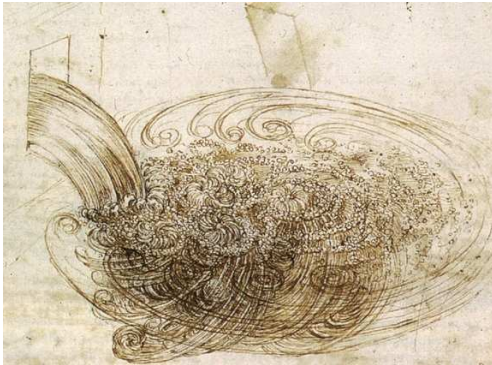


## Séance 14 de MF : Écoulements **turbulents**

### 1 Généralités

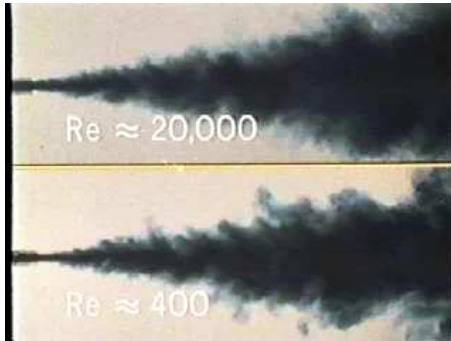


### 2 Échelles caractéristiques et cascade de Kolmogorov

### 3 Équations de Reynolds. Modèles de fermeture

# Écoulement turbulent $\simeq$ écoulement « agité » et « mélangeant », par opposition à écoulement laminaire

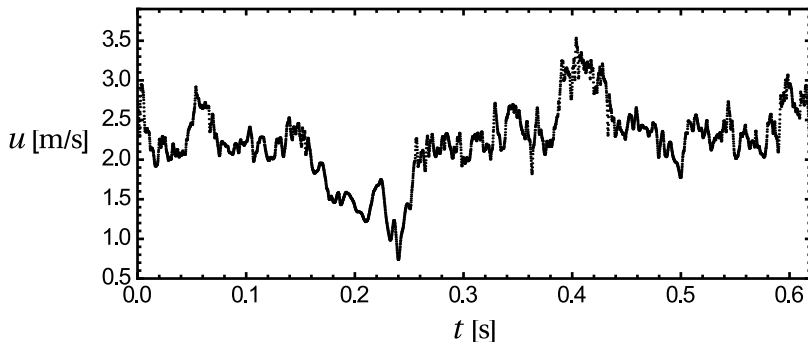
Exemple : écoulements de jet, à deux nombres de Reynolds différents :



[ DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004, CUP ]

## Écoulement turbulent $\simeq$ écoulement « agité » et « mélangeant », par opposition à écoulement laminaire

Exemple : écoulement de jet d'air dans air, mesure de vitesse par 'hot wire' :

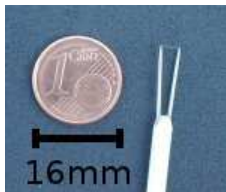


[ Renner, Peinke & Friedrich 2001 *J. Fluid Mech.* ]

NB : fréquence d'acquisition élevée : 8 kHz i.e., entre 2 mesures,  $\delta t = 0,25$  ms.

## Hot wire = fil chaud

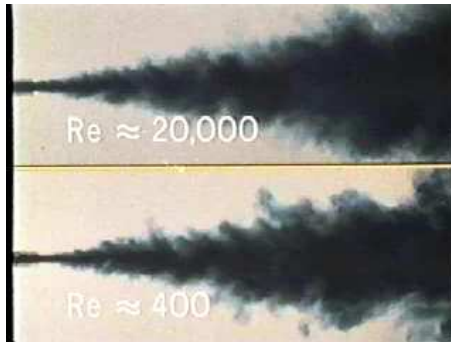
On chauffe un fil métallique en y faisant traverser un courant électrique. La résistance électrique augmente avec la température. Le fil est refroidi par le vent. Plus le vent souffle fort, plus le fil est refroidi et plus la résistance électrique diminue...



[ Wikipedia... ]

## Écoulement turbulent $\simeq$ écoulement « agité » et « mélangeant », par opposition à écoulement laminaire

Exemple : écoulements de jet, à deux nombres de Reynolds différents :



[ DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004, CUP ]

Ils semblent « **similaires** » : cela suggère l'existence de lois générales.

