

Séance 2 de Mécanique des fluides

E. Plaut

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mf>

- 1 Retour sur certaines bases vues en séance 1
- 2 Équation de Navier-Stokes
- 3 Retour sur le calcul tensoriel en coordonnées cylindriques

Sur l'ex. 1.4 *Écoulement laminaire en tuyau*, objet du TD !..

1 Bases : bilans de masse - formule de transport

Bilan global

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho \, d^3x = \iiint_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{\mathbf{v}}) \right] d^3x = 0$$

et local

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{\mathbf{v}}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0}$$

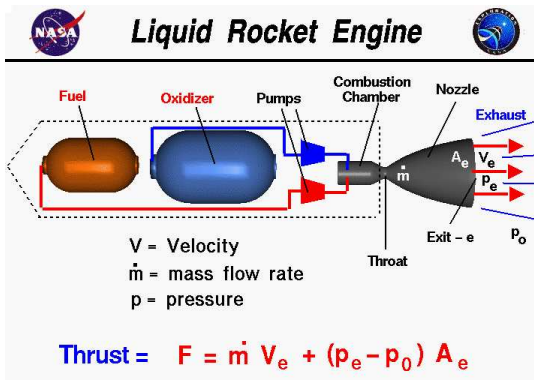
⇒ formule de transport d'1 quantité définie par densité massique

$$E = \iiint_{\Omega_t} \rho e \, d^3x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dE}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{de}{dt} \, d^3x}$$

1 Bases : bilan global de quantité de mouvement

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho\bar{\mathbf{v}})}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \rho\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S = \sum \bar{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$$

cf. ex. 1.1 Poussée d'un moteur fusée :



1 Bases : bilans dynamiques

Bilan global

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \bar{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S$$

et local

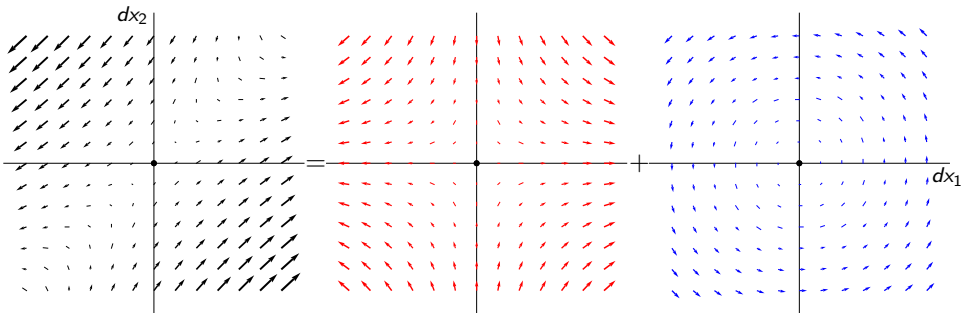
$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \bar{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} + \overline{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

1 Bases : loi de comportement d'un fluide newtonien incompressible

$$\overline{\sigma} = -p\overline{\mathbf{1}} + \overline{\tau} \quad \text{avec} \quad \overline{\tau} = \text{tenseur des contraintes visqueuses} = 2\eta\overline{\mathbf{D}}$$

Interprétation des **contraintes visqueuses** : analyse locale du champ de vitesse :

$$d\overline{\mathbf{v}} = \overline{\nabla} \overline{\mathbf{v}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} = \underbrace{\overline{\mathbf{D}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}}_{d\overline{\mathbf{v}}_{\text{déf}}} + \underbrace{\overline{\boldsymbol{\Omega}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}}_{d\overline{\mathbf{v}}_{\text{rot}}}$$



Donc sur une coupe virtuelle cercle - sphère centrée sur le point analysé :

$$\overline{\mathbf{n}} = \frac{d\overline{\mathbf{x}}}{\|d\overline{\mathbf{x}}\|} \implies \overline{\mathbf{T}}_{\text{visqueuses}} = \overline{\tau} \cdot \overline{\mathbf{n}} = \frac{2\eta d\overline{\mathbf{v}}_{\text{déf}}}{\|d\overline{\mathbf{x}}\|}$$

2 Équat^o de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible

$$\boxed{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} + \overline{\mathbf{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -p \bar{\mathbf{1}} + 2\eta \bar{\mathbf{D}}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} - \bar{\nabla} p + \eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}}}$$

Cas d'un fluide newtonien **compressible** : cf. poly !..

