Mécanique des milieux continus solides et fluides

Séance 1 en passerelle scientifique
Introduction au calcul tensoriel et différentiel

Emmanuel Plaut

Célien Zacharie, Mathieu Jenny, Matthieu Gisselbrecht, Sébastien Allain

1 Philosophie de la mécanique des milieux continus solides et fluides

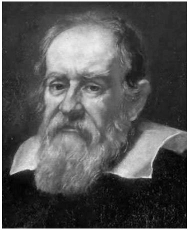
Le **but** c'est bien sûr la **physique** :

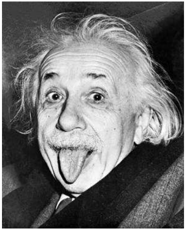
la **mécanique des solides et fluides**.

Le **moyen** c'est un **modèle mathématique** :

le **modèle du milieu continu**.

- On **définit** les objets de l'étude ;
- on adopte une démarche de **physicien** qui **observe** et **modélise**...
- en utilisant les **mathématiques**.



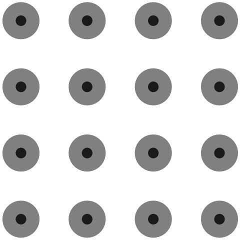


1$^{\text{ères}}$ définitions en mécanique des milieux continus solides et fluides

- **Mécanique** (du grec *mêkhanê* = machine) :
  art de prédire et contrôler les **mouvements** de la **matière**,
  en réponse à des **forces appliquées**.
- Le **solide** possède une **forme propre**
  indépendante du support sur lequel il est posé.
- Le **fluide** (**liquide** ou **gaz**, selon sa densité + ou − grande)
  épouse la forme du support sur ou dans lequel il est posé.
- Science du **mouvement** = **cinématique** (du grec *kinêma* = mouvement)...
  Cf. la séance 0 et l'annexe A *Cinématique fondamentale* du tome 1 !..

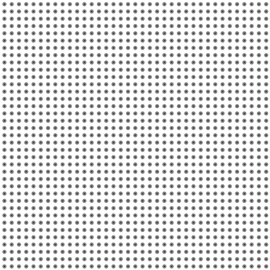
Modèle du milieu continu ?

Cf. un cristal : échelle 5 Å : milieu discontinu :



Modèle du milieu continu ?

Cf. un cristal : échelle 10 nm : on commence à voir une « texture » quasi-homogène :



Modèle du milieu continu ?

Cf. un cristal : échelle 10 μm : milieu « continu » :

Modèle du milieu continu !

Considérée à une échelle suffisamment « grande »,
la **matière** peut souvent être vue comme un continuum de **« points matériels »**
= **volumes élémentaires représentatifs en quasi-équilibre thermodynamique**

En ces **« points matériels »** on peut définir

- une masse volumique moyenne $\rho(\overline{\mathbf{x}},t)$;
- une vitesse moyenne $\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}},t)$;
- une température moyenne $T(\overline{\mathbf{x}},t)$...

D'où la possibilité de décrire le **mouvement** par la **« cinématique »**...

Et d'analyser tous les champs impliqués avec le **calcul tensoriel**...
introduit ici en mélangeant algèbre et analyse pour des questions de temps...

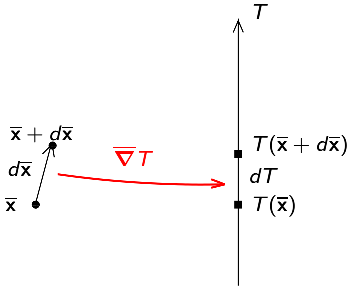
2 Introduction au calcul tensoriel

$\mathcal{T}_0 \;=\; \{$ **tenseurs d'ordre 0 = scalaires** $\}$, ex. $T(\overline{\mathbf{x}})$ température.

