

Séance 6 de **Mécanique des fluides**

Cours

Modèle du fluide parfait

1 Généralités

2 Premiers éléments de théorie des écoulements potentiels

TD

- Fin du pb. 7.6 de MMCSF *Station de Transfert d'Énergie par Pompage*.
- Début du pb. 3.1 de MF *Écoulements oscillants en canal plan*, faisant le lien fluides parfaits - fluides visqueux.

- **Le fluide parfait**, modèle simple pour mettre en évidence des phénomènes qui existent aussi en fluide réel.
- Simple car dans l'équation de Navier-Stokes (en **incompressible** !)

$$\underbrace{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt}}_{\text{termes inertiels}} = \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = \underbrace{-\nabla \hat{p}}_{\text{terme de pression}} + \underbrace{\eta \overline{\Delta \bar{\mathbf{v}}}}_{\text{terme visqueux}}$$

on **néglige le terme visqueux** → **équation d'Euler**

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = -\nabla \hat{p}$$

- Très pertinent si écoulement fortement instationnaire (**attent^o près des parois !**) :
 $\eta \overline{\Delta \bar{\mathbf{v}}} \ll \rho \partial \bar{\mathbf{v}} / \partial t \iff t_{\text{évolution}} \ll t_{\text{visqueux}} = \ell^2 / \nu$.
- Pertinent si écoulement « rapide » ou de « grande échelle » :
 $\eta \overline{\Delta \bar{\mathbf{v}}} \ll \rho \left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \iff t_{\text{advection}} = \ell / v \ll t_{\text{visqueux}} \iff Re \gg 1$
mais l'écoulement est alors souvent turbulent !

- **Le fluide parfait**, modèle simple
pour mettre en évidence des phénomènes qui existent aussi en fluide réel.
- Simple car dans l'**équation de Navier-Stokes** (en **incompressible** !)

$$\underbrace{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt}}_{\text{termes inertiels}} = \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = \underbrace{-\nabla \hat{p}}_{\text{terme de pression}} + \underbrace{\eta \overline{\Delta \bar{\mathbf{v}}}}_{\text{terme visqueux}}$$

on **néglige le terme visqueux** → **équation d'Euler**

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = -\nabla \hat{p}$$

- Dégrader les conditions limites, d'**adhérence** en fluide visqueux,

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{fluide}} = \bar{\mathbf{v}}_{\text{paroi}} ,$$

à **glissement** en fluide parfait (« imperméabilité »)

$$(\bar{\mathbf{v}}_{\text{fluide}} - \bar{\mathbf{v}}_{\text{paroi}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{n}} \text{ normale à la paroi.}$$

Ex. de calcul tensoriel 2.10

Réécritures du terme non linéaire des éq. de Navier-Stokes et Euler

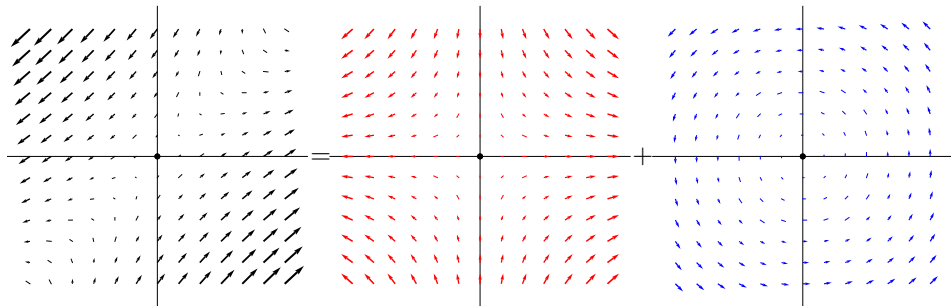
$$\bar{\gamma}_a := \left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} = \overline{\text{div}(\bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}})} = \overline{\nabla \left(\frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} \right)} + \overline{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \bar{\mathbf{v}}$$

avec $\overline{\boldsymbol{\Omega}} = \overline{\text{rot } \bar{\mathbf{v}}} = \ll \text{vecteur vorticité} \gg$

qui mesure la partie de **rotation locale** du champ de vitesse linéarisé.