2 Équat^o de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} - \bar{\nabla} p + \eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}} \quad \text{et} \quad \hat{p} = \text{pression motrice} = p + \rho g z$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt}}_{\text{termes inertiels}} = \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = \underbrace{-\bar{\nabla} \hat{p}}_{\text{terme de pression}} + \underbrace{\eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}}}_{\text{terme visqueux}}$$

Équation d'ordre 2 en espace : condition limite à une paroi :

$$\text{adhérence à la paroi : } \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{v}}_{\text{paroi}}(\bar{\mathbf{x}}, t) .$$

Équation scalaire : équation d'incompressibilité :

$$\text{div} \bar{\mathbf{v}} = 0$$

Condition limite associée à la pression :

$$p(\bar{\mathbf{x}}, t) = p_{\text{donnée}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \quad \text{en} \quad \bar{\mathbf{x}} \text{ point du bord.}$$

2 Équat^o de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible

$$\underbrace{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt}}_{\text{termes inertiels}} = \rho \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\nabla \mathbf{v}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = \underbrace{-\overline{\nabla \hat{p}}}_{\text{terme de pression}} + \underbrace{\eta \overline{\Delta \mathbf{v}}}_{\text{terme visqueux}}$$

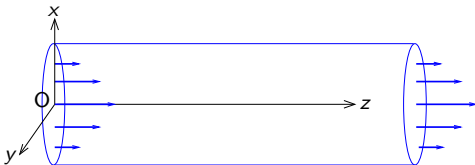
$$\text{Nombre de Reynolds} = Re = \frac{\rho \left(\overline{\nabla \mathbf{v}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}}}{\eta \overline{\Delta \mathbf{v}}} = \frac{t_{\text{visqueux}}}{t_{\text{advection}}} = \frac{\ell^2 / \nu}{\ell / V} = \frac{V \ell}{\nu}$$

- $Re \gg 1 \iff t_{\text{visqueux}} \gg t_{\text{advection}}$
 \iff effets d'advection dominant \iff termes inertiels dominant :
 fluides parfaits (chap. 3)
 ou écoulements turbulents aux grandes échelles (chap. 6)
- $Re \ll 1 \iff t_{\text{visqueux}} \ll t_{\text{advection}}$
 \iff effets visqueux dominant \iff termes visqueux dominant :
 écoulements de Stokes (chap. 4)

3 Équation de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques ?

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = - \nabla \hat{p} + \eta \overline{\Delta \bar{\mathbf{v}}}$$

Exemple : écoulement laminaire dans un tuyau (ex. 1.4) :

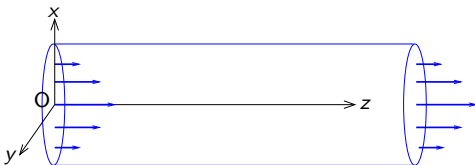


Par symétries : $\bar{\mathbf{v}} = v(r) \bar{\mathbf{e}}_z \dots$

TD : Ex. 1.4 : Éléments de solution

Bilan de quantité de mouvement pour un écoulement laminaire en tuyau :

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho\bar{\mathbf{v}})}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \rho\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S = \sum \bar{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$$



$$\bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{F}}_{\text{pressions entrée sortie}} + \bar{\mathbf{F}}_{\text{frottements visqueux latéraux}}$$

$$\iff \delta p \pi a^2 = GL \pi a^2 = \tau_p 2\pi aL$$

$$\iff \tau_p = G \frac{a}{2}$$