## Traits distinctifs de l'agitation turbulente :

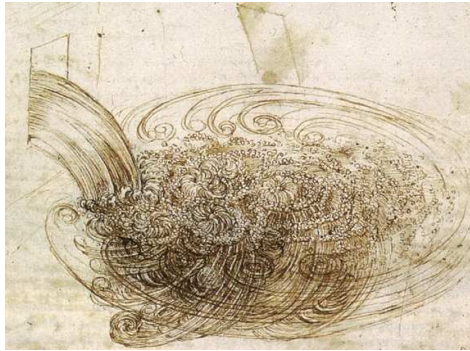
- Taille supra-moléculaire
- Comportement aléatoire ou chaotique
- Grande richesse spectrale : nombre de modes infini
- Structure 3D
- Dynamique tourbillonnaire
- Dynamique non linéaire
- Énergétique dissipative

## Définition :

La turbulence est un mode naturel d'écoulement d'un fluide visqueux où des mécanismes internes d'échange d'énergie assurent la création et le maintien de toute une hiérarchie de mouvements chaotiques répartis continûment sur une large gamme d'échelles.

[ Chassaing 2000*b* Turbulence en mécanique des fluides ]

## Approche de Vinci Reynolds



*'the water has eddying motions,  
one part of which is due to the principal current,  
the other to random and reverse motion'*

Décomposition en champ moyen + **fluctuations** :

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{v}}', \quad p = P + p'.$$

## Échelles caractéristiques

### Cascade de Kolmogorov en turbulence homogène et isotrope

Macro-échelles, celles des plus grands tourbillons turbulents :  $\ell$ ,  $\nu$  :

$$\frac{L}{V} \sim \frac{\ell}{\nu},$$

$$Re_\ell = \frac{\nu \ell}{\nu} \gg 1.$$

Échelles de Kolmogorov, celles des plus petits tourbillons turbulents :  $\ell_K$ ,  $\nu_K$  :

$$Re_K = \frac{\nu_K \ell_K}{\nu} \simeq 1.$$

Puissance injectée = **taux de dissipation moyen**,

transmis dans la cascade inertielle, **dissipé à l'échelle de Kolmogorov** :

$$\epsilon = \frac{1}{m} \frac{dE_c}{dt} \sim \frac{\nu^3}{\ell} \sim \dots \sim \frac{\nu_K^3}{\ell_K} = \frac{P_{\text{dissipée}}}{m} = 2\nu \langle \overline{\mathbf{D}'} : \overline{\mathbf{D}'} \rangle \sim \nu \left( \frac{\nu_K}{\ell_K} \right)^2.$$

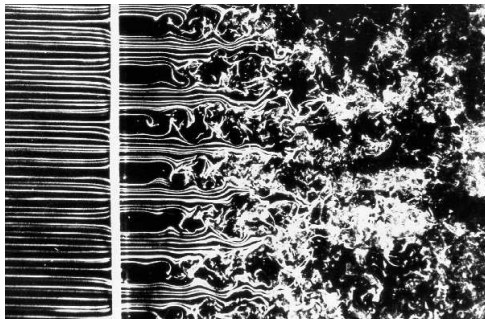


## Test de la loi d'échelle inertielle pour la dissipation

Pour valider  $\epsilon = 2\nu \langle \overline{\mathbf{D}' : \mathbf{D}'} \rangle = c_\epsilon v^3 / \ell$  on crée de la turbulence « de grille » en souffleries :

The majority of data is acquired in a simple inexpensive geometry, which we call a NORMAN grid, that “stirs” vigorously on large scales. The geometry is composed of a perforated plate superimposed over a bi-plane grid of square rods. Further details of the geometry and the resulting flow will be described elsewhere and only a brief description of the experimental setup is given here. In order to span a large  $R_\lambda$  range, two wind tunnels are used. The first grid, hereafter

[ Pearson et al. 2002 Measurements of the turbulent energy dissipation rate. *Phys. Fluids* ]



[ Nagib web page, FDRC, IIT ]

## Test de la loi d'échelle inertielle pour la dissipation

Pour valider  $\epsilon = 2\nu \langle \overline{\mathbf{D}'} : \overline{\mathbf{D}'} \rangle = c_\epsilon v^3/\ell$  on crée de la turbulence « de grille » en souffleries, et on fait des mesures avec un anémomètre à fil chaud :

All data are acquired using the constant temperature anemometry (CTA) hot-wire technique with a single-wire probe made of 1.27  $\mu\text{m}$  diameter Wollaston (Pt-10% Rh) wire. The instantaneous bridge voltage is buck-and-gained and the amplified signals are low-pass filtered  $f_{lp}$  with the sampling frequency  $f_s$  always at least twice  $f_{lp}$ . The resulting signal is recorded with 12-bit resolution and for the  $N1$  data reduced velocities are saved with 13-bit resolution.

