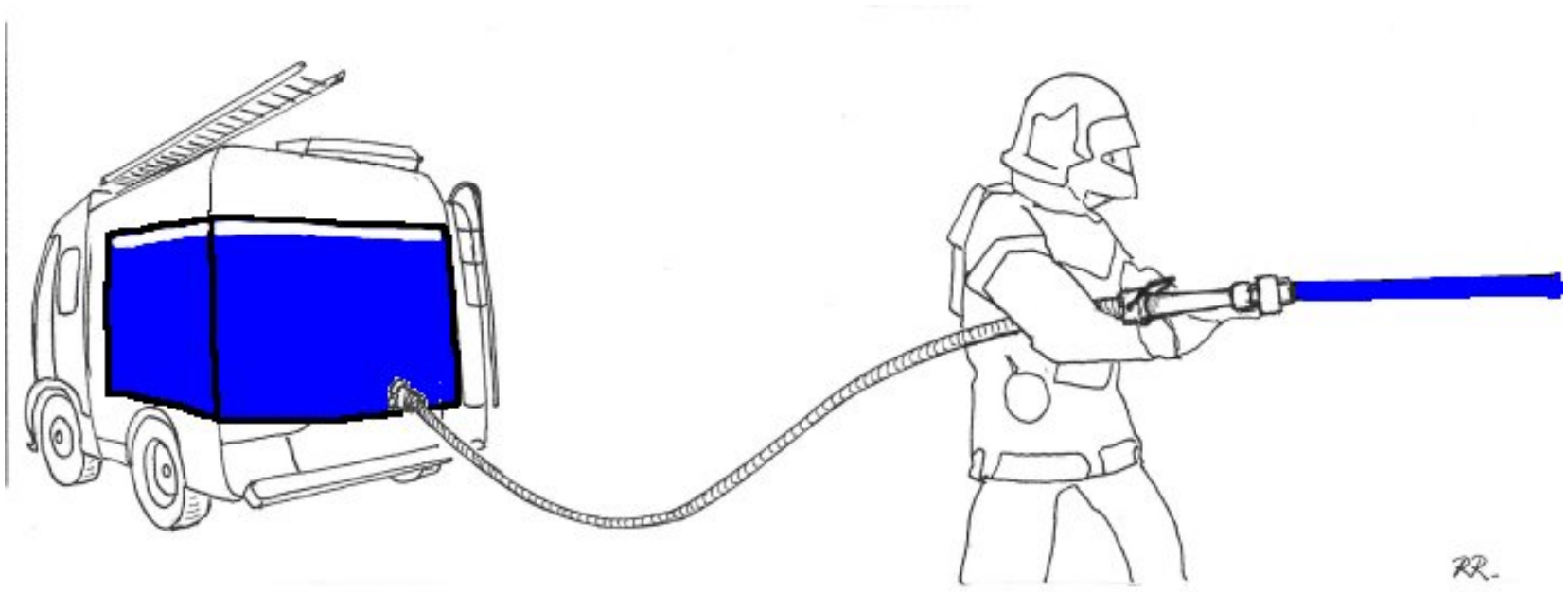


Bilan de pertes de charge dans un circuit hydraulique

De la forme $\delta H_{AD} = \delta H_{AB} + \delta H_{BC} + \delta H_{CD}$, il doit tenir compte des

- **pertes de charge régulières**, dans des tuyaux ou canalisations « longs » ;
- **pertes de charge singulières**, associées à un coude, un convergent, un rétrécissement brusque, etc...
- **gains de charge** dûs par exemple à une **pompe** !

Cf. pb. 7.3 :



Bilan de pertes de charge dans un circuit hydraulique

De la forme $\delta H_{AD} = \delta H_{AB} + \delta H_{BC} + \delta H_{CD}$, il doit tenir compte des

- **pertes de charge régulières**, dans des tuyaux ou canalisations « longs » ;
- **pertes de charge singulières**, associées à un coude, un convergent, un rétrécissement brusque, etc...
- **pertes de charge** dues par exemple à une **turbine** !

Cf. pb. 7.6 : **Station de Transfert d'Énergie par Pompage**

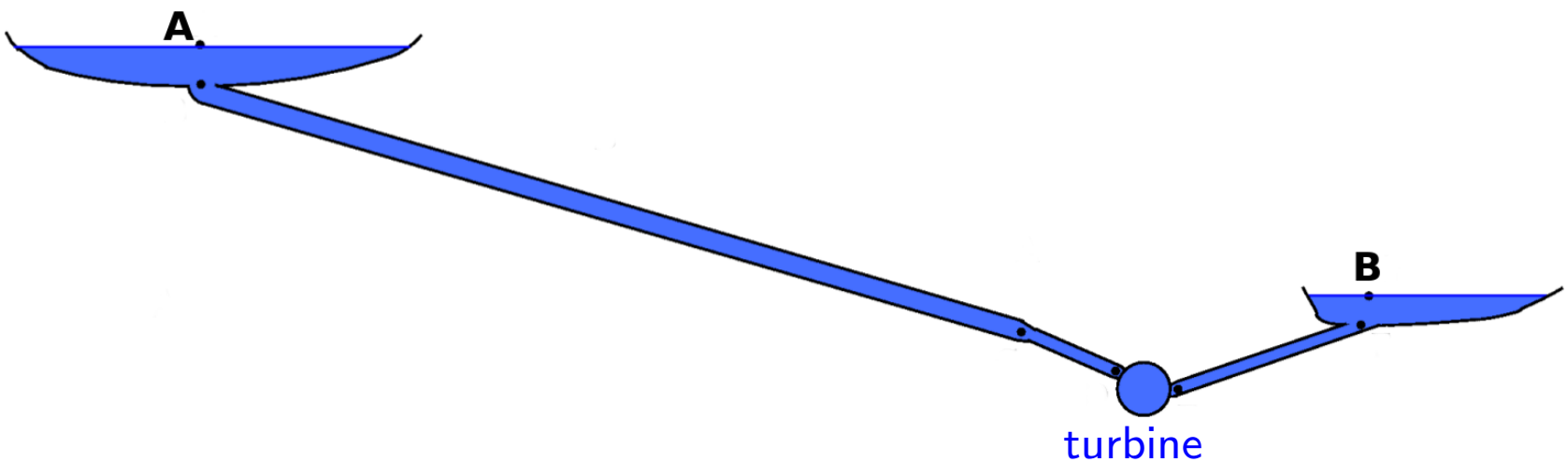
[photo Airdiasol pour EDF]

Bilan de pertes de charge dans un circuit hydraulique

De la forme $\delta H_{AD} = \delta H_{AB} + \delta H_{BC} + \delta H_{CD}$, il doit tenir compte des

- **pertes de charge régulières**, dans des tuyaux ou canalisations « longs » ;
- **pertes de charge singulières**, associées à un coude, un convergent, un rétrécissement brusque, etc...
- **pertes de charge** dues par exemple à une **turbine** !

Cf. pb. 7.6 : **Station de Transfert d'Énergie par Pompage**



$\dot{m}\, g\, (H_e - H_s) = P_{diss}$ devient ici

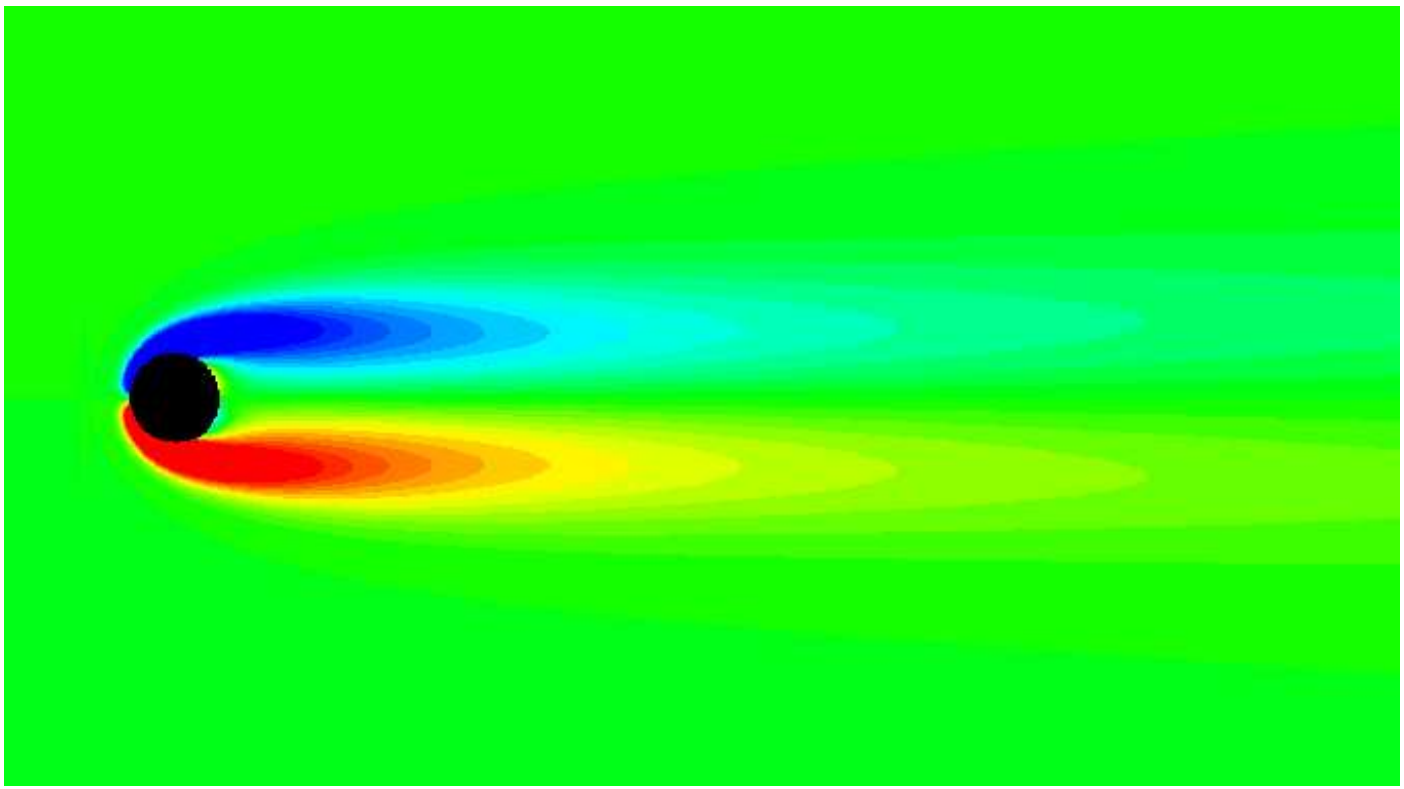
$\dot{m}\, g\, (H_A - H_B) \simeq P_{\text{turbine}} \simeq \dot{m}gh \simeq 200$ MW

Analyse dimensionnelle en mécanique des fluides

Identifie le **nombre de Reynolds**

$$Re = Vd/\nu$$

qui qualifie le régime d'écoulement et la **transition vers la turbulence**...
Ainsi l'écoulement autour d'un cylindre avec $\overline{\mathbf{v}}_\infty = V\overline{\mathbf{e}}_x$ t.q. $Re = 40$ est stable :



[Code LS-STAG du Lemta par Cheny & Botella]

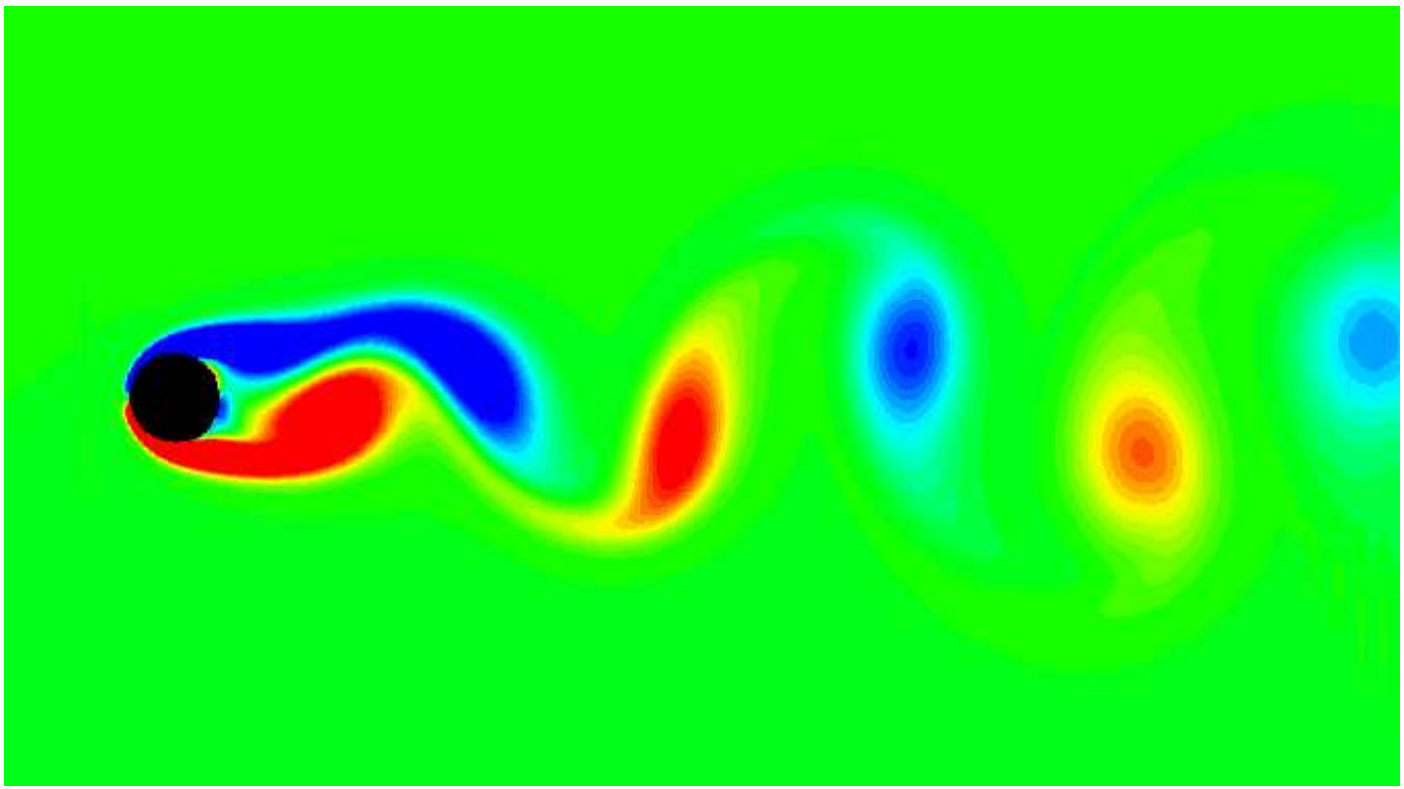
Analyse dimensionnelle en mécanique des fluides

