

**Mécanique des milieux continus solides et fluides**

Corrigé rédigé<sup>1</sup> avec compléments du test 1 du 27 novembre 2009

**Problème : étude d'un système d'accouplement élastique**

**I.1** Dans le référentiel galiléen de travail on a atteint une « configuration d'équilibre sous l'effet des couples », donc le champ de vitesse (eulérien)  $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}$  donc le moment cinétique est nul. La loi d'évolution du moment cinétique s'écrit donc, en notant  $\Omega$  le domaine occupé par le manchon, et en travaillant en différence par rapport à la configuration sans couple où le poids et l'air sont déjà présents,

$$\bar{\mathbf{0}} = \iint_{\partial\Omega} \overline{\mathbf{OM}} \wedge (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S = \iint_{S_a} \overline{\mathbf{OM}} \wedge (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S + \iint_{S_b} \overline{\mathbf{OM}} \wedge (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S, \quad (1)$$

en notant  $\bar{\mathbf{n}}$  la normale unitaire sortante sur  $\partial\Omega$ ,  $S_a$  la frontière située en  $r = a$ ,  $S_b$  la frontière située en  $r = b$ . Sur les frontières situées en  $z = 0$  et  $h$  on a des surfaces libres donc  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{0}}$  donc le couple est nul. Comme sur  $S_a$  on a  $\bar{\mathbf{n}} = -\bar{\mathbf{e}}_r$ , et sur  $S_b$ ,  $\bar{\mathbf{n}} = +\bar{\mathbf{e}}_r$ , l'équation (1) donne

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}} = - \iint_{S_a} \overline{\mathbf{OM}} \wedge (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_r) d^2S = -\bar{\boldsymbol{\Gamma}}' = - \iint_{S_b} \overline{\mathbf{OM}} \wedge (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_r) d^2S. \quad (2)$$

**I.2** La loi d'évolution du moment cinétique écrite globalement pour l'arbre, lui aussi au repos dans le référentiel lié à la bague, puisqu'il existe entre les deux un angle de rotation  $\theta_0$  constant, s'écrit

$$\bar{\mathbf{0}} = \sum \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{extérieurs à l'arbre}} = \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{manchon} \rightarrow \text{arbre}} + \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_a. \quad (3)$$

D'après la loi de l'action-réaction

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{manchon} \rightarrow \text{arbre}} = -\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{arbre} \rightarrow \text{manchon}} = -\bar{\boldsymbol{\Gamma}},$$

donc l'équation (3) donne

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}} = \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_a. \quad (4)$$

**I.3** De même la loi d'évolution du moment cinétique écrite pour la bague donne

$$\bar{\mathbf{0}} = \sum \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{extérieurs à la bague}} = \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_{\text{manchon} \rightarrow \text{bague}} + \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_b = -\bar{\boldsymbol{\Gamma}}' + \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_b \iff \bar{\boldsymbol{\Gamma}}' = \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_b. \quad (5)$$

**I.4** On a bien grâce au manchon transmission du couple  $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_a$  de l'arbre vers la bague, puisque les équations (2), (4) et (5) montrent que

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_a = \bar{\boldsymbol{\Gamma}} = -\bar{\boldsymbol{\Gamma}}' = -\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_b. \quad (6)$$

La bague est couplée à un système extérieur sur lequel elle exerce un couple  $-\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_b = \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_a$ , le **manchon a bien permis la transmission du couple  $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_a$** .

**II.1** Le problème est à symétrie de révolution, statique, sans gradients en  $z$  a priori  $\implies \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(r)$ . De plus il n'y a pas de raison pour que le manchon se translate dans la direction  $z$ , et d'ailleurs dans l'énoncé on dit que le manchon est « toujours situé entre les plans  $z = 0$  et  $z = h$  ». Puisque d'autre part il n'y a pas de force qui pourrait imposer un déplacement axial, on peut supposer  $u_z = 0$ . Enfin les frontières en  $r = a$  et  $r = b$  doivent y rester car les arbre et bague sont rigides donc ne peuvent ni se dilater, ni se contracter. De plus il n'y a pas de force qui pourrait imposer un déplacement radial<sup>2</sup>. Il est donc raisonnable de supposer  $u_r = 0$ . Au bilan on a bien  $\bar{\mathbf{u}} = u_\theta(r)\bar{\mathbf{e}}_\theta$  noté plus simplement  $u(r)\bar{\mathbf{e}}_\theta$ .