Rappel : décomposition locale d'un champ de vitesse linéarisé

$$d\bar{\mathbf{v}} = \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}} = \underbrace{\overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\bar{\mathbf{x}}}_{\text{déformation}} + \underbrace{\frac{1}{2} \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} \wedge d\bar{\mathbf{x}}}_{\text{rotation}}$$



$$\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}} + \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}^T} \right), \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} = \overline{\overline{\text{rot } \mathbf{v}}} = \ll \text{vecteur vorticité} \gg$$

$$\sum \text{taux de déformation propres} = \text{tr} \overline{\overline{\mathbf{D}}} = \text{tr} \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}} = \text{div} \bar{\mathbf{v}} = 0$$

Réécriture de l'éq. d'Euler à l'aide du vecteur vorticité

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \right] = - \vec{\nabla} \hat{p}$$

Conséquence en écoulement stationnaire : 1^{er} thm de Bernoulli

Le long d'une trajectoire - ligne de courant C , on a $d\vec{x} = \vec{v} ds$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \left(\rho \frac{\vec{v}^2}{2} + \hat{p} \right) \cdot d\vec{x} + 0 = 0 \iff \hat{p} + \rho \frac{\vec{v}^2}{2} = \text{constante}$$

$$\iff \text{conservation de la charge } H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{\vec{v}^2}{2g} = \text{constante}(C)$$

$$\iff p = p_0(C) - \rho g z - \rho \frac{\vec{v}^2}{2}$$

« effet Bernoulli » : survitesse $\|\vec{v}\| \uparrow \iff$ dépression $p \downarrow$.

1^{er} théorème de Bernoulli

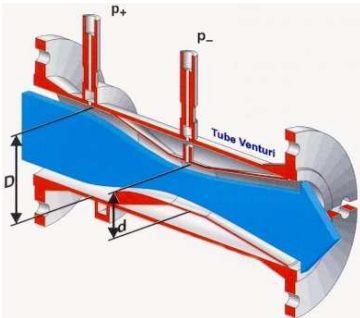
En écoulement stationnaire, le long d'une trajectoire - ligne de courant C :

conservation de la charge
$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{\bar{v}^2}{2g} = \text{constante}(C)$$

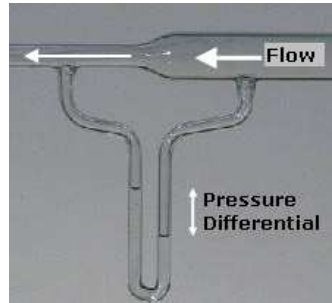
$$\iff p = p_0(C) - \rho g z - \rho \frac{\bar{v}^2}{2}$$

« effet Bernoulli » : sur vitesse $\|\bar{v}\| \uparrow \iff$ dépression $p \downarrow$.

Application : tube-débitmètre de Venturi



[Endress+Hauser]



[Wikipedia Bernoulli's principle]

Dynamique de la vorticité- Écoulem^{ts} irrotationnels et potentiels

$$\overline{(\text{Euler})} \iff \rho \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\nabla} \left(\rho \frac{\bar{\mathbf{v}}^2}{2} + \hat{p} \right) = \rho \bar{\mathbf{v}} \wedge \bar{\Omega}$$

Calcul tensoriel montre que

$$\overline{\text{rot}(\text{Euler})} \iff \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} = \overline{\text{rot}(\bar{\mathbf{v}} \wedge \bar{\Omega})} \iff \frac{d\bar{\Omega}}{dt} = \left(\overline{\bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\Omega}$$

Pas de mécanisme de création de vorticité en fluide parfait !

À $t = 0$, $\bar{\Omega} = \bar{\mathbf{0}}$ dans $D_0 \implies \forall t > 0$, $\bar{\Omega} = \bar{\mathbf{0}}$ dans D_t .

Écoulem^{ts} irrotationnels et potentiels

pas de rotation locale : $\forall t > 0$, $\overline{\text{rot} \bar{\mathbf{v}}} = \bar{\mathbf{0}}$ dans D_t

$\iff \exists \phi$ **potentiel des vitesses** t.q. $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\nabla} \phi$ dans D_t ,

à condition aussi que D_t soit simplement connexe.