$\mathcal{T}_1 \;=\; \{$ **tenseurs d'ordre 1 = vecteurs** $\} \;=\; \mathbb{R}^3$ euclidien,

ex. $\overline{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathbf{x}} T$ gradient de masse volumique :

$$\text{définition intrinsèque : } dT \;=\; \underbrace{T(\overline{\mathbf{x}} + d\overline{\mathbf{x}}) - T(\overline{\mathbf{x}})}_{\delta T} \text{ linéarisé } \;=\; \overline{\boldsymbol{\nabla}} T \cdot d\overline{\mathbf{x}}$$



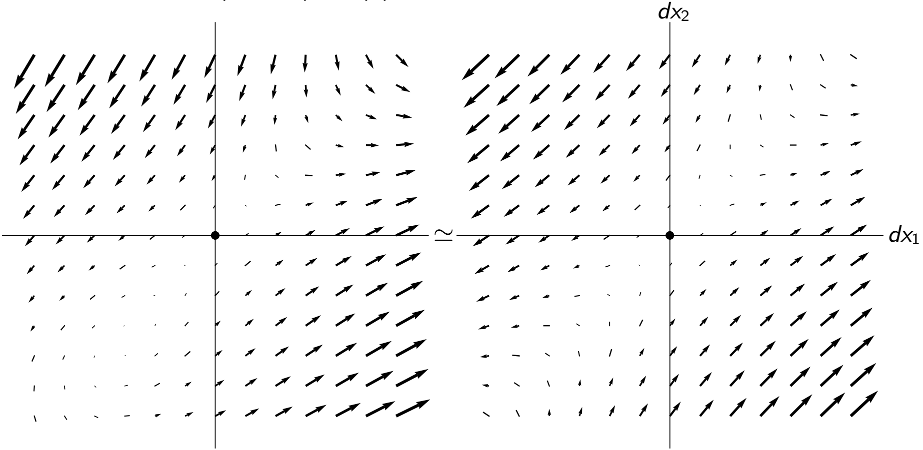
$\overline{\boldsymbol{\nabla}} T$ est l'**application linéaire**
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_1 & \longrightarrow & \mathcal{T}_0 \\ d\overline{\mathbf{x}} & \longmapsto & dT \;=\; \overline{\boldsymbol{\nabla}} T \cdot d\overline{\mathbf{x}} \end{array}$$

Introduction au calcul tensoriel

En mécanique on s'intéresse aussi à des champs vectoriels ;
ex. : le champ de vitesse.

Son gradient se définit en considérant $d\overline{\mathbf{v}}$ fonction linéarisée de $d\overline{\mathbf{x}}$

$$\delta\overline{\mathbf{v}} \;=\; \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}+d\overline{\mathbf{x}})-\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}) \quad\simeq\quad d\overline{\mathbf{v}} \;=\; \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{v}}\cdot d\overline{\mathbf{x}}$$

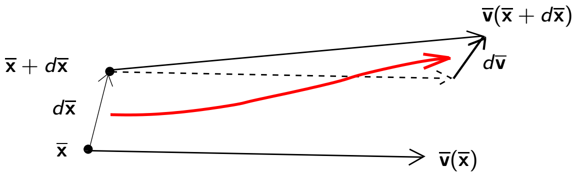


Introduction au calcul tensoriel

En mécanique on s'intéresse aussi à des champs vectoriels ;
ex. : le champ de vitesse.

