

# Mécanique des milieux continus solides et fluides

## Séance de mise à niveau

### Cinématique fondamentale

Emmanuel Plaut

On rappelle que ce module possède une page web

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc>

et que l'on veut travailler la **MMCSF** à **haut niveau**,  
comme une **science physique** :

- ▶ on **définit** les objets de l'étude ;
- ▶ on adopte une démarche de **physicien** qui **observe** et **modélise**...
- ▶ en utilisant les **mathématiques**...

## Objectifs et définitions en MMCSF

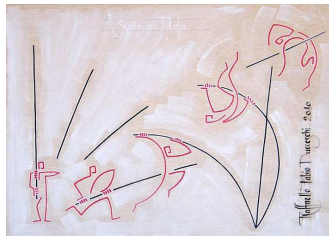
Le **but** c'est bien sûr la **physique** :

la **mécanique des solides et fluides**.

Le **moyen** c'est un **modèle mathématique** :

le **modèle du milieu continu**.

- ▶ **Mécanique** (du grec *mêkhanê* = machine) :  
art de prédire et contrôler les **mouvements** de la **matière**,  
en réponse à des **forces appliquées**.
- ▶ **Cinématique** (du grec *kinêma* = mouvement) :  
art de décrire les **mouvements**.



## Solides et fluides ?

- ▶ Le **solide** possède une **forme propre** indépendante du support sur lequel il est posé.
- ▶ Le **fluide** (**liquide** ou **gaz**, selon sa densité + ou – grande) **épouse la forme** du support sur ou dans lequel il est posé.

## Référentiel ?

- ▶ **Référentiel = observateur solide indéformable !**

## Champ de vitesse d'1 solide indéformable dans 1 référentiel donné ?

Si  $A, M, M' \in S$ , on a conservation du produit scalaire :

$$\forall t, \quad \frac{d}{dt}(\overline{\mathbf{AM}} \cdot \overline{\mathbf{AM}'}) = 0.$$

En considérant le cas de vecteurs infinitésimaux pour pouvoir faire de l'**analyse** :

$$M = A + d\bar{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad M' = A + d\bar{\mathbf{x}}',$$

et en introduisant l'**endomorphisme - tenseur gradient de vitesse**

$$\bar{\mathbf{K}} = \overline{\nabla_A \mathbf{v}} \quad \text{tel que} \quad \text{Mat}(\bar{\mathbf{K}}, \{\bar{\mathbf{e}}_i\}) = \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{OA}}) \right]$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt}(d\bar{\mathbf{x}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}') = d\bar{\mathbf{x}} \cdot (\bar{\mathbf{K}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}') + (\bar{\mathbf{K}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}) \cdot d\bar{\mathbf{x}}' = 2d\bar{\mathbf{x}} \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}' = 0$$

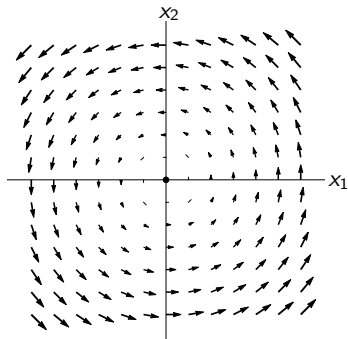
avec  $\bar{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}^T)$  la **forme bilinéaire - tenseur des taux de déformation**.

## Champ de vitesse d'un solide indéformable dans 1 référentiel donné ?

$$\overline{\mathbf{D}} = \overline{\mathbf{0}} \iff \forall i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,3\}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0$$

$\iff \overline{\boldsymbol{\omega}}$  champ de moments :

$$\forall A, M \in S, \quad \overline{\mathbf{v}}(M) - \overline{\mathbf{v}}(A) = \overline{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overline{\mathbf{AM}}$$



$\overline{\boldsymbol{\omega}}$  = vecteur vitesse de rotation instantanée

## Composition des mouvements par changement de référentiel

Référentiel absolu  $\mathcal{R}_0$  d'origine O.

Référentiel relatif  $\mathcal{R}$ ,  $A \in \mathcal{R}$ ,

$$\bar{\mathbf{v}}_e(M) = \bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(M \in \mathcal{R}) = \bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(A \in \mathcal{R}) + \bar{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overline{\mathbf{AM}}.$$

## Composition des dérivées temporelles de vecteurs

$$\left. \frac{d\bar{\mathbf{w}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d\bar{\mathbf{w}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \bar{\mathbf{w}}.$$

## Composition des vitesses (loi de Galilée)

$$\bar{\mathbf{v}}_a(M) = \bar{\mathbf{v}}_r(M) + \bar{\mathbf{v}}_e(M)$$

avec

$$\bar{\mathbf{v}}_a(M) = \left. \frac{d\overline{\mathbf{OM}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}, \quad \bar{\mathbf{v}}_r(M) = \left. \frac{d\overline{\mathbf{AM}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}, \quad \bar{\mathbf{v}}_e(M, t) = \bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(M \in \mathcal{R}).$$

## Composition des accélérations

$$\bar{\gamma}_a(M) = \bar{\gamma}_r(M) + \bar{\gamma}_e(M) + \bar{\gamma}_c(M)$$

avec l'accélération absolue

$$\bar{\gamma}_a(M) = \left. \frac{d^2 \overline{\mathbf{OM}}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_0},$$

l'accélération d'entraînement

$$\bar{\gamma}_e(M) = \left. \frac{d^2 \overline{\mathbf{OA}}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_0} + \dot{\bar{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overline{\mathbf{AM}} + \bar{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge [\bar{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overline{\mathbf{AM}}],$$

l'accélération de Coriolis

$$\bar{\gamma}_c(M) = 2\bar{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \bar{\mathbf{v}}_r(M).$$

## De la **dynamique** pour finir : loi d'évolution de la $q^{te}$ de mouvem<sup>nt</sup> 1 dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ absolu

$$\bar{\mathbf{p}}_{\mathcal{R}_0} = \iiint_{\Omega_t} d^3m \bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(M)$$

$$\left. \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \iiint_{\Omega_t} d^3m \bar{\boldsymbol{\gamma}}_a(M) = \iiint_{\Omega_t} d^3m \bar{\mathbf{g}} + \iint_{\partial\Omega_t} d^2\bar{\mathbf{f}}$$

## 2 dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$ relatif

$$\left. \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \iiint_{\Omega_t} d^3m \bar{\boldsymbol{\gamma}}_r(M) = \iiint_{\Omega_t} d^3m \bar{\mathbf{g}}' + \iint_{\partial\Omega_t} d^2\bar{\mathbf{f}}$$

avec

$$\bar{\mathbf{g}}' = \bar{\mathbf{g}} - \bar{\boldsymbol{\gamma}}_e(M) - \bar{\boldsymbol{\gamma}}_c(M)$$

↔ **forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis...**

**Dynamique** (du grec *dynamikos* = fort, puissant) :

science des forces ou puissances qui meuvent les corps (Leibnitz).



## Travail personnel

### avant la 1<sup>ère</sup> séance régulière du vendredi 23 septembre

↔ <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc> ↔

- ▶ effectuer une 1<sup>ère</sup> lecture de la sect<sup>o</sup> 1.1 du chapitre 1 du cours de mécanique ;
- ▶ lire très attentivement le chapitre 1 et les sect<sup>o</sup> 2.1 à 2.5 du cours de calcul tensoriel ;
- ▶ chercher par vous même à résoudre les exercices de calcul tensoriel 1.1 à 1.11, 2.1 et 2.2.