Mécanique des milieux continus solides et fluides

Séance de mise à niveau

Cinématique fondamentale

Emmanuel Plaut

On rappelle que ce module possède une page web

http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc

et que l'on veut travailler la **MMCSF** à **haut niveau**,
comme une **science physique** :

- on **définit** les objets de l'étude ;
- on adopte une démarche de **physicien** qui **observe** et **modélise**...
- en utilisant les **mathématiques**...

Objectifs et définitions en MMCSF

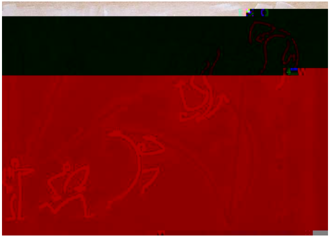
Le **but** c'est bien sûr la **physique** :

la **mécanique des solides et fluides**.

Le **moyen** c'est un **modèle mathématique** :

le **modèle du milieu continu**.

- **Mécanique** (du grec *mêkhanê* = machine) :
  art de prédire et contrôler les **mouvements** de la **matière**,
  en réponse à des **forces appliquées**.
- **Cinématique** (du grec *kinêma* = mouvement) :
  art de décrire les **mouvements**.



Solides et fluides ?

- Le **solide** possède une **forme propre** indépendante du support sur lequel il est posé.
- Le **fluide** (**liquide** ou **gaz**, selon sa densité + ou − grande) **épouse la forme** du support sur ou dans lequel il est posé.

Référentiel ?

- **Référentiel = observateur solide indéformable !**

Champ de vitesse d'1 solide indéformable dans 1 référentiel donné ?

Si A, M, M$'$ $\in S$, on a conservation du produit scalaire :

$$\forall t \ , \quad \frac{d}{dt}\left(\overline{\mathbf{AM}} \cdot \overline{\mathbf{AM}'}\right) \ = \ 0 \ .$$

En considérant le cas de vecteurs infinitésimaux pour pouvoir faire de l'**analyse** :

$$\mathrm{M} \ = \ \mathrm{A} \ + \ d\overline{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}' \ = \ \mathrm{A} \ + \ d\overline{\mathbf{x}}' \ ,$$

et en introduisant l'**endomorphisme - tenseur gradient de vitesse**

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}_{\mathrm{A}}\overline{\mathbf{v}} \quad \text{tel que} \quad \mathrm{Mat}\left(\overline{\overline{\mathbf{K}}}, \{\overline{\mathbf{e}}_i\}\right) \ = \ \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\overline{\mathbf{OA}})\right]$$

$$\hookrightarrow \ \frac{d}{dt}\left(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}'\right) \ = \ d\overline{\mathbf{x}} \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{K}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}'\right) \ + \ \left(\overline{\overline{\mathbf{K}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}\right) \cdot d\overline{\mathbf{x}}' \ = \ 2d\overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}' \ = \ 0$$

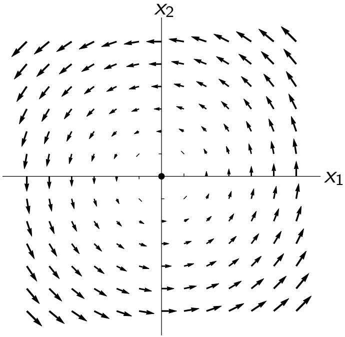
avec $\overline{\overline{\mathbf{D}}} \ = \ \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\mathbf{K}}}+\overline{\overline{\mathbf{K}}}^T\right)$ la **forme bilinéaire - tenseur des taux de déformation**.

Champ de vitesse d'1 solide indéformable dans 1 référentiel donné ?

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \overline{\mathbf{0}} \iff \forall i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,3\} , \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0$$

$\iff$ $\overline{\mathbf{v}}$ **champ de moments** :

$$\forall \ \mathrm{A}, \mathrm{M} \in S , \quad \overline{\mathbf{v}}(\mathrm{M}) - \overline{\mathbf{v}}(\mathrm{A}) = \overline{\omega} \wedge \overline{\mathbf{AM}}$$



$\overline{\omega}$ = **vecteur vitesse de rotation instantanée**

Composition des mouvements par changement de référentiel

Référentiel absolu $\mathcal{R}_0$ d'origine O.