Son gradient est un champ de **tenseurs d'ordre 2**,
c'est-à-dire un champ d'**endomorphismes** :

$$\text{définition intrinsèque : } d\overline{\mathbf{v}} = \underbrace{\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}+d\overline{\mathbf{x}}) - \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}})}_{\delta\overline{\mathbf{v}}} \text{ linéarisé } = \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\mathbf{v}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}$$



$\overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\mathbf{v}}$ est l'**application linéaire** $\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_1 & \longrightarrow & \mathcal{T}_1 \\ d\overline{\mathbf{x}} & \longmapsto & d\overline{\mathbf{v}} = \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\mathbf{v}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} \end{array}$

Tenseurs d'ordre 1 ($\mathcal{T}_1$) :

$$\overline{\nabla} T \text{ application linéaire } \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_1 & \longrightarrow & \mathcal{T}_0 \\ d\overline{\mathbf{x}} & \longmapsto & dT = \overline{\nabla} T \cdot d\overline{\mathbf{x}} \end{array}$$

Tenseur d'ordre 2 ($\mathcal{T}_2$) :

$$\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{v}} \text{ application linéaire } \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_1 & \longrightarrow & \mathcal{T}_1 \\ d\overline{\mathbf{x}} & \longmapsto & d\overline{\mathbf{v}} = \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{v}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} \end{array}$$

D'où la définition par récurrence d'un tenseur d'ordre $n+1$:

$$\mathbf{T}^{n+1} \text{ application linéaire } \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_1 & \longrightarrow & \mathcal{T}_n \\ \overline{\mathbf{h}} & \longmapsto & \mathbf{T}^{n+1}(\overline{\mathbf{h}}) = \mathbf{T}^{n+1} \cdot \overline{\mathbf{h}} \end{array}$$

$\hookrightarrow$ **gradient d'un tenseur A d'ordre n :**

$$\nabla \mathbf{A} \in \mathcal{T}_{n+1} \text{ est l'application linéaire } \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_1 & \longrightarrow & \mathcal{T}_n \\ d\overline{\mathbf{x}} & \longmapsto & d\mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} \cdot d\overline{\mathbf{x}} \end{array}$$

Définition par récurrence d'un tenseur d'ordre n :

$$\mathbf{T}^n \text{ application linéaire } \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_1 & \longrightarrow & \mathcal{T}_{n-1} \\ \overline{\mathbf{h}} & \longmapsto & \mathbf{T}^n(\overline{\mathbf{h}}) = \mathbf{T}^n \cdot \overline{\mathbf{h}} \end{array}$$

Définition par récurrence du produit tensoriel :

Soient n vecteurs $\overline{\mathbf{a}}_1, \cdots, \overline{\mathbf{a}}_n$. Leur **produit tensoriel** est le **tenseur d'ordre** n

$$\overline{\mathbf{a}}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{a}}_n \text{ application linéaire } \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_1 & \longrightarrow & \mathcal{T}_{n-1} \\ \overline{\mathbf{h}} & \longmapsto & \overline{\mathbf{a}}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{a}}_{n-1} \left(\overline{\mathbf{a}}_n \cdot \overline{\mathbf{h}}\right) \end{array}$$

étant entendu que

$$\overline{\mathbf{a}}_1 \otimes \overline{\mathbf{a}}_2 \text{ application linéaire } \begin{array}{ccc} \mathcal{T}_1 & \longrightarrow & \mathcal{T}_1 \\ \overline{\mathbf{h}} & \longmapsto & \overline{\mathbf{a}}_1 \left(\overline{\mathbf{a}}_2 \cdot \overline{\mathbf{h}}\right) \end{array}$$

$\hookrightarrow$ écriture en composantes dans base orthonormée choisie :

$$\overline{\mathbf{v}} = \sum_i v_i \overline{\mathbf{e}}_i \ , \quad \overline{\overline{\mathbf{T}}} = \sum_{ij} T_{ij} \overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j \ , \quad \overline{\overline{\overline{\mathbf{T}}}} = \sum_{ijk} T_{ijk} \overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j \otimes \overline{\mathbf{e}}_k \ , \quad \text{etc...}$$

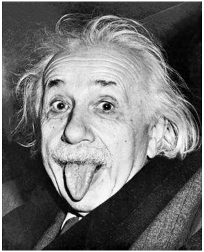
Convention de sommation sur les indices répétés « muets » :

$$\overline{\mathbf{v}} = \sum_i v_i \overline{\mathbf{e}}_i \quad \rightsquigarrow \quad \overline{\mathbf{v}} = v_i \overline{\mathbf{e}}_i \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{T}_1 \text{ espace vectoriel de dim. } 3$$