1. Ce corrigé vous montrera ce que l'on attend de vous lorsque l'on vous demande « de rédiger avec soin ». On vous recommande de d'abord travailler le sujet seul, puis avec le corrigé non rédigé, et seulement dans un troisième temps de lire ce corrigé détaillé.

2. Puisque les forces d'inertie sont négligées!

**II.2** D'après la formule du gradient d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques, donnée dans le cours de calcul tensoriel et différentiel,

$$\overline{\overline{\nabla}}\bar{\mathbf{u}} = -\frac{u_\theta}{r}\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \frac{du_\theta}{dr}\bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_r = -\frac{u}{r}\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + u'\bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_r, \quad (7)$$

en notant  $u'$  la dérivée de  $u$  par rapport à  $r$ .

**II.3** De façon immédiate

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}} = \operatorname{tr}\overline{\overline{\nabla}}\bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (8)$$

ce qui s'explique par le fait que  $\bar{\mathbf{u}}$  est un champ « tournant », donc ni convergent ni divergent.

Une conséquence mécanique importante est que le mouvement est *incompressible*, puisque la dilatation volumique

$$J = 1 + \operatorname{div}\bar{\mathbf{u}} = 1. \quad (9)$$

**II.4** En statique et en l'absence de forces volumiques (ni poids inclus dans la configuration de référence, ni forces d'inertie négligées) l'équation de Navier s'écrit

$$\bar{\mathbf{0}} = (\lambda + \mu)\overline{\overline{\nabla}}\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}} + \mu\overline{\overline{\Delta}}\bar{\mathbf{u}} = \mu\overline{\overline{\Delta}}\bar{\mathbf{u}}$$

en vertu de (8). En utilisant d'autre part la formule du laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques, donnée dans le cours de calcul tensoriel et différentiel, on obtient

$$(\overline{\overline{\Delta}}\bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{e}}_\theta = \Delta u - \frac{u}{r^2} = u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} = 0, \quad (10)$$

soit une équation différentielle ordinaire linéaire homogène d'ordre 2, à coefficients non constants.

**II.5** Cherchons des solutions particulières en  $r^\alpha$  de (10). Il vient

$$\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2} + \alpha r^{\alpha-2} - r^{\alpha-2} = 0 \iff \alpha^2 = 1 \iff \alpha = \pm 1.$$

On peut donc rechercher  $u$  sous la forme

$$u = Ar + B/r.$$

Au niveau du cylindre extérieur fixe la condition limite en déplacement s'écrit

$$u(r = b) = 0$$

et donne

$$B = -Ab^2 \implies \boxed{u = A(r - b^2/r)}. \quad (11)$$

Au niveau du cylindre intérieur on a une petite rotation d'angle  $\theta_0$  (petite d'après l'hypothèse de petits déplacements), donc

$$u(r = a) = a\theta_0 \iff \boxed{A = \theta_0 a^2 / (a^2 - b^2)}. \quad (12)$$

**II.6** En injectant (11) dans (7) on obtient

$$\boxed{\overline{\overline{\nabla}}\bar{\mathbf{u}} = -A(1 - b^2/r^2)\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + A(1 + b^2/r^2)\bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_r}. \quad (13)$$

La partie symétrique de ce tenseur est le tenseur des déformations linéarisé

$$\boxed{\bar{\bar{\epsilon}} = (Ab^2/r^2)(\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_r)}. \quad (14)$$

**II.7** Si le manchon est élastique linéaire isotrope, la loi de Hooke permet de calculer le tenseur des contraintes de Cauchy en faisant intervenir les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  du matériau constituant le manchon,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda (\text{tr} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) \bar{\mathbf{1}} + 2\mu \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = 2\mu \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$$

puisque  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$  est de trace  $\text{div} \bar{\mathbf{u}} = 0$ . Ainsi

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (2\mu Ab^2/r^2) (\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_\theta + \bar{\mathbf{e}}_\theta \otimes \bar{\mathbf{e}}_r)} . \quad (15)$$

**II.8** D'après les équations (2) et (15) il vient

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}} = - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h (a\bar{\mathbf{e}}_r + z\bar{\mathbf{e}}_z) \wedge (2\mu Ab^2/a^2) \bar{\mathbf{e}}_\theta a \, d\theta dz = -(2\mu Ab^2/a) \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h (a\bar{\mathbf{e}}_z - z\bar{\mathbf{e}}_r) \, d\theta dz .$$

À  $z$  fixé on a, par antisymétrie sous  $\theta \mapsto \theta + \pi$ ,

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} z\bar{\mathbf{e}}_r \, d\theta = 0 .$$

En conséquence

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}} = -2\mu Ab^2 \bar{\mathbf{e}}_z 2\pi h$$

qui est bien de la forme  $\Gamma \bar{\mathbf{e}}_z$ , avec, en faisant usage de (12),

$$\Gamma = -4\pi\mu Ab^2 h = 4\pi\mu \frac{a^2 b^2 h}{b^2 - a^2} \theta_0 \iff \boxed{\theta_0 = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2 h} \Gamma} . \quad (16)$$

On a bien proportionnalité de  $\theta_0$  à  $\Gamma$ . Le coefficient de proportionnalité doit être l'inverse d'un couple. C'est bien le cas :

$$\frac{1}{4\pi\mu} \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2 h} \equiv \frac{1}{F} \frac{l^2}{l^{-2} l^5} \equiv \frac{1}{F l}$$

en notant  $F$  la dimension physique d'une force.

Cette relation de proportionnalité n'est pas surprenante car en élasticité linéaire on a d'après la loi de Hooke que les contraintes, proportionnelles à  $\Gamma$ , sont une réponse linéaire aux déformations, proportionnelles à  $\theta_0$ .

**II.9** D'après I.1 la définition intégrale directe du couple  $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}'$  appliqué par le cylindre extérieur sur le manchon est

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}}' = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h (b\bar{\mathbf{e}}_r + z\bar{\mathbf{e}}_z) \wedge (2\mu Ab^2/b^2) \bar{\mathbf{e}}_\theta b \, d\theta dz = 2\mu Ab^2 \bar{\mathbf{e}}_z 2\pi h = 4\pi\mu Ab^2 h \bar{\mathbf{e}}_z = -\bar{\boldsymbol{\Gamma}}$$

comme le prédisait le bilan de moment cinétique.

D'un point de vue physique et géométrique, cette égalité s'explique ainsi : le fait que les contraintes tangentielles (comme les déformations) ont diminué d'un facteur  $a^2/b^2$  entre  $r = a$  et  $r = b$  (démonstré par les équations 14 et 15) est compensé par l'augmentation du bras de levier d'un facteur  $b/a$  et de la surface d'application du couple du même facteur  $b/a$ .

**II.10** Avec les valeurs de la table 4.1 du polycopié de mécanique, on a pour un caoutchouc standard

$$E = 1 \text{ GPa} , \quad \nu = 0,5$$

donc le second coefficient de Lamé

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 0,333 \text{ GPa} . \quad (17)$$

L'équation (16) donne alors

$$\boxed{\theta_0 = 0,012 \text{ rad} = 0,67^\circ} . \quad (18)$$

On a bien une valeur très petite compatible avec l'hypothèse de petits déplacements. On doit aussi vérifier l'hypothèse de la petite transformation. Pour cela on calcule

$$A = -0,027 \ll 1, \quad (19)$$

ce qui montre d'après (13) que l'on a bien

$$\left\| \overline{\nabla \bar{\mathbf{u}}} \right\| \simeq |A| \ll 1. \quad (20)$$

