

Mécanique des milieux continus solides et fluides

Correction du test 1 & compléments

Emmanuel Plaut

Jean-Philippe Chateau, Yann Gunzburger, Rachid Rahouadj

Yoann Cheny, Rainier Hraiz & Mathieu Jenny

Informations pratiques :

- ▶ Un corrigé succinct sera publié ce soir sur la page web du cours.
- ▶ Les **correcteurs** seront les **personnes en rouge ci-dessus**.
- ▶ Un compte rendu de correction sera publié au plus tard le 20 novembre.
- ▶ On vous remettra vos copies lors de la séance 6 du 21 novembre.

Question 1

Milieu continu solide isotrope occupant un domaine réputé « grand ».

On veut étudier la propagation d'**ondes de déplacements de petite amplitude** dans ce milieu.

Hypothèse(s) raisonnable(s) concernant l'étude de ce problème, et la loi de comportement du matériau solide isotrope ?

Comment alors qualifier ce **problème** ?

Question 2

Équation qui régit l'évolution spatio-temporelle du champ $\bar{u}$?

Noter simplement ρ la densité du milieu, supposée, en 1ère approximation, constante et homogène.

Comment se ramener à une équation qui ne contient que des termes dépendant linéairement du champ de déplacement :

comment éliminer le terme de force de pesanteur ?

Question 3

Onde plane se propageant dans la direction x avec un nombre d'onde $k \in \mathbb{R}^{+*}$ et une fréquence angulaire $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = (u\bar{\mathbf{e}}_x + v\bar{\mathbf{e}}_y + w\bar{\mathbf{e}}_z) \cos(kx - \omega t),$$

avec u , v et w des constantes réelles.

Composantes de l'**équation d'évolution spatio-temporelle de $\bar{\mathbf{u}}$** ?

Obtenir un **système algébrique** de la forme

$$\rho\omega^2[U] = [L] \cdot [U] \quad (*)$$

où $[U]$ est le vecteur colonne

$$[U] = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [L] = ?$$

Question 4

Plans de phase de l'onde étudiée

$$\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = (u\bar{\mathbf{e}}_x + v\bar{\mathbf{e}}_y + w\bar{\mathbf{e}}_z) \cos(kx - \omega t) ?$$

Vitesse de phase c d'une onde = vitesse de propagation de ses plans de phase, en fonction du nombre d'onde k et de la fréquence angulaire ω ?

Question 5

Reformuler

$$\rho\omega^2[U] = [L] \cdot [U] \quad (*)$$

en remplaçant ω par son expression en terme de c et k .

Nature mathématique du système : comment apparaissent c^2 et $[U]$?

Montrer par calcul et analyse physique, notamment 2 dessins
(représentations spatiales du champ $\bar{u}$ à t fixé), qu' $\exists$ 2 types d'ondes :

- **ondes longitudinales de compression-dilatation**, se propageant à la vitesse c_1 ;
- **ondes transversales de cisaillement**, se propageant à la vitesse c_2 .

Calculer c_1 et c_2 , et vérifier l'**homogénéité** des formules obtenues.

Compléments : représentations vidéo avec Mathematica.

Question 6

Densité locale $\rho(\bar{\mathbf{x}}, t)$, à l'ordre U^1 et non plus U^0 , si $U = O([U])$?

Noter ρ_0 la densité à l'ordre U^0 .

Commenter et confirmer la **terminologie** utilisée pour désigner les deux types d'ondes.

Question 7

7.1 Pour une **onde longitudinale de compression-dilatation**, calculer

- ▶ le **gradient du champ de déplacement**,
- ▶ le **tenseur des déformations**,
- ▶ le **tenseur des contraintes**,

en en donnant des **expressions intrinsèques**.

7.2 Dans un solide, on peut définir

$$\text{pression } p = -\frac{1}{3}\text{tr}\overline{\overline{\sigma}}.$$

Calculer p pour une **onde longitudinale de compression-dilatation**, le dessiner et interpréter physiquement le résultat obtenu.

Compléments concernant la pression

- ▶ On peut faire apparaître le **module de compression** $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ défini en compression pure par

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\partial \ln \rho}{\partial p} .$$

En effet on a

$$p = K k u \sin(kx - \omega t) = -K \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}$$

qui est en fait **générale** pour les **solides élastiques** et les **fluides parfaits compressibles**.

- ▶ La vitesse de phase d'une **onde longitudinale de compression-dilatation** peut donc s'écrire

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} .$$

Question 8

Ces **ondes** sont-elles **dispersives** ou non ?

De **quelles ondes se propageant dans les fluides** sont-elles **analogues** ?

Compléments concernant les ondes analogues dans les fluides

Ce sont les **ondes sonores**, dont on peut faire facilement la théorie en **fluide parfait compressible**.

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \rho \bar{\mathbf{v}} \simeq -\rho_0 \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} \quad \text{car} \quad \rho = \rho_0 + \delta \rho .$$

Définition du module de compression :

$$\frac{1}{K} = \frac{\partial \ln \rho}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \implies \delta p \simeq \frac{K}{\rho_0} \delta \rho .$$

Loi d'évolution de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} \simeq \rho_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} = \operatorname{div} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = -\bar{\nabla}(p + \rho g z) \simeq -\bar{\nabla} \delta p .$$

En appliquant la divergence on obtient

$$-\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} = -\Delta \delta p = -\frac{K}{\rho_0} \Delta \delta \rho \iff \text{propagation à } c_s = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$$

Compléments concernant les ondes analogues dans les fluides

- Fluide parfait compressible : **ondes sonores**

$$c_s = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

$$\text{air} \quad \rho = 1.2 \text{ kg/m}^3, \quad K = \frac{\partial p}{\partial \ln \rho} = \gamma p = \frac{7}{5} 1 \text{ atm} = 0,14 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow c_s = 340 \text{ m/s}$$

- Solide élastique : **ondes sonores = de compression-dilatation**

$$c_1 = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}$$

$$\text{acier} \quad \rho = 7800 \text{ kg/m}^3, \quad K = \frac{\partial p}{\partial \ln \rho} = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{200 \text{ GPa}}{3 \cdot 0,44} = 150 \text{ GPa}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200 \text{ GPa}}{2 \cdot 1,28} = 78 \text{ GPa}$$

$$\Rightarrow c_1 = 5700 \text{ m/s} \quad \text{ce qui résout en partie la question 9.}$$

Question 9 suite : vitesses des ondes dans un **acier**

Pour les **ondes sonores = de compression-dilatation** on a vu que

$$c_1 = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} = 5700 \text{ m/s} .$$

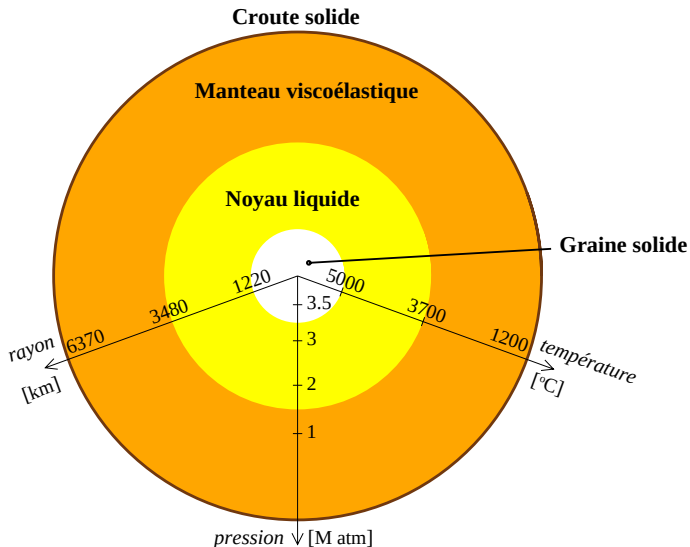
De même pour les **ondes de cisaillement**

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = 3200 \text{ m/s} < c_1 .$$

C'est beaucoup plus rapide que le son dans l'air !...

Question 10.1 : Application aux ondes sismiques

Rappel (ou complément) : **structure interne de la Terre :**



Question 10.1 : Application aux ondes sismiques

Dans le **manteau terrestre** considéré sur des temps courts, donc **élastique**,

$$\rho \simeq 4000 \text{ kg/m}^3, \quad E \simeq 380 \text{ GPa}, \quad \nu \simeq 0,3$$

$$\rightarrow K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \simeq 320 \text{ GPa}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \simeq 150 \text{ GPa}$$

→ **vitesse de phase** des **ondes de compression-dilatation**

$$c_1 = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \simeq 11 \text{ km/s}.$$

→ **vitesse de phase** des **ondes de cisaillement**

$$c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \simeq 6 \text{ km/s}.$$

Question 10.2 : Application aux ondes sismiques

Pourquoi les sismologues distinguent des **ondes « P »**, « **Primaires** », et des **ondes « S »**, « **Secondaires** » ?

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \simeq 11 \text{ km/s} > c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \simeq 6 \text{ km/s}$$

→ **ondes « P »** = **ondes 1** = **ondes de compression-dilatation**

→ **ondes « S »** = **ondes 2** = **ondes de cisaillement**

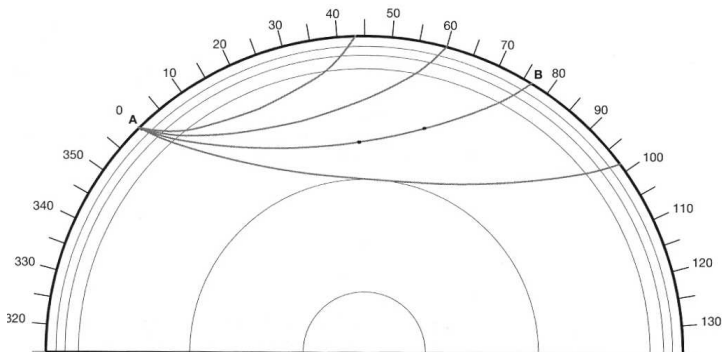
Au bout de combien de temps un sismographe placé à Nancy recevra un signal associé à un **tremblement de terre** ayant lieu en Californie ?

$$t \simeq \frac{||\bar{\mathbf{X}}_{\text{Nancy}} - \bar{\mathbf{X}}_{\text{Los-Angeles}}||}{c_1} = \frac{8600 \text{ km}}{11 \text{ km/s}} = 13 \text{ minutes}$$

Compléments concernant les ondes sismiques

⚠ $z \downarrow \Rightarrow \rho \uparrow$ mais λ et $\mu \uparrow\uparrow$, donc $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \uparrow$

→ les ondes sismiques ne se propagent pas en ligne droite mais évitent les zones de grande vitesse :



[Jolivet, L. & Nataf, H. C. 1998 Géodynamique *Dunod*]

Compléments concernant les ondes sismiques

En fait on ne connaît pas a priori ρ , λ et μ , mais c'est à partir de **mesures sismiques de temps de parcours d'ondes** que l'on peut estimer ces paramètres, en inversant en quelque sorte

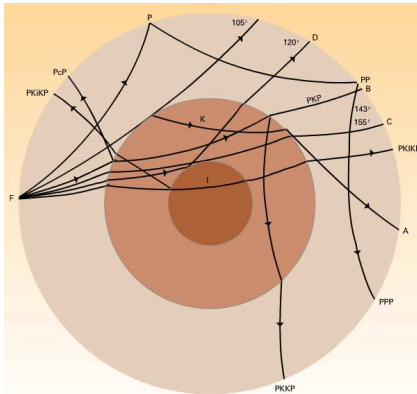
$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{et} \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

la densité étant estimée par une modélisation globale de l'équilibre de la Terre auto-gravitante.

C'est l'objet de la **tomographie sismique** que de préciser par ces méthodes la structure interne de la Terre.

Compléments concernant les ondes sismiques

On doit prendre en compte des **réflexions** & **réfractions** régies par des lois de type Snell-Descartes aux différentes interfaces :



Nomenclature :

	onde P	onde S
Manteau	P	S
Noyau liquide	K	
Noyau interne	I	J

Pas d'ondes S dans le noyau liquide !

[Encyclopædia Universalis 2005]

C'est comme cela que sa nature liquide
a été mise en évidence !

Compléments concernant les ondes sismiques

- ▶ Attention : il existe des **ondes de surface** !...
 - ▶ Ces méthodes tomographiques peuvent aussi être utilisées à plus petite échelle, pour sonder un terrain : **excitation localisée** grâce par exemple à un marteau sur une plaque de fer et mesures en différents points grâce à des « **géophones** ».
- Cf. les cours correspondants du **département** « **Géoingénierie** »...