[ Pearson et al. 2002 Measurements of the turbulent energy dissipation rate. *Phys. Fluids* ]

## Test de la loi d'échelle inertielle pour la dissipation

Pour tester que  $\epsilon = 2\nu \langle \overline{\mathbf{D}'} : \overline{\mathbf{D}'} \rangle = c_\epsilon \nu^3 / \ell$  on mesure  $C_\epsilon = \epsilon \ell / \nu^3$ , pour cela  $\epsilon$ , en utilisant l'hypothèse de Taylor... et la formule de l'exercice 6.3 !..

saved with 13-bit resolution. Throughout this work, time differences  $\tau$  and frequencies  $f$  are converted to streamwise distance ( $\equiv \tau U$ ) and one-dimensional longitudinal wave number  $k_1$  ( $\equiv 2\pi f/U$ ), respectively, using Taylor's hypothesis. The mean dissipation rate  $\langle \epsilon \rangle$  is estimated assuming isotropy of the velocity derivatives, i.e.,  $\langle \epsilon \rangle \equiv \epsilon_{\text{iso}} = 15\nu \langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle$ . We estimate  $\langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle$  from  $\phi_u(k_1)$  [the one-dimensional energy spectrum of  $u$  such that  $\langle u^2 \rangle = \int_0^\infty \phi_u(k_1) dk_1$  and  $\langle (\partial u / \partial x)^2 \rangle = \int_0^\infty k_1^2 \phi_u(k_1) dk_1$ ].

## Test de la loi d'échelle inertielle pour la dissipation

Pour tester que  $\epsilon = 2\nu \langle \overline{\mathbf{D}'} : \overline{\mathbf{D}'} \rangle = c_\epsilon \nu^3 / \ell$  on mesure  $C_\epsilon = \epsilon \ell / \nu^3$ , pour cela  $\ell$  ;

1<sup>er</sup> choix possible pour  $\ell$  : the streamwise integral length-scale  $L_u$

computed from the streamwise autocorrelation function  $\rho_{uu}(\tau)$  [ $L_u$  is defined as the area under the corresponding autocorrelation function  $\rho_{uu}(\tau)$  such that  $L_u = U \int_0^{\tau_0} \rho_{uu}(\tau) d\tau$  with time  $\tau_0$  chosen as the first zero-crossing] and a plausible surrogate for relation (1) is

$$C_\epsilon^u = \epsilon_{\text{iso}} L_u / \langle u^2 \rangle^{3/2}. \quad (3)$$

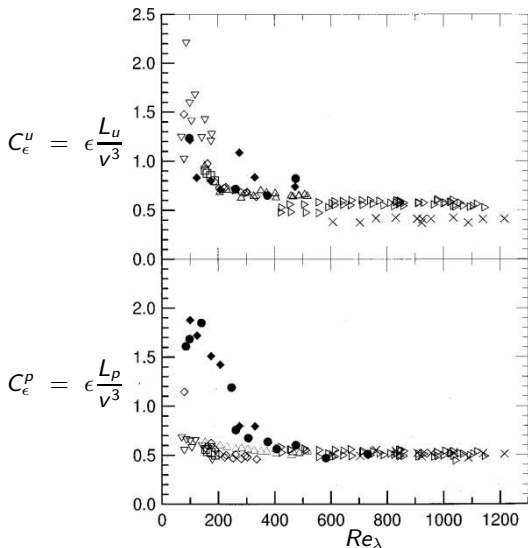
2<sup>ème</sup> choix possible pour  $\ell$  : the predominant energy scale  $L_p$

that follows directly from the spectrum  $\phi_u(k_1)$ . The length scale  $L_p$  is estimated from the wave number  $k_{1,p}$  at which a peak in the compensated spectrum  $k_1 \phi_u(k_1)$  occurs, i.e.,  $L_p = 1/k_{1,p}$ . A second suitable surrogate for relation (1) is

$$C_\epsilon^p = \epsilon_{\text{iso}} L_p / \langle u^2 \rangle^{3/2}. \quad (4)$$

## Test de la loi d'échelle inertielle pour la dissipation

Pour tester que  $\epsilon = c_\epsilon v^3 / \ell$  on mesure  $C_\epsilon = \epsilon \ell / v^3$  en fonction de  $Re_\lambda = Re_\ell^{1/2}$  :



## Échelles caractéristiques

### Cascade de Kolmogorov en turbulence homogène et isotrope

Macro-échelles, celles des plus grands tourbillons turbulents :  $l, \nu$  :

$$\frac{L}{V} \sim \frac{l}{\nu},$$

$$Re_l = \frac{\nu l}{\nu} \gg 1.$$

Échelles de Kolmogorov, celles des plus petits tourbillons turbulents :  $l_K, \nu_K$  :

$$Re_K = \frac{\nu_K l_K}{\nu} \simeq 1.$$

Puissance injectée = **taux de dissipation moyen**, transmis dans la cascade inertielle, dissipé à l'échelle de Kolmogorov :

$$\epsilon = \frac{1}{m} \frac{dE_c}{dt} \sim \frac{\nu^3}{l} \sim \dots \sim \frac{\nu_K^3}{l_K} = \frac{P_{\text{dissipée}}}{m} = 2\nu \langle \overline{\mathbf{D}'} : \overline{\mathbf{D}'} \rangle \sim \nu \left( \frac{\nu_K}{l_K} \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{l_K \simeq \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \simeq l Re_l^{-3/4} \ll l} \quad \text{et} \quad \boxed{\nu_K \simeq \nu Re_l^{-1/4}}.$$