Écoulem^{ts} irrotationnels et potentiels

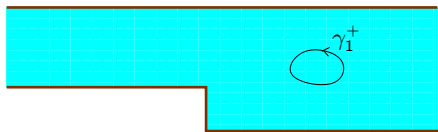
pas de rotation locale : $\forall t > 0$, $\overline{\text{rot}\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}}$ dans D_t

$\iff \exists \phi$ **potentiel des vitesses** t.q. $\overline{\mathbf{v}} = \overline{\nabla\phi}$ dans D_t ,

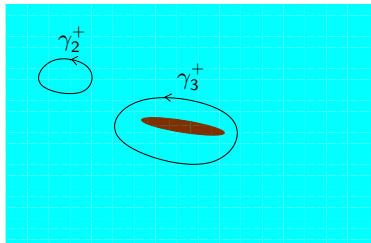
à condition aussi que D_t soit simplement connexe :

tout circuit orienté de D_t doit être déformable continuellement en 1 point, i.e., D_t ne contient aucun « trou » ou « obstacle ».

Ex. : écoulem^{ts} 2D dans canal avec marche descendante - autour d'aile d'avion :



D_t simplement connexe



D_t multiplement connexe

Démonstration du thm d'existence de potentiel (de Cauchy) :

poly 1A de Calcul Tensoriel sect^o 3.1.

Éléments de démonstration du thm d'existence de potentiel (de Cauchy) ou d'« équivalence » entre écoulements irrotationnels et potentiels

$\forall \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}})$ de classe C^1 sur D_t simplement connexe,

pas de rotation locale : $\overline{\text{rot}} \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}$ dans D_t

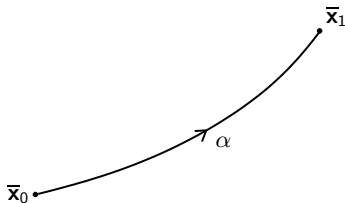
$\iff \exists \phi(\bar{\mathbf{x}})$ **potentiel des vitesses** t.q. $\bar{\mathbf{v}} = \overline{\nabla}_{\mathbf{x}} \phi$ dans D_t .

\Leftarrow : Ex. 2.3 de Calcul Tensoriel (thm de Schwarz).

\Rightarrow : Choisir $\bar{\mathbf{x}}_0$ dans D_t et poser $\forall \bar{\mathbf{x}}_1 \in D_t$,

$$\phi(\bar{\mathbf{x}}_1) = \int_{\alpha} \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot d\bar{\mathbf{x}} = \int_0^1 \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}(t)) \cdot \bar{\mathbf{x}}'(t) dt$$

avec α chemin régulier reliant $\bar{\mathbf{x}}_0$ à $\bar{\mathbf{x}}_1$, paramétré par $t \in [0,1] \mapsto \bar{\mathbf{x}}(t) \dots$



2^d théorème de Bernoulli

Dans un écoulement potentiel l'équation d'Euler s'écrit

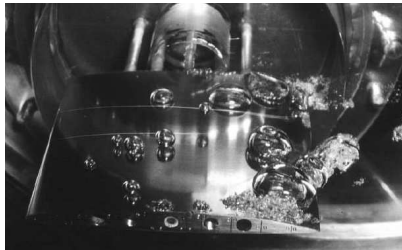
$$\rho \left[\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right] = - \nabla \hat{p}$$

$$\iff \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{\hat{p}}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{\partial \phi}{\partial t} + gH$$

est indépendant de \bar{x} .

Ex. d'application :

Pb. 3.6 Modélisation de phénomènes en lien avec la cavitation.



[Franc 2006]

2^d théorème de Bernoulli

Dans un écoulement potentiel l'équation d'Euler s'écrit

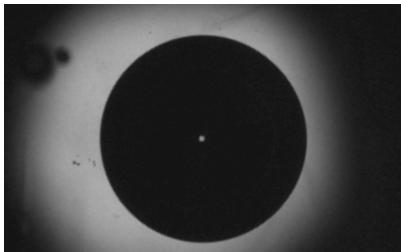
$$\rho \left[\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right] = - \nabla \hat{p}$$

$$\iff \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{\hat{p}}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{\partial \phi}{\partial t} + gH$$

est indépendant de \bar{x} .