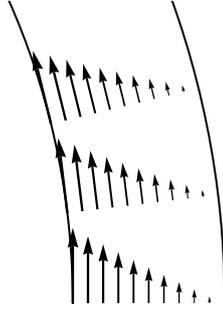
**II.11** Pour représenter le champ  $\bar{\mathbf{u}}$ , il convient de faire une étude rapide de la fonction  $u(r) = |A|(b^2/r - r)$  compte tenu de ce que  $A < 0$ . On a

$$u'(r) = |A|(-b^2/r^2 - 1) < 0 \quad \forall r \in [a, b]$$

donc  $u(r)$  est strictement décroissante. De plus

$$u''(r) = 2|A|b^2/r^3 > 0 \quad \forall r \in [a, b]$$

donc  $u(r)$  est convexe. Cela donne, avec l'aide de Mathematica, le schéma suivant (on a pris  $\theta_0 = 0,1$  rad pour voir quelque chose) :



On peut noter qu'avec ces paramètres les effets de courbure sont très faibles, c'est-à-dire que  $u$  dépend presque de façon affine de  $r$ . Ainsi, sur un rayon fixé, **le champ de déplacement est très similaire à celui du cisaillement pur** en géométrie cartésienne étudié en TD.

**III.1** D'après l'équation (15) il est clair que le vecteur  $\bar{\mathbf{e}}_z$  est vecteur propre de  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$  pour la valeur propre 0. D'autre part <sup>3</sup>

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\bar{\mathbf{e}}_r \pm \bar{\mathbf{e}}_\theta) = (2\mu Ab^2/r^2) (\bar{\mathbf{e}}_\theta \pm \bar{\mathbf{e}}_r) = \pm(2\mu Ab^2/r^2) (\bar{\mathbf{e}}_r \pm \bar{\mathbf{e}}_\theta)$$

montre que  $\bar{\mathbf{e}}_r \pm \bar{\mathbf{e}}_\theta$  est propre pour la valeur propre

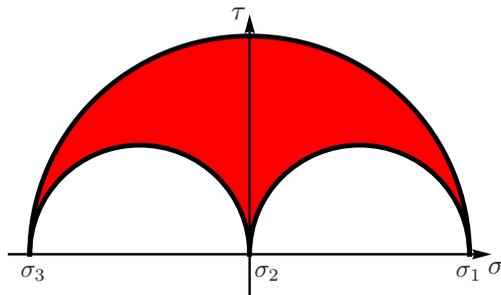
$$\pm 2\mu Ab^2/r^2 = \mp 2\mu |A| b^2/r^2$$

puisque  $A < 0$ . Au bilan

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}_1 &= (\bar{\mathbf{e}}_r - \bar{\mathbf{e}}_\theta)/\sqrt{2} \text{ est propre pour la valeur propre } \sigma_1 = 2\mu |A| b^2/r^2, \\ \bar{\mathbf{n}}_2 &= \bar{\mathbf{e}}_z \text{ est propre pour la valeur propre } \sigma_2 = 0, \\ \bar{\mathbf{n}}_3 &= (\bar{\mathbf{e}}_r + \bar{\mathbf{e}}_\theta)/\sqrt{2} \text{ est propre pour la valeur propre } \sigma_3 = -2\mu |A| b^2/r^2. \end{aligned} \quad (21)$$

3. On avait le droit de ne pas intuiter le rôle des bissectrices de  $\bar{\mathbf{e}}_r$ , et  $\bar{\mathbf{e}}_\theta$ , c'est-à-dire de passer par le calcul du polynôme caractéristique, etc...

**III.2** On obtient donc d'après le cours la représentation de Mohr suivante de l'état de contraintes en un point, avec deux cercles symétriques de part et d'autre de l'origine :



Ces cercles sont caractéristiques d'un état de *cisaillement pur*.

