Mines Nancy - 1$^{\text{ère}}$ année - Test 0 de MMCSF du 8 novembre 2019 - Durée 55 minutes

Aucun document autorisé - Calculatrices autorisées

Cadres correcteur : G [ ] 1 [ ] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ] [ ]

Vous rendrez impérativement les 4 pages de ce sujet - copie à la fin. Veuillez ne pas dégrafer ces 4 pages.

NOM prénom : [ ] **Gpe de TD :** [ ]

Formulaire :

Double produit vectoriel :

$$\overline{\mathbf{a}} \wedge (\overline{\mathbf{b}} \wedge \overline{\mathbf{c}}) \;=\; (\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{c}})\overline{\mathbf{b}} \;-\; (\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}})\overline{\mathbf{c}} \;. \tag{1}$$

Lien entre tenseur d'ordre 2 application bilinéaire et application linéaire : règle du sandwich :

$$\overline{\overline{\mathbf{L}}} \;:\; (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}') \;\longmapsto\; \overline{\overline{\mathbf{L}}}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}}') \;=\; \overline{\mathbf{x}} \cdot \left(\overline{\overline{\mathbf{L}}} \cdot \overline{\mathbf{x}}'\right) \;. \tag{2}$$

Tenseur de déformation de Green-Lagrange :

$$\overline{\overline{\mathbf{e}}} \;:\; (d\overline{\mathbf{X}},d\overline{\mathbf{X}}') \;\longmapsto\; \overline{\overline{\mathbf{e}}}(d\overline{\mathbf{X}},d\overline{\mathbf{X}}') \;=\; \frac{1}{2}\left(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}' - d\overline{\mathbf{X}} \cdot d\overline{\mathbf{X}}'\right) \;. \tag{3}$$

Exercice : *Étude d'un disque mis progressivement en rotation rapide*

Un « ***disque*** » (plus rigoureusement, un cylindre) ***d'un matériau solide homogène*** est mis ***progressivement*** en ***rotation rapide*** autour de son axe de révolution Oz. La pesanteur ne joue aucun rôle. De même, on ne prend pas en compte les effets de la pression atmosphérique, inclus dans la configuration de référence, i.e., ce disque est dans le « vide ». Le disque est lié près de son centre à un arbre « moteur », mais on oublie ici la liaison à cet axe, comme s'il n'avait d'autre influence que celle de la mise en rotation. Le repère OXYZ est fixe, lié au laboratoire ; le repère Oxyz est tournant, lié au disque ; entre les deux référentiels associés le vecteur vitesse de rotation instantanée $\overline{\boldsymbol{\omega}} = \omega(t)\overline{\mathbf{e}}_z$. On représente sur les figures ci-dessous le quart d'une section du disque dans le plan xOz, avec une grille initialement cartésienne attachée à la matière du disque. Sur la figure **a**, on représente la ***configuration initiale et de référence***, à vitesse de rotation nulle. Sur la figure **b**, on représente cette configuration en gris, et en noir la ***configuration actuelle***, à vitesse de rotation élevée. La configuration actuelle choisie est telle que la section d'intérêt se retrouve dans son plan initial, i.e. à l'instant t_a considéré OXYZ et Oxyz coïncident.

Fig. a :