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}} = \sum_{ij} T_{ij} \overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j \quad \rightsquigarrow \quad \overline{\overline{\mathbf{T}}} = T_{ij} \overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{T}_2 \text{ espace vect. de dim. } 3^2$$

$$\overline{\overline{\overline{\mathbf{T}}}} = \sum_{ijk} T_{ijk} \overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j \otimes \overline{\mathbf{e}}_k \quad \rightsquigarrow \quad \overline{\overline{\overline{\mathbf{T}}}} = T_{ijk} \overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j \otimes \overline{\mathbf{e}}_k \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{T}_3 \text{ espace vect. de dim. } 3^3$$

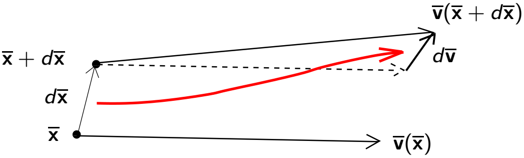
Merci M. Einstein !



Calcul des composantes de $\overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\mathbf{v}}$ en coordonnées cartésiennes

Partir de la définition intrinsèque :

$$\overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\mathbf{v}} \text{ est l'}\textbf{application linéaire} \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{T}_1 & \longrightarrow & & & \mathcal{T}_1 \\ d\overline{\mathbf{x}} & \longmapsto & d\overline{\mathbf{v}} & = & \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\mathbf{v}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} \end{array}$$



et utiliser la notation (intrinsèque) produit tensoriel :

$$\overline{\mathbf{a}} \otimes \overline{\mathbf{b}} \ : \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{T}_1 & \longrightarrow & & \mathcal{T}_1 & \\ d\overline{\mathbf{x}} & \longmapsto & (\overline{\mathbf{a}} \otimes \overline{\mathbf{b}}) \cdot d\overline{\mathbf{x}} & = & \overline{\mathbf{a}}\,(\overline{\mathbf{b}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}) \end{array}$$

$$\hookrightarrow \qquad \overline{\overline{\nabla}}\,\overline{\mathbf{v}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j$$

Au fait c'est quoi ce $\cdot$?

C'est le point du **produit de contraction** :

si $\mathbf{A} = A_{i_1 i_2 \cdots i_n} \overline{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}}_{i_n} \in \mathcal{T}_n,$

$\mathbf{B} = B_{j_1 j_2 \cdots j_m} \overline{\mathbf{e}}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}}_{j_m} \in \mathcal{T}_m,$

alors
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} k} B_{k j_2 \cdots j_m} \overline{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}}_{i_{n-1}} \otimes \overline{\mathbf{e}}_{j_2} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}}_{j_m}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{T}_{n-1+m-1} = \mathcal{T}_{n+m-2}$$

Exemple : $\overline{\overline{\mathbf{A}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{B}}}$ est l'endomorphisme composé $\overline{\overline{\mathbf{A}}} \circ \overline{\overline{\mathbf{B}}} = A_{ik} B_{kj} \overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j$.

On définit aussi le produit doublement contracté :

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{i_1 \cdots i_{n-2} qk} B_{kq j_3 \cdots j_m} \overline{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}}_{i_{n-2}} \otimes \overline{\mathbf{e}}_{j_3} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}}_{j_m}$$
$$\mathbf{A} : \mathbf{B} \in \mathcal{T}_{n-2+m-2} = \mathcal{T}_{n+m-4}$$

Exemple : $\overline{\overline{\mathbf{A}}} : \overline{\overline{\mathbf{B}}}$ est le scalaire $\operatorname{tr}\left(\overline{\overline{\mathbf{A}}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{B}}}\right) = \operatorname{tr}\left(\overline{\overline{\mathbf{A}}} \circ \overline{\overline{\mathbf{B}}}\right) = A_{qk} B_{kq}$.