**III.3** À  $\bar{\mathbf{x}}$  fixé on a déjà d'après la représentation de Mohr (et le cours)

$$\max_{\bar{\mathbf{n}}} \tau(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 2\mu|A| \frac{b^2}{r^2}. \quad (22)$$

La *région du manchon la plus sollicitée en cisaillement est donc la région en contact avec l'arbre*, où  $1/r^2$  est maximale puisque  $r$  est minimal égal à  $a$ . On a ainsi

$$\tau_{\max} = \max_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}} \tau(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{n}}) = 2\mu|A| \frac{b^2}{a^2} = 2\mu\theta_0 \frac{b^2}{b^2 - a^2} = \frac{\Gamma}{2\pi a^2 h} \quad (23)$$

en vertu des équations (12) et (16).

**III.4** Prenons par exemple  $\bar{\mathbf{x}} = a\bar{\mathbf{e}}_x$ . En ce point  $\bar{\mathbf{e}}_r = \bar{\mathbf{e}}_x$  et  $\bar{\mathbf{e}}_\theta = \bar{\mathbf{e}}_y$ , donc d'après (21) les vecteurs propres de  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  sont

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}_1 &= (\bar{\mathbf{e}}_x - \bar{\mathbf{e}}_y)/\sqrt{2} \text{ pour la valeur propre } \sigma_1 = \tau_{\max}, \\ \bar{\mathbf{n}}_2 &= \bar{\mathbf{e}}_z \text{ pour la valeur propre } \sigma_2 = 0, \\ \bar{\mathbf{n}}_3 &= (\bar{\mathbf{e}}_x + \bar{\mathbf{e}}_y)/\sqrt{2} \text{ pour la valeur propre } \sigma_3 = -\tau_{\max}, \end{aligned} \quad (24)$$

en faisant aussi usage de (23). D'après le cours sur la représentation de Mohr, les normales correspondant au cisaillement maximal sont les bissectrices du secteur angulaire formé par  $\bar{\mathbf{n}}_1$  et  $\bar{\mathbf{n}}_3$ , soient

$$\bar{\mathbf{n}}_+ = \bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{n}}_- = \bar{\mathbf{e}}_y. \quad (25)$$

On peut le vérifier directement :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -\tau_{\max} (\bar{\mathbf{e}}_x \otimes \bar{\mathbf{e}}_y + \bar{\mathbf{e}}_y \otimes \bar{\mathbf{e}}_x) \implies \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_x = -\tau_{\max} \bar{\mathbf{e}}_y \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_y = -\tau_{\max} \bar{\mathbf{e}}_x$$

qui correspondent bien à des contraintes tangentielles seulement égales à  $\tau_{\max}$ .

**III.5** Avec les données de la question II.10 on obtient

$$\tau_{\max} = 2,5 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 25 \text{ MPa} \quad (26)$$

soit une contrainte tangentielle très importante. C'est que le couple à transmettre,  $\Gamma = 1000 \text{ N m}$ , est plutôt « grand » pour une aussi petite pièce.

### Compléments :

- De fait l'analyse dimensionnelle permet d'estimer que le cisaillement maximum

$$\tau_{\max} \simeq \frac{\Gamma}{d^3}$$

avec  $d$  taille caractéristique du système, en accord avec (23). En prenant  $d = 2$  cm on obtient bien

$$\tau_{\max} \simeq \frac{10^3}{8 \cdot 10^{-6}} \text{ Pa} \simeq 10^8 \text{ Pa} = 100 \text{ MPa}$$

soit le bon ordre de grandeur.

- On pourrait se demander pourquoi l'énoncé ne proposait pas d'aller plus loin qu'une étude de l'état de contrainte, pour proposer un critère de rupture. La réponse est que la rupture d'un matériau caoutchoutique (ou « élastomère ») se produit en général pour des très grandes déformations, pour lesquelles le modèle utilisé ici n'est plus valable. D'une part on n'est plus en petite transformation, d'autre part la réponse du matériau devient non linéaire ; on doit donc écrire une loi de comportement plus compliquée, dite « hyperélastique ». La modélisation de ces effets d' « hyperélasticité » et la formulation d'un critère de rupture approprié sortent largement du cadre de ce module.