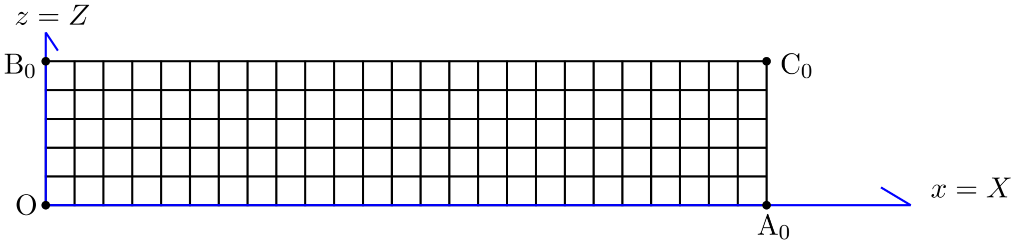
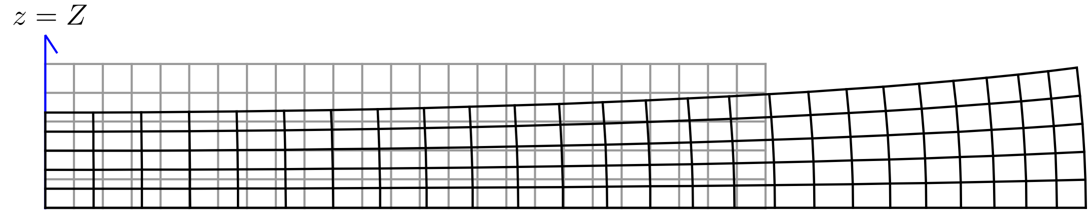


Fig. b :



1 Quel type de description du mouvement est adoptée implicitement, lorsque l'on suit cette grille ?

[Description] .

NOM prénom : | | **Gpe de TD :** | |

---

2 En supposant que sa vitesse de rotation instantanée, $\omega(t)$, croît lentement de 0 à sa valeur actuelle, $\omega_a = \omega(t_a)$, on peut approximer l'***accélération d'entrainement*** du repère Oxyz par

$$\overline{\gamma}_e(\overline{\mathbf{x}}) \;=\; \overline{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\overline{\boldsymbol{\omega}} \wedge \overline{\mathbf{x}}) \quad \text{avec} \quad \overline{\mathbf{x}} \;=\; x\overline{\mathbf{e}}_x + y\overline{\mathbf{e}}_y + z\overline{\mathbf{e}}_z \;\; \text{la position actuelle d'un point matériel.}$$

En notant ρ la masse volumique du solide, établissez par un ***calcul*** une expression simple, dans le repère cartésien tournant Oxyz, de la ***force volumique d'inertie d'entrainement*** correspondante

$$\overline{\mathbf{f}}_e(\overline{\mathbf{x}}) \;=$$

Déduisez-en un ***adjectif*** décrivant l'effet physique de cette force : $\overline{\mathbf{f}}_e$ = force d'inertie .

En quoi cette force permet-elle d'interpréter la forme du disque représentée figure **b** ?

3 Soit A la position actuelle du point A_0 de la figure **a**. Positionnez A sur la figure **b**. Dans le repère fixe OXYZ, quelle est la ***trajectoire*** suivie par ce point entre sa position initiale A_0 et sa position actuelle A ? Représentez cette trajectoire sur un schéma dans le plan XOY.

4 Sur la figure **b**, représentez les positions actuelles B et C des points B_0 et C_0 , puis, en couleur, les ***vecteurs déplacements*** $\overline{\mathbf{u}}$, entre la configuration de référence et actuelle, des points A_0 , B_0 et C_0 . Commentez succinctement l'ordre de grandeur de $||\overline{\mathbf{u}}(A_0)||$.

NOM prénom : | | **Gpe de TD :** | |

5.a Soit $d\mathbf{X}$ un petit segment de matière dans la configuration initiale, orienté dans la direction X, $d\mathbf{x}$ ce segment transporté dans la configuration actuelle. En notant dX et dx les longueurs de ces segments, et en repartant de la définition intrinsèque du ***tenseur de déformation de Green-Lagrange***, établissez une formule analytique permettant d'évaluer sa composante e_{xx} à partir de dX et dx.

5.b Par analogie, si dZ et dz désignent les longueurs d'un petit segment de matière orienté dans la direction z, dans les configurations initiale et actuelle, exprimez e_{zz} à partir de dZ et dz.

$e_{zz} \ =$

6.a Soit $d\mathbf{X}$ du type considéré en question 5.a, joignant B_0 à son plus proche voisin de grille dans la direction X. Représentez $d\mathbf{X}$ sur la figure **a** et ce segment transporté $d\mathbf{x}$ sur la figure **b**. En mesurant à la règle les normes de ces vecteurs, estimez e_{xx} en B_0 . Commentez le signe et l'ordre de grandeur d'e_{xx} .