Produit simplement contracté :

si $\mathbf{A} = A_{i_1 i_2 \cdots i_n} \overline{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}}_{i_n} \in \mathcal{T}_n,$

$\mathbf{B} = B_{j_1 j_2 \cdots j_m} \overline{\mathbf{e}}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}}_{j_m} \in \mathcal{T}_m,$

alors

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} k} B_{k j_2 \cdots j_m} \overline{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}}_{i_{n-1}} \otimes \overline{\mathbf{e}}_{j_2} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}}_{j_m}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{T}_{n-1+m-1} = \mathcal{T}_{n+m-2}$$

Produit doublement contracté :

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{i_1 \cdots i_{n-2} q k} B_{k q j_3 \cdots j_m} \overline{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}}_{i_{n-2}} \otimes \overline{\mathbf{e}}_{j_3} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathbf{e}}_{j_m}$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} \in \mathcal{T}_{n-2+m-2} = \mathcal{T}_{n+m-4}$$

Application : définition de la divergence :

si $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_n$ avec $n \geq 1$, $\mathbf{div}\ \mathbf{T} = \boldsymbol{\nabla} \mathbf{T} : \overline{\overline{\mathbf{1}}} \in \mathcal{T}_{n+1+2-4} = \mathcal{T}_{n-1}$

Application : définition du laplacien :

si $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_n$, $\boldsymbol{\Delta} \mathbf{T} = \mathbf{div}\ \boldsymbol{\nabla} \mathbf{T} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \mathbf{T} : \overline{\overline{\mathbf{1}}} \in \mathcal{T}_{n+1-1} = \mathcal{T}_n$

Il y aurait encore beaucoup d'autres choses à présenter sur le calcul tensoriel...

- la définition des tenseurs comme **applications multilinéaires**

$$\mathbf{T}^n \textbf{ forme } n\textbf{-linéaire} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\overline{\mathbf{X}}_1, \cdots, \overline{\mathbf{X}}_n) & \longmapsto & \mathbf{T}^n(\overline{\mathbf{X}}_1, \cdots, \overline{\mathbf{X}}_n) \end{array} \cdots$$

- par exemple

$$\overline{\mathbf{a}} \otimes \overline{\mathbf{b}} \ : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) & \longmapsto & (\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{b}} \cdot \overline{\mathbf{y}}) \end{array}$$

- le **tenseur alterné fondamental** $\overline{\overline{\overline{\epsilon}}}$ qui permet de définir le produit vectoriel

$$\overline{\mathbf{x}} \wedge \overline{\mathbf{y}} = \overline{\overline{\overline{\epsilon}}} : \overline{\mathbf{y}} \otimes \overline{\mathbf{x}}$$

  et le rotationnel d'un champ de vecteur

$$\overline{\mathbf{rot}}(\overline{\mathbf{v}}) = \overline{\overline{\overline{\epsilon}}} : \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}} \ldots$$

- les **formules intégrales**...

Grâce aux 2 cours - TD de calcul tensoriel,
au poly, aux séances de mécanique,
et à votre travail personnel,
vous finirez bien par maîtriser le calcul tensoriel !

3 TD de 9h45 à 11h45 puis 13h45 à 15h45 :

- 4 exercices d'algèbre tensorielle : 1.3, 1.4, 1.11 et 1.13 ;
- en bonus, pour les plus rapides, l'exercice d'analyse tensorielle A.1.

Équipe pédagogique :

Salle	Chargé de TD	Laboratoire
A306	Célien Zacharie	Lemta
A305	Mathieu Jenny	Lemta
A304	Sébastien Allain	IJL
A303	Matthieu Gisselbrecht	IJL

Prochaine séance vendredi 5 octobre, voyez

http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc !

Une question ?