## Cascade inertielle d'énergie de Kolmogorov

Énergie cinétique turb. massique

$$k(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} \langle \bar{\mathbf{v}}'(\bar{\mathbf{x}}, t) \cdot \bar{\mathbf{v}}'(\bar{\mathbf{x}}, t) \rangle$$

Turb. homogène stationnaire

$$k(\bar{\mathbf{x}}, t) = k(\bar{\mathbf{0}}, 0) = k$$

Turb. isotrope

$$k = \int_0^{+\infty} E(q) dq$$

$$q = \|\bar{\mathbf{q}}\|$$

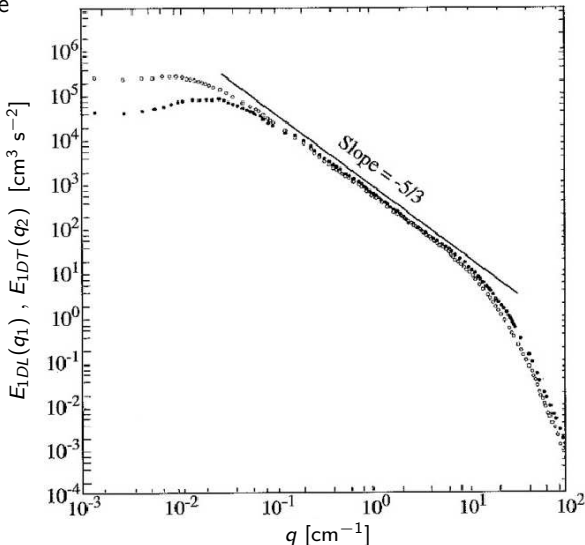
$\bar{\mathbf{q}}$  vecteur d'onde des fluct.

Densité spectrale d'énergie

$$E(q) = f(q, \epsilon)$$

$$E(q) = \pi_0 \epsilon^\alpha q^\beta$$

$$E(q) = \pi_0 \epsilon^{2/3} q^{-5/3}$$

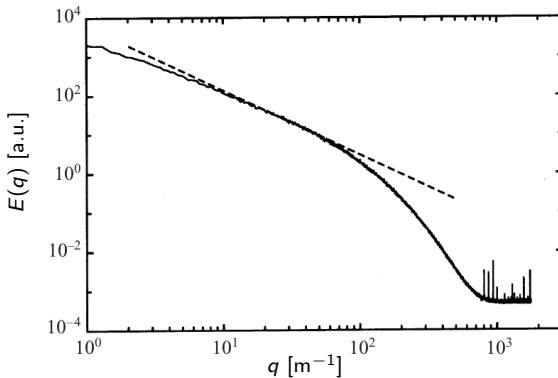


[ Champagne 1978 *JFM* - Frisch 1995 *Turbulence*. CUP ]

## Cascade inertielle d'énergie de Kolmogorov

$$E(q) = \pi_0 \epsilon^{2/3} q^{-5/3}$$

Autre exemple : avec les données de jet déjà montrées :



[ Renner, Peinke & Friedrich 2001 *J. Fluid Mech.* ]



## Approche de Reynolds

Décomposition en **champs moyens**  $\bar{\mathbf{v}} = \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle$ ,  $P = \langle p \rangle$  + **fluctuations** :

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{v}}', \quad p = P + p'$$

Équations de Reynolds :  $\text{div} \bar{\mathbf{V}} = 0$ , (1)

$$\rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \left( \overline{\bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{V}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}} \right] = - \bar{\nabla} \hat{P} + \eta \overline{\Delta \bar{\mathbf{V}}} + \overline{\text{div}(\bar{\bar{\tau}}^t)}. \quad (2)$$

**Tenseur de Reynolds** :  $\bar{\bar{\tau}}^t = -\rho \langle \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{v}}' \rangle$ .

Modèle de Boussinesq :

$$\bar{\bar{\tau}}^t = \bar{\bar{\tau}}_{\text{iso}}^t + \bar{\bar{\tau}}_{\text{défmoy}}^t = -\frac{2}{3} \rho k \bar{\mathbf{1}} + 2\eta^t \bar{\bar{\mathbf{D}}}(\bar{\mathbf{V}})$$

$$\Rightarrow \rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \left( \overline{\bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{V}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}} \right] = - \bar{\nabla} \hