

Séance 1 de **mécanique des milieux continus solides et fluides**

L'outil mathématique calcul tensoriel et différentiel

Emmanuel Plaut

- 0 Page web & consignes
- 1 Philosophie & premières définitions
- 2 Éléments de **calcul tensoriel**
- 3 Infos sur le TD - Questions ?

0 La page web du module **MMCSF**

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc>

- donne des consignes de **travail personnel**
- contient des **versions PDF consolidées des doc. de cours-TD** de **calcul tensoriel** (distribué le 6 septembre)
et **mécanique** (tome 1 distribué le 7 septembre,
2 qui sera distribué en octobre)
(polys papier : pages de notes personnelles : en faire bon usage !)
- contient (contiendra) l'essentiel des **présentations vidéo d'amphi.**

0 La page web du module **MMCSF**

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc>

vous rappelle aussi que les cours et TDs sont **obligatoires**.

En cas d'absence même justifiée,

pour des raisons pédagogiques on vous demandera de rendre dans un délai d'1 semaine à votre chargé de TD

une **solution rédigée manuscrite du TD manqué...**

qui vous sera rendue par le chargé de TD, annotée et notée...

et sera prise en compte pour votre **note de TD !..**

Voyez l'annexe B du tome 1 sur l'**art de rédiger**,

qui définit notamment nos abréviations d'annotation :

BR, DR, EC, EÉ, EL, EP, ES, F, HS, INHCI, INHD, INHT, KK, N, PDM, PE, T...

1 Philosophie de la **Mécanique des milieux continus solides et fluides**

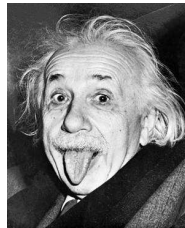
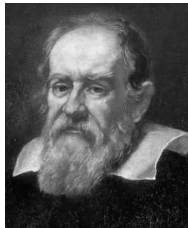
Le **but** c'est bien sûr la **physique** :

la **mécanique des solides et fluides**.

Le **moyen** c'est un **modèle mathématique** :

le **modèle du milieu continu**.

- On **définit** les objets de l'étude ;
- on adopte une démarche de **physicien** qui **observe** et **modélise**...
- en utilisant les **mathématiques**.

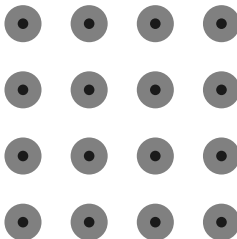


1^{ères} définitions en Mécanique des milieux continus solides et fluides

- **Mécanique** (du grec *mêkhanê* = machine) :
art de prédire et contrôler les **mouvements** de la **matière**,
en réponse à des **forces appliquées**.
- Le **solide** possède une **forme propre**
indépendante du support sur lequel il est posé.
- Le **fluide** (**liquide** ou **gaz**, selon sa densité + ou – grande)
épouse la forme du support sur ou dans lequel il est posé.
- Science du **mouvement** = **cinématique** (du grec *kinêma* = mouvement)...
Cf. sur ce sujet l'annexe A *Cinématique fondamentale* du tome 1...

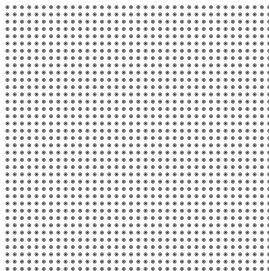
Modèle du milieu continu ?

Cf. un cristal : échelle 5 Å : milieu discontinu :



Modèle du milieu continu ?

Cf. un cristal : échelle 10 nm : on commence à voir une « texture » quasi-homogène :



Modèle du milieu continu ?

Cf. un cristal : échelle $10 \mu\text{m}$: milieu « continu » :



Modèle du milieu continu !

Considérée à une échelle suffisamment « grande »,
la **matière** peut souvent être vue comme un **continuum** de « **points matériels** »
= **volumes élémentaires représentatifs en quasi-équilibre thermodynamique**

En ces « **points matériels** » on peut définir

- une masse volumique moyenne $\rho(\bar{\mathbf{x}}, t)$;
- une vitesse moyenne $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$;
- une température moyenne $T(\bar{\mathbf{x}}, t)$...

D'où la possibilité de décrire le **mouvement** par la « **cinématique** » (cf. poly)...

Et d'**analyser** tous les **champs** impliqués avec le **calcul tensoriel**...

introduit ici en mélangeant **algèbre** et **analyse** pour des questions de temps...

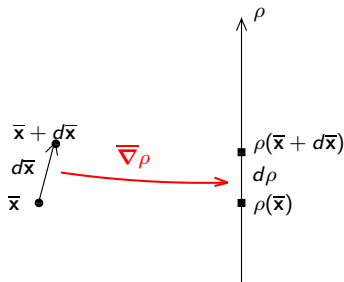
2 Introduction au calcul tensoriel

$\mathcal{T}_0 = \{ \text{tenseurs d'ordre 0} = \text{scalaires} \}$, ex. $\rho(\bar{\mathbf{x}})$ masse volumique.

$\mathcal{T}_1 = \{ \text{tenseurs d'ordre 1} = \text{vecteurs} \} = \mathbb{R}^3$ euclidien,

ex. $\bar{\nabla}_{\mathbf{x}}\rho$ gradient de masse volumique :

définition intrinsèque : $d\rho = \underbrace{\rho(\bar{\mathbf{x}} + d\bar{\mathbf{x}}) - \rho(\bar{\mathbf{x}})}_{\delta\rho}$ linéarisé = $\bar{\nabla}_{\mathbf{x}}\rho \cdot d\bar{\mathbf{x}}$



$\bar{\nabla}_{\mathbf{x}}\rho$ est l'**application linéaire**

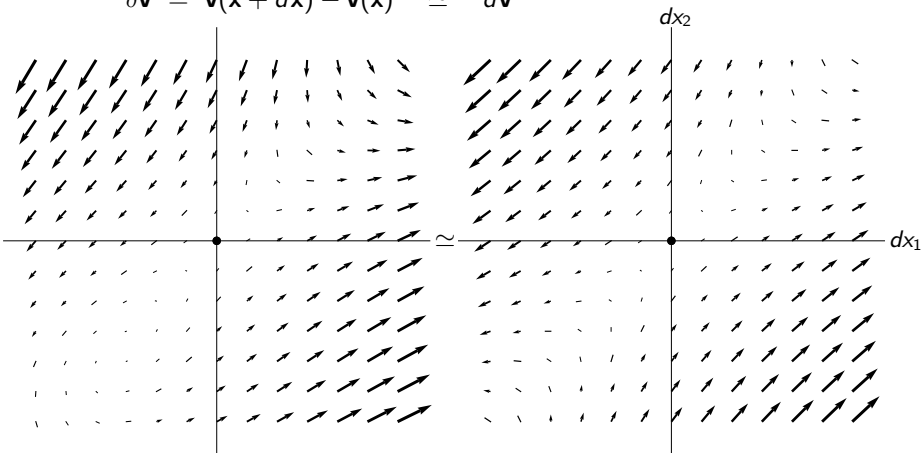
$$\begin{array}{l} \mathcal{T}_1 \longrightarrow \\ d\bar{\mathbf{x}} \longmapsto \end{array} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathcal{T}_0 \\ d\rho = \bar{\nabla}_{\mathbf{x}}\rho \cdot d\bar{\mathbf{x}} \end{array}$$

Introduction au calcul tensoriel

En mécanique on s'intéresse aussi à des champs vectoriels ;
ex. : le champ de vitesse.

Son gradient se définit en considérant $d\bar{\mathbf{v}}$ fonction linéarisée de $d\bar{\mathbf{x}}$

$$\delta\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}} + d\bar{\mathbf{x}}) - \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) \simeq d\bar{\mathbf{v}}$$

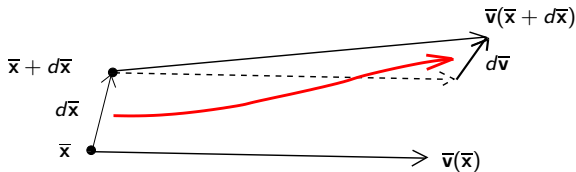


Introduction au calcul tensoriel

En mécanique on s'intéresse aussi à des champs vectoriels ;
ex. : le champ de vitesse.

Son gradient est un champ de **tenseurs d'ordre 2**,
c'est-à-dire un champ d'**endomorphismes** :

$$\text{définition intrinsèque : } d\vec{v} = \underbrace{\vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}) - \vec{v}(\vec{x})}_{\delta\vec{v}} \text{ linéarisé} = \overline{\overline{\nabla}}\vec{v} \cdot d\vec{x}$$



$$\overline{\overline{\nabla}}\vec{v} \text{ est l'application linéaire } \begin{array}{l} \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_1 \\ d\vec{x} \longmapsto d\vec{v} = \overline{\overline{\nabla}}\vec{v} \cdot d\vec{x} \end{array}$$

Tenseurs d'ordre 1 (\mathcal{T}_1) :

$$\begin{array}{l} \overline{\nabla} \rho \text{ application linéaire} \\ \mathcal{T}_1 \longrightarrow \\ d\bar{\mathbf{x}} \longmapsto \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathcal{T}_0 \\ d\rho = \overline{\nabla} \rho \cdot d\bar{\mathbf{x}} \end{array}$$

Tenseur d'ordre 2 (\mathcal{T}_2) :

$$\begin{array}{l} \overline{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \text{ application linéaire} \\ \mathcal{T}_1 \longrightarrow \\ d\bar{\mathbf{x}} \longmapsto \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathcal{T}_1 \\ d\bar{\mathbf{v}} = \overline{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} \end{array}$$

D'où la définition par récurrence d'un tenseur d'ordre $n+1$:

$$\begin{array}{l} \mathbf{T}^{n+1} \text{ application linéaire} \\ \mathcal{T}_1 \longrightarrow \\ \bar{\mathbf{h}} \longmapsto \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathcal{T}_n \\ \mathbf{T}^{n+1}(\bar{\mathbf{h}}) = \mathbf{T}^{n+1} \cdot \bar{\mathbf{h}} \end{array}$$

↪ gradient d'un tenseur \mathbf{A} d'ordre n :

$$\begin{array}{l} \nabla \mathbf{A} \in \mathcal{T}_{n+1} \text{ est l'application linéaire} \\ \mathcal{T}_1 \longrightarrow \\ d\bar{\mathbf{x}} \longmapsto \end{array} \quad \begin{array}{l} \mathcal{T}_n \\ d\mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} \cdot d\bar{\mathbf{x}} \end{array}$$

Définition par récurrence d'un tenseur d'ordre n :

$$\mathbf{T}^n \text{ application linéaire } \begin{array}{l} \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_{n-1} \\ \bar{\mathbf{h}} \longmapsto \mathbf{T}^n(\bar{\mathbf{h}}) = \mathbf{T}^n \cdot \bar{\mathbf{h}} \end{array}$$

Définition par récurrence du produit tensoriel :

Soient n vecteurs $\bar{\mathbf{a}}_1, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n$. Leur **produit tensoriel** est le **tenseur d'ordre n**

$$\bar{\mathbf{a}}_1 \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{a}}_n \text{ application linéaire } \begin{array}{l} \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_{n-1} \\ \bar{\mathbf{h}} \longmapsto \bar{\mathbf{a}}_1 \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{a}}_{n-1} (\bar{\mathbf{a}}_n \cdot \bar{\mathbf{h}}) \end{array}$$

étant entendu que

$$\bar{\mathbf{a}}_1 \otimes \bar{\mathbf{a}}_2 \text{ application linéaire } \begin{array}{l} \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_1 \\ \bar{\mathbf{h}} \longmapsto \bar{\mathbf{a}}_1 (\bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \bar{\mathbf{h}}) \end{array}$$

↪ **écriture en composantes dans base orthonormée choisie :**

$$\bar{\mathbf{v}} = \sum_i v_i \bar{\mathbf{e}}_i, \quad \bar{\bar{\mathbf{T}}} = \sum_{ij} T_{ij} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j, \quad \bar{\bar{\bar{\mathbf{T}}}} = \sum_{ijk} T_{ijk} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j \otimes \bar{\mathbf{e}}_k, \quad \text{etc...}$$

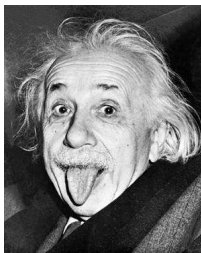
Convention de sommation sur les indices répétés « muets » :

$$\bar{\mathbf{v}} = \sum_i v_i \bar{\mathbf{e}}_i \rightsquigarrow \bar{\mathbf{v}} = v_i \bar{\mathbf{e}}_i \implies \mathcal{T}_1 \text{ espace vectoriel de dim. } 3$$

$$\bar{\bar{\mathbf{T}}} = \sum_{ij} T_{ij} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j \rightsquigarrow \bar{\bar{\mathbf{T}}} = T_{ij} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j \implies \mathcal{T}_2 \text{ espace vect. de dim. } 3^2$$

$$\bar{\bar{\bar{\mathbf{T}}}} = \sum_{ijk} T_{ijk} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j \otimes \bar{\mathbf{e}}_k \rightsquigarrow \bar{\bar{\bar{\mathbf{T}}}} = T_{ijk} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j \otimes \bar{\mathbf{e}}_k \implies \mathcal{T}_3 \text{ espace vect. de dim. } 3^3$$

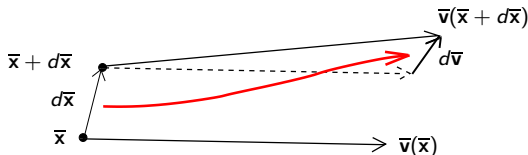
Merci M. Einstein !



Calcul des composantes de $\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{v}}$ en coordonnées cartésiennes

Partir de la définition intrinsèque :

$$\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{v}} \text{ est l'application linéaire } \begin{array}{l} \mathcal{T}_1 \longrightarrow \\ d\overline{\mathbf{x}} \longmapsto \end{array} \begin{array}{l} \mathcal{T}_1 \\ d\overline{\mathbf{v}} = \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{v}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} \end{array}$$



et utiliser la notation (intrinsèque) produit tensoriel :

$$\overline{\overline{\mathbf{a}}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{b}}} : \begin{array}{l} \mathcal{T}_1 \longrightarrow \\ d\overline{\mathbf{x}} \longmapsto \end{array} \begin{array}{l} \mathcal{T}_1 \\ (\overline{\overline{\mathbf{a}}} \otimes \overline{\overline{\mathbf{b}}}) \cdot d\overline{\mathbf{x}} = \overline{\overline{\mathbf{a}}} (\overline{\overline{\mathbf{b}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}) \end{array}$$

$$\hookrightarrow \overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{v}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \overline{\mathbf{e}}_i \otimes \overline{\mathbf{e}}_j$$

Au fait c'est quoi ce \cdot ?

C'est le point du **produit de contraction** :

$$\text{si } \mathbf{A} = A_{i_1 i_2 \dots i_n} \bar{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{i_n} \in \mathcal{T}_n,$$

$$\mathbf{B} = B_{j_1 j_2 \dots j_m} \bar{\mathbf{e}}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{j_m} \in \mathcal{T}_m,$$

alors

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} k} B_{k j_2 \dots j_m} \bar{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{i_{n-1}} \otimes \bar{\mathbf{e}}_{j_2} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{j_m}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{T}_{n-1+m-1} = \mathcal{T}_{n+m-2}$$

Exemple : $\bar{\bar{\mathbf{A}}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{B}}}$ est l'endomorphisme composé $\bar{\bar{\mathbf{A}}} \circ \bar{\bar{\mathbf{B}}} = A_{i k} B_{k j} \bar{\mathbf{e}}_i \otimes \bar{\mathbf{e}}_j$.

On définit aussi le **produit doublement contracté** :

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{i_1 \dots i_{n-2} q k} B_{k q j_3 \dots j_m} \bar{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{i_{n-2}} \otimes \bar{\mathbf{e}}_{j_3} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{j_m}$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} \in \mathcal{T}_{n-2+m-2} = \mathcal{T}_{n+m-4}$$

Exemple : $\bar{\bar{\mathbf{A}}} : \bar{\bar{\mathbf{B}}}$ est le scalaire $\text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{A}}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{B}}}) = \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{A}}} \circ \bar{\bar{\mathbf{B}}}) = A_{qk} B_{kq}$.

Produit simplement contracté :

$$\text{si } \mathbf{A} = A_{i_1 i_2 \dots i_n} \bar{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{i_n} \in \mathcal{T}_n,$$

$$\mathbf{B} = B_{j_1 j_2 \dots j_m} \bar{\mathbf{e}}_{j_1} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{j_m} \in \mathcal{T}_m,$$

alors

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} k} B_{k j_2 \dots j_m} \bar{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{i_{n-1}} \otimes \bar{\mathbf{e}}_{j_2} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{j_m}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{T}_{n-1+m-1} = \mathcal{T}_{n+m-2}$$

Produit doublement contracté :

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{i_1 \dots i_{n-2} q k} B_{k q j_3 \dots j_m} \bar{\mathbf{e}}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{i_{n-2}} \otimes \bar{\mathbf{e}}_{j_3} \otimes \dots \otimes \bar{\mathbf{e}}_{j_m}$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} \in \mathcal{T}_{n-2+m-2} = \mathcal{T}_{n+m-4}$$

Application : définition de la divergence :

$$\text{si } \mathbf{T} \in \mathcal{T}_n \text{ avec } n \geq 1, \operatorname{div} \mathbf{T} = \nabla \mathbf{T} : \bar{\mathbf{1}} \in \mathcal{T}_{n+1+2-4} = \mathcal{T}_{n-1}$$

Application : définition du laplacien :

$$\text{si } \mathbf{T} \in \mathcal{T}_n, \Delta \mathbf{T} = \operatorname{div} \nabla \mathbf{T} = \nabla \nabla \mathbf{T} : \bar{\mathbf{1}} \in \mathcal{T}_{n+1-1} = \mathcal{T}_n$$

Il y aurait encore beaucoup d'autres choses à présenter sur le calcul tensoriel...

- la définition des tenseurs comme **applications multilinéaires**

$$\mathbf{T}^n \text{ forme } n\text{-linéaire} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \cdots \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\bar{\mathbf{X}}_1, \cdots, \bar{\mathbf{X}}_n) & \longmapsto & \mathbf{T}^n(\bar{\mathbf{X}}_1, \cdots, \bar{\mathbf{X}}_n) \quad \cdots \end{array}$$

- par exemple

$$\bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}} : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) & \longmapsto & (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{x}})(\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{y}}) \end{array}$$

- le **tenseur alterné fondamental** $\bar{\bar{\bar{\epsilon}}}$ qui permet de définir le produit vectoriel

$$\bar{\mathbf{x}} \wedge \bar{\mathbf{y}} = \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\mathbf{y}} \otimes \bar{\mathbf{x}}$$

et le rotationnel d'un champ de vecteur

$$\overline{\text{rot}}(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \dots$$

- les **formules intégrales**...

**Grâce aux 2 cours-TD de calcul tensoriel,
au poly, à la suite de ce module,
et à votre **travail personnel**,
vous finirez bien par maîtriser le calcul tensoriel...**

3 Programme du TD :

- 4 exercices d'algèbre tensorielle : 1.3, 1.4, 1.11 et 1.13 ;
- 2 exercices d'analyse tensorielle : 2.2 et 2.3...
- *en bonus, si le temps le permet, A.1.*

Équipe pédagogique pour le TD :

Groupe(s)	salle	chargé(e) de TD	Laboratoire
1.M1 & 2.M1	A301	Matthieu Gisselbrecht	IJL
1.P1 & 2.P1	A303	Lucile Dezerald	IJL
1.P2 & 2.P2	A304	Arthur Pascot	Lemta
1.P3	A305	Mathieu Jenny	Lemta
2.P3	A305	Antonio Pereira	Lemta

Prochain cours(-TD) mercredi 20 septembre matin **ou après-midi...**



Le TD2 du groupe **1.P3** sera décalé jeudi 21 septembre de 8h à 10h !

Questions ?