Référentiel relatif $\mathcal{R}$, A$\in \mathcal{R}$,

$$\overline{\mathbf{v}}_e(\mathrm{M}) \;=\; \overline{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(\mathrm{M} \in \mathcal{R}) \;=\; \overline{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(\mathrm{A} \in \mathcal{R}) \;+\; \overline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overline{\mathbf{AM}} \;.$$

Composition des dérivées temporelles de vecteurs

$$\left.\frac{d\overline{\mathbf{w}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} \;=\; \left.\frac{d\overline{\mathbf{w}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \;+\; \overline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overline{\mathbf{w}} \;.$$

Composition des vitesses (loi de Galilée)

$$\overline{\mathbf{v}}_a(\mathrm{M}) \;=\; \overline{\mathbf{v}}_r(\mathrm{M}) \;+\; \overline{\mathbf{v}}_e(\mathrm{M})$$

avec

$$\overline{\mathbf{v}}_a(\mathrm{M}) \;=\; \left.\frac{d\overline{\mathbf{OM}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} , \quad \overline{\mathbf{v}}_r(\mathrm{M}) \;=\; \left.\frac{d\overline{\mathbf{AM}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} , \quad \overline{\mathbf{v}}_e(\mathrm{M},t) \;=\; \overline{\mathbf{v}}_{\mathcal{R}_0}(\mathrm{M} \in \mathcal{R}) \;.$$

Composition des accélérations

$$\overline{\gamma}_a(\mathrm{M}) = \overline{\gamma}_r(\mathrm{M}) + \overline{\gamma}_e(\mathrm{M}) + \overline{\gamma}_c(\mathrm{M})$$

avec l'accélération absolue

$$\overline{\gamma}_a(\mathrm{M}) = \left.\frac{d^2\overline{\mathbf{OM}}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}_0},$$

l'accélération d'entrainement

$$\overline{\gamma}_e(\mathrm{M}) = \left.\frac{d^2\overline{\mathbf{OA}}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}_0} + \dot{\overline{\boldsymbol{\omega}}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overline{\mathbf{AM}} + \overline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge [\overline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overline{\mathbf{AM}}],$$

l'accélération de Coriolis

$$\overline{\gamma}_c(\mathrm{M}) = 2\overline{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overline{\mathbf{v}}_r(\mathrm{M}).$$

De la **dynamique** pour finir : loi d'évolution de la q$^{\text{té}}$ de mouvem$^{\text{nt}}$

1 dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ absolu

$$\overline{\mathbf{p}}_{\mathcal{R}_0} = \iiint_{\Omega_t} d^3m\, \overline{\mathbf{v}}_{R_0}(\mathrm{M})$$

$$\left.\frac{d\overline{\mathbf{p}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \iiint_{\Omega_t} d^3m\, \overline{\gamma}_a(\mathrm{M}) = \iiint_{\Omega_t} d^3m\, \overline{\mathbf{g}} + \iint_{\partial\Omega_t} d^2\overline{\mathbf{f}}$$

2 dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$ relatif

$$\left.\frac{d\overline{\mathbf{p}}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \iiint_{\Omega_t} d^3m\, \overline{\gamma}_r(\mathrm{M}) = \iiint_{\Omega_t} d^3m\, \overline{\mathbf{g}}' + \iint_{\partial\Omega_t} d^2\overline{\mathbf{f}}$$

avec

$$\overline{\mathbf{g}}' = \overline{\mathbf{g}} - \overline{\gamma}_e(\mathrm{M}) - \overline{\gamma}_c(\mathrm{M})$$

$\longleftrightarrow$ **forces d'inertie d'entrainement et de Coriolis**...

Dynamique (du grec *dynamikos* = fort, puissant) :

science des forces ou puissances qui meuvent les corps (Leibnitz).

Travail personnel
avant la $1^{\text{ère}}$ séance régulière du vendredi 23 septembre

$\hookrightarrow$ http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mmc $\hookleftarrow$

- effectuer une $1^{\text{ère}}$ lecture de la sect° 1.1 du chapitre 1 du cours de mécanique ;
- lire très attentivement le chapitre 1 et les sect° 2.1 à 2.5 du cours de calcul tensoriel ;
- chercher par vous même à résoudre les exercices de calcul tensoriel 1.1 à 1.11, 2.1 et 2.2.