Ex. d'application :

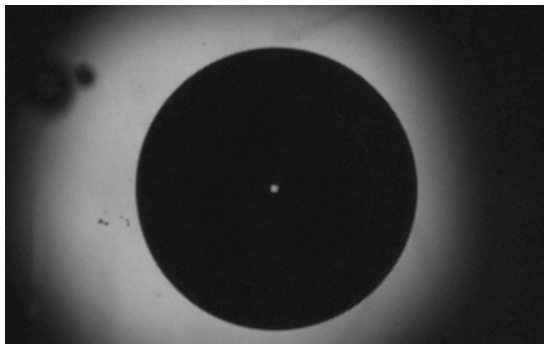
Pb. 3.6 Modélisation de phénomènes en lien avec la cavitation.



[Michel, Farhat & Supponen
 2016 Projet EPFL - LMH]

2^d théorème de Bernoulli - Application à la cavitation

Cf. le projet de semestre de Théo Michel réalisé à l'EPFL au LMH en 2016, sous la direction de M. Farhat & Supponen :



- Écoulement fortement instationnaire \Rightarrow modèle du fluide parfait pertinent !
- Si vous voulez aller à l'EPFL (ou KIT) en S8, manifestez-vous d'ici vendredi 13h !

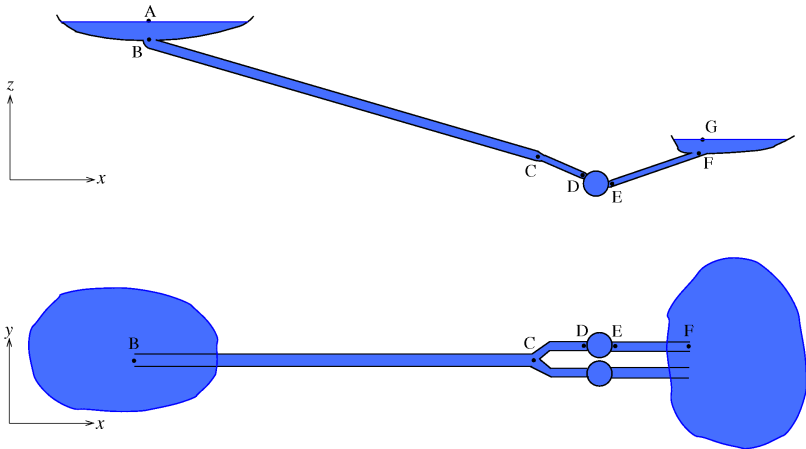
TD : Pb. 7.6 de MMCSF : Stat^o de Transfert d'Énergie par Pompage

Vue aérienne de la STEP de Revin (Ardennes) photo Airdiasol pour EDF :



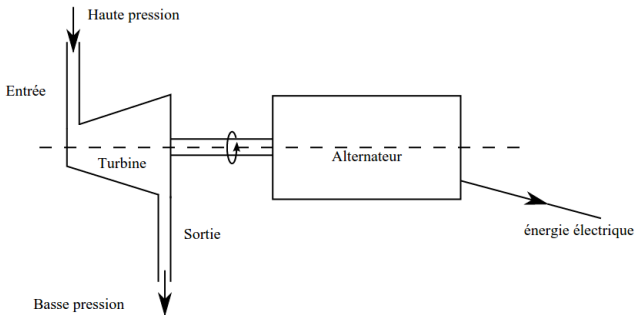
TD : Pb. 7.6 de MMCSF : Stat^o de Transfert d'Énergie par Pompage

Schéma de principe d'une STEP à 2 groupes turbines-pompes (disques) :



En haut : vue de côté ; en bas : vue par dessus.

Perte de charge et puissance dans une turbine (+ alternateur)



[M0tty - Wikipedia]

$$0 \simeq \dot{m}g (H_e - H_s) + P_{\text{turbine} \rightarrow \text{liquide}} - 0$$

$$P_{\text{turbine}} \simeq \dot{m}g (H_e - H_s) = \dot{m}g H_n$$

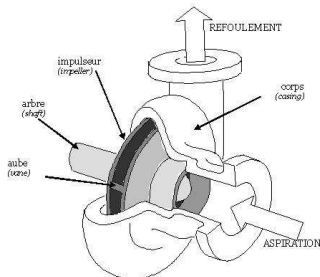
$$P_{\text{turbine}} \simeq \dot{m}g (H_e - H_s) = \dot{m}g H_n$$

\implies

$$P_{\text{élect. produite}} \simeq r \dot{m}g H_n$$

avec $r = \text{rendement du groupe turbine - alternateur} \simeq 0,87$.

Gain de charge, pression et puissance dans une pompe (+ moteur)



Pompe centrifuge
 [LEMEN - Wikipedia]

$$0 \simeq \dot{m}g (H_e - H_s) + P_{\text{pompe} \rightarrow \text{liquide}} - 0$$

$$P_{\text{pompe}} \simeq \dot{m}g (H_s - H_e) = \dot{m}g H_p \quad \text{avec } H_p \text{ la hauteur manométrique}$$

$$\boxed{P_{\text{pompe}} = \dot{m}g H_p = q(p_s - p_e)} \quad \iff \quad \boxed{p_s - p_e = \rho g H_p}$$

$$\implies \boxed{P_{\text{élect. consommée}} \simeq \dot{m}g H_p / r'}$$

avec $r' = \text{rendement du groupe moteur - pompe} \simeq 0,90$.

TD : Pb. 7.6 de MMCSF : Stat^o de Transfert d'Énergie par Pompage

Q.10 Rendement si l'eau était fluide parfait, en l'absence de dissipation ?

Puissance électrique en **production**

$$P_{e1} = r \rho Q_1 g H_n \simeq r \rho \frac{\mathcal{V}_{\text{bassin}}}{T_{\text{prod}}} g \delta z$$

⇒ énergie électrique produite

$$E_1 = P_{e1} T_{\text{prod}} \simeq r \rho \mathcal{V}_{\text{bassin}} g \delta z .$$

Puissance électrique consommée en **pompage**

$$P_{e2} = \frac{1}{r'} \rho Q_2 g H_p \simeq \frac{1}{r'} \rho \frac{\mathcal{V}_{\text{bassin}}}{T_{\text{pomp}}} g \delta z .$$

⇒ énergie électrique consommée

$$E_2 = P_{e2} T_{\text{pomp}} \simeq \frac{1}{r'} \rho \mathcal{V}_{\text{bassin}} g \delta z .$$

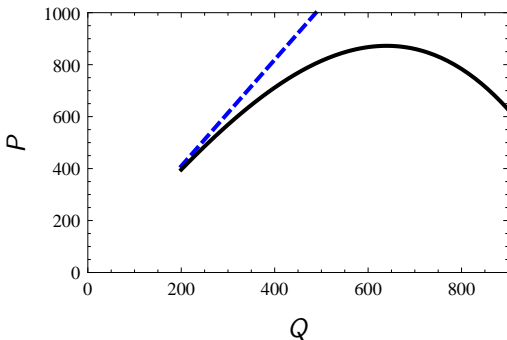
⇒ **rendement énergétique global maximum**

rendement max = $r r'$ produit des rendements des turbomachines $\simeq 78\%$.

TD : Pb. 7.6 de MMCSF : Stat^o de Transfert d'Énergie par Pompage

Q.11 Puissance théorique en fonction du débit total Q :

$$P = r \rho Q g \delta z - \frac{8}{\pi^2} \frac{r \rho}{D^4} Q^3 \left[\frac{L}{D} \lambda_p(Q) + 8 \frac{l}{D} \lambda_s(Q) \right].$$

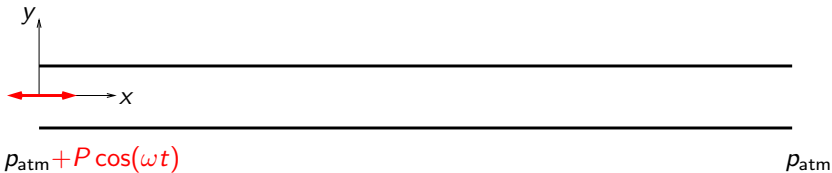


Mathematica \rightarrow $\max P = 873 \text{ MW}$ pour $Q = Q_{\text{opt}} = 639 \text{ m}^3/\text{s}$.

Attention pb machines,

cf. le module *Turbomachines - Énergies fluides* de M. Jenny au S8 !

TD : Pb. 3.1 de MF Écoulements oscillants en canal plan, faisant le lien fluides parfaits - fluides visqueux



Incompressibilité \implies pas d'ondes acoustiques

\implies oscillations de pression se propagent « instantanément » dans la direct^o x

\implies
$$\bar{\mathbf{v}} = v(y,t) \bar{\mathbf{e}}_x$$