Identifie le **nombre de Reynolds**

$$Re = Vd/\nu$$

qui qualifie le régime d'écoulement et la **transition vers la turbulence**...

Mais l'écoulement autour d'un cylindre avec $\overline{\mathbf{v}}_\infty = V\overline{\mathbf{e}}_x$ t.q. $Re = 100$ est **instable** :



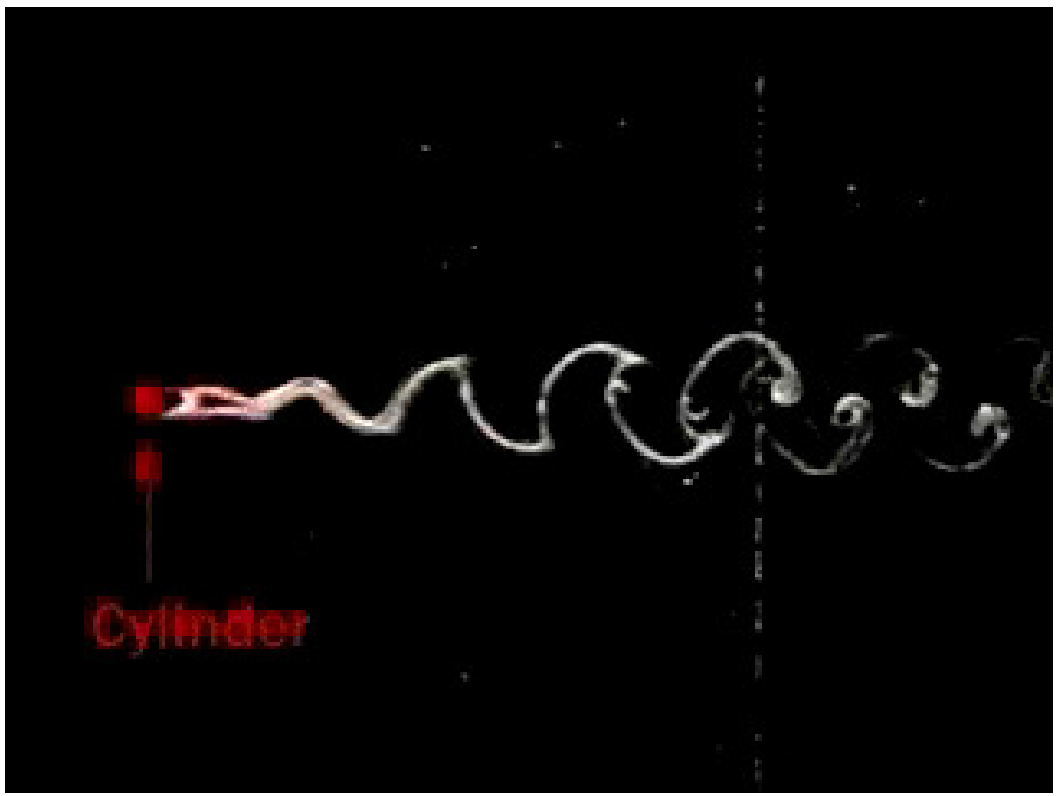
[Code LS-STAG du Lemta par Cheny & Botella]

Analyse dimensionnelle en mécanique des fluides

Identifie le **nombre de Reynolds**

$$Re = Vd/\nu$$

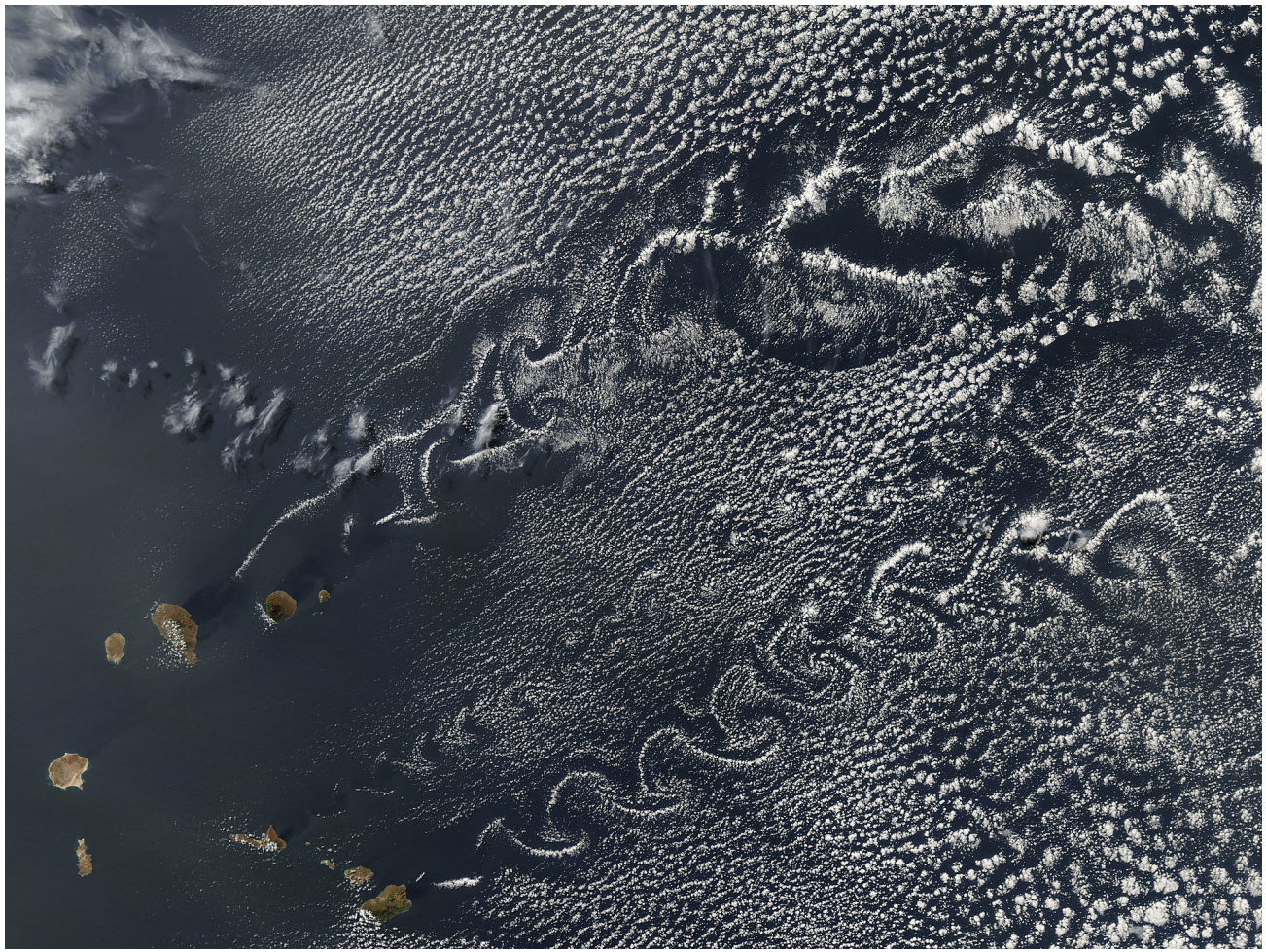
qui qualifie le régime d'écoulement et la **transition vers la turbulence**...
Mais l'écoulement autour d'un cylindre avec $\overline{\mathbf{v}}_\infty = V\overline{\mathbf{e}}_x$ t.q. $Re = 200$ est **instable** :



[Film ONERA,
DVD 'MFM',
Homsy et al. 2004, CUP]

Analyse dimensionnelle en mécanique des fluides $\Rightarrow$ similitude

par exemple, entre l'écoulement précédent et celui du vent autour d'une île volcanique... même si ce dernier est **fortement turbulent**, il contient des **structures cohérentes - tourbillons de Bénard-Von-Karman** (cf. ex. 8.4) :



[https://visibleearth.nasa.gov]

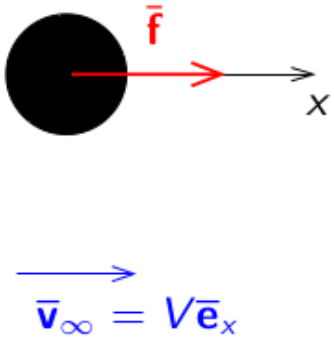
Analyse dimensionnelle en mécanique des fluides $\Rightarrow$ similitude

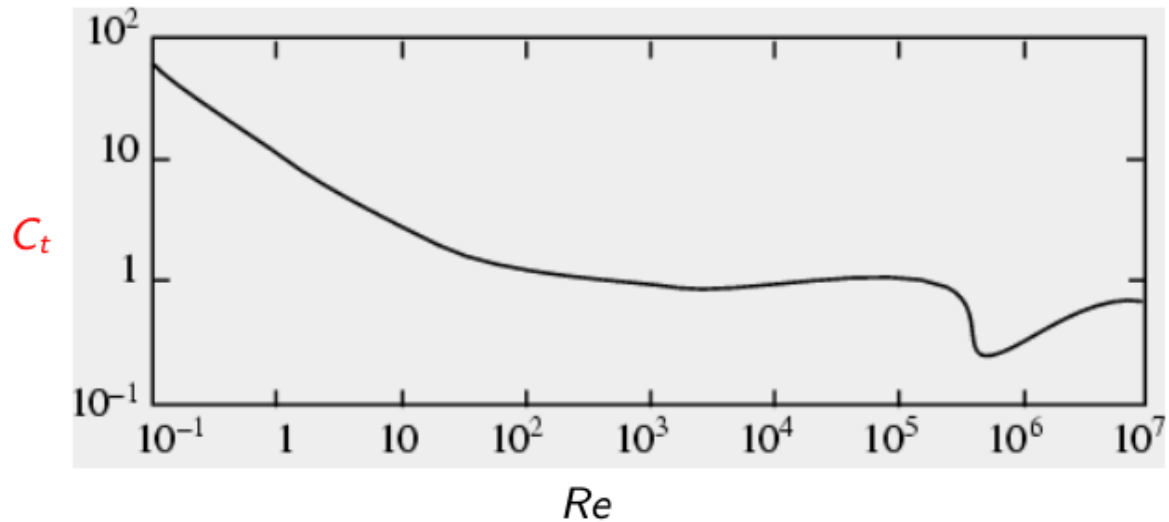
Identifie le **nombre de Reynolds**

$$Re = Vd/\nu$$

qui qualifie le régime d'écoulement et la **force de traînée / unité de longueur** exercée par le fluide sur le cylindre

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{1}{2}\rho V^2 d\, C_t\, \bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{avec} \quad C_t = \text{coefficient de } \mathbf{traînée}$$



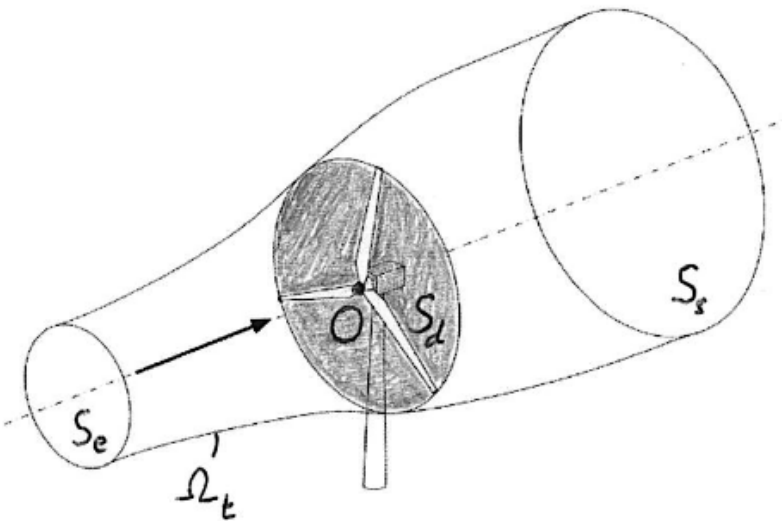


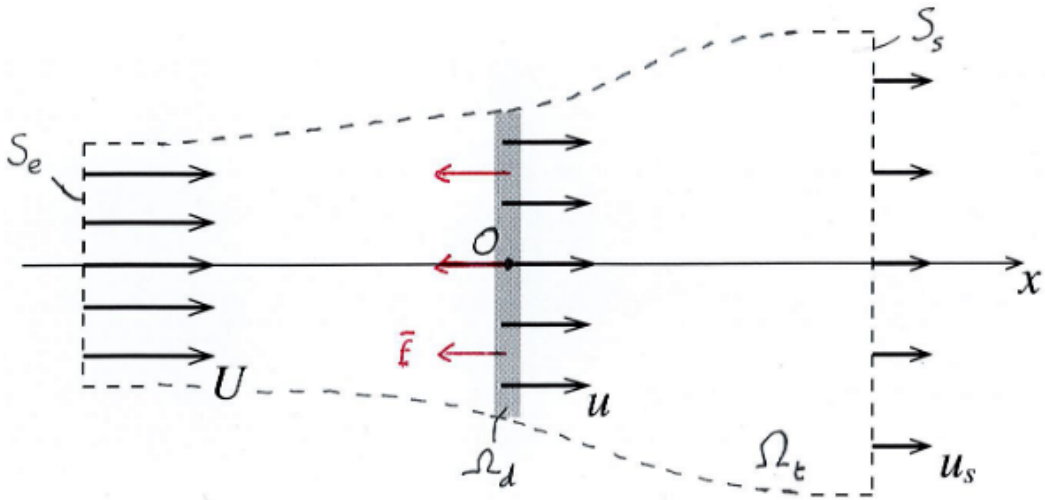
[Tritton (1988)]

« Buts » de l'**aérodynamique** :
- minimiser C_t
- créer une **force de portance** !..

Conclusion : il resterait beaucoup à présenter en méca. des fluides...

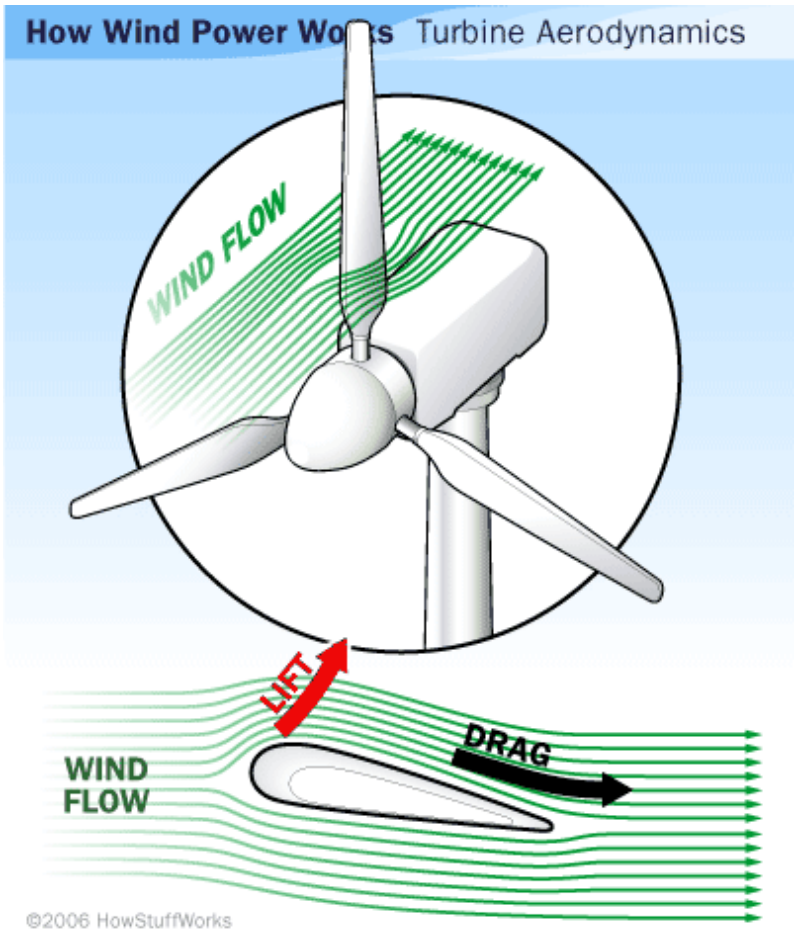
Pour aller au delà de la **théorie de Betz** d'une **éolienne**, objet du pb. 8.1 et de ce TD, utilisant le modèle du **disque actuateur**...





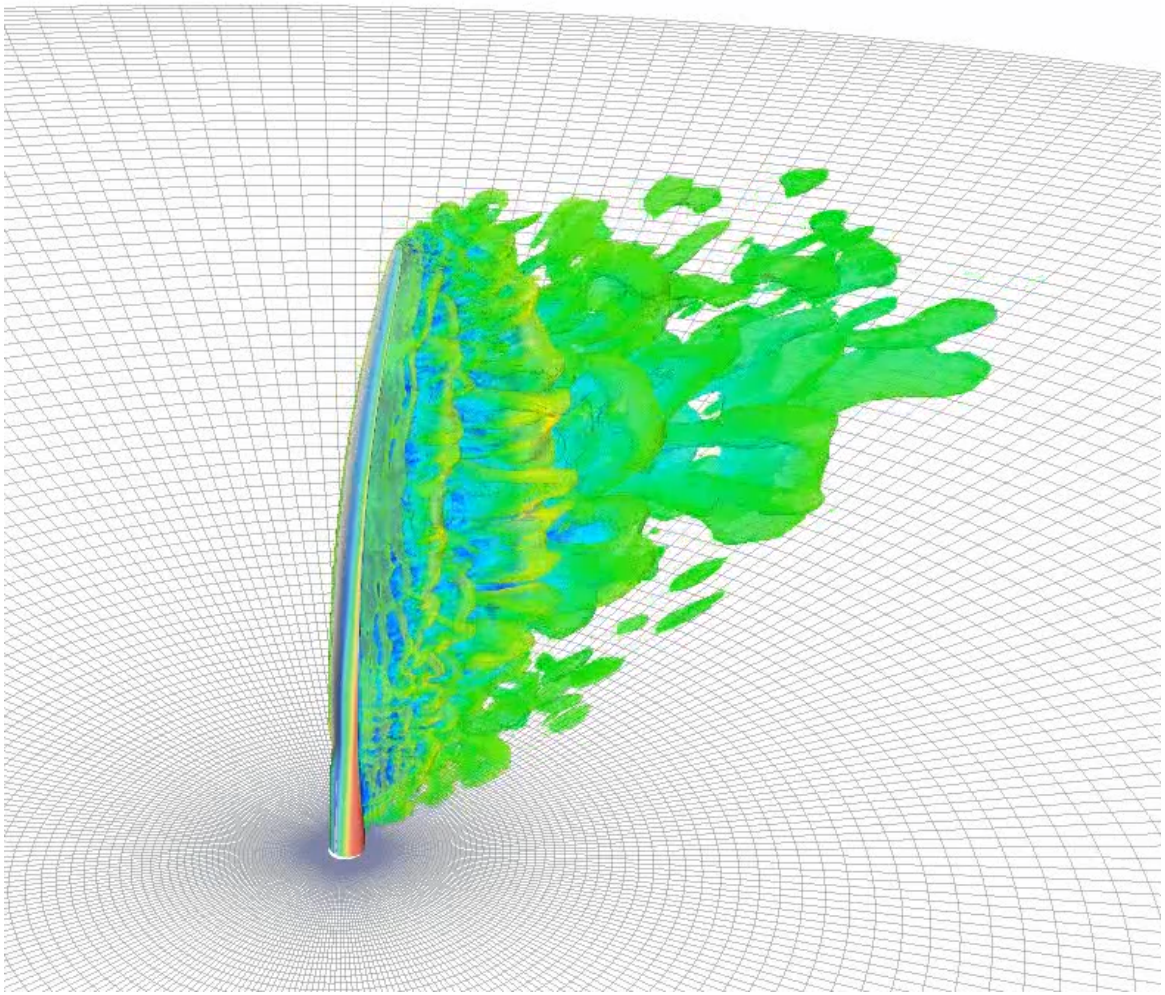
Conclusion : il resterait beaucoup à présenter en méca. des fluides...

Pour aller au delà de la **théorie de Betz** d'une **éolienne**, objet du pb. 8.1 et de ce TD, il faudrait étudier l'**aérodynamique des éoliennes** :



Conclusion : il resterait beaucoup à présenter en méca. des fluides...

La modélisation numérique fine des interactions **fluide** (vent fort en écoulement turbulent) - **structure** (pale d'éolienne élastique) relève de la « R & D » !



ForWind / IWES Oldenburg

Modèle simplifié dans le pb. 8.2 !

Conclusion : il resterait beaucoup à présenter en méca. des fluides...

Vous pourriez poursuivre en 2A et 3A

- en **département Énergie** (option Énergie / Fluides) en suivant les cours
  - *Mécanique des fluides* (module double) en S7 ;
  - *Turbomachines - Énergies hydraulique et éolienne* en S8 ;
  - *Transition to turbulence* en S9 ;
  - *Turbulence and wind energy* en S9 ;
  - *Transferts en milieux multiphasiques* en S9 ;
  - *Comportement des phases dispersées* en S9 ;
  - *Open Codes for Fluid Dynamics* en S9 ;
- en suivant les **cours électifs**
  - *Mécanique des fluides pour l'ingénieur* en S7 ;
  - *Mécanique des fluides numériques* en S8 ;
  - *Modélisation d'instruments de musique* en S8...

Questions ?