$dX \ \simeq$, $dx \ \simeq$ $\Longrightarrow$ $e_{xx} \ \simeq$

-
-

6.b Soit $d\mathbf{Z}$ du type considéré en question 5.b, joignant B_0 à son plus proche voisin de grille dans la direction z. Représentez $d\mathbf{Z}$ sur la figure **a** et ce segment transporté $d\mathbf{z}$ sur la figure **b**. En mesurant à la règle les normes de ces vecteurs, estimez e_{zz} en B_0 . Commentez le signe d'e_{zz} .

$dZ \ \simeq$, $dz \ \simeq$ $\Longrightarrow$ $e_{zz} \ \simeq$

-

NOM prénom : **Gpe de TD :**

7.a On se place dorénavant en un point D situé légèrement à droite de B, comme représenté figure **c** ci-dessous. Supposant le ***tenseur de déformation*** $\overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ au point D connu, et le ***solide élastique***, pourrait-on déterminer le ***tenseur des contraintes de Cauchy*** $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ en D à partir d'une loi vue en cours ?

7.b On suppose que, par « isotropie » dans le plan $x\mathrm{O}y$, le tenseur de Cauchy en D a pour expression

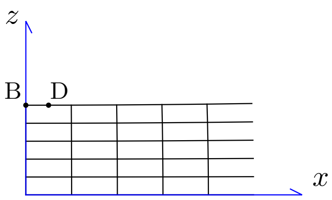
$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \;=\; \sigma_{xx}(\overline{\mathbf{e}}_x \otimes \overline{\mathbf{e}}_x + \overline{\mathbf{e}}_y \otimes \overline{\mathbf{e}}_y) \;+\; \sigma_{zz}\overline{\mathbf{e}}_z \otimes \overline{\mathbf{e}}_z \;.$$

Représentez sur la figure **c** ci-dessous une ***coupe virtuelle*** (ou réelle) du solide au voisinage de D (avec des hachures à l'intérieur au niveau de la coupe), sa normale unitaire sortante $\overline{\mathbf{n}}$, et (s'il est non nul) le ***vecteur contrainte*** associé

$$\overline{\mathbf{T}} \;=\; d^2\overline{\mathbf{f}}/d^2S \;=\; \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\cdot\overline{\mathbf{n}} \;,$$

pour un vecteur $\overline{\mathbf{n}}$ choisi de sorte que $\overline{\mathbf{T}}$ soit proportionnel à σ_{xx} . Expliquez pourquoi le signe de σ_{xx} est connu et ce qu'il signifie physiquement.

Fig. c :



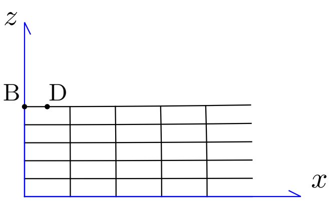
$\overline{\mathbf{n}} \;=\; \qquad \Longrightarrow \quad \overline{\mathbf{T}} \;=$

7.c De même, représentez sur la figure **d** ci-dessous une ***coupe virtuelle*** (ou réelle) du solide au voisinage de D (avec des hachures à l'intérieur au niveau de la coupe), sa normale unitaire sortante $\overline{\mathbf{n}}$, et (s'il est non nul) le ***vecteur contrainte*** associé

$$\overline{\mathbf{T}} \;=\; d^2\overline{\mathbf{f}}/d^2S \;=\; \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\cdot\overline{\mathbf{n}} \;,$$

pour un vecteur $\overline{\mathbf{n}}$ choisi de sorte que $\overline{\mathbf{T}}$ soit proportionnel à σ_{zz} . Expliquez pourquoi la valeur de σ_{zz} est connue et ce qu'elle signifie physiquement.

Fig. d :



$\overline{\mathbf{n}} \;=\; \qquad \Longrightarrow \quad \overline{\mathbf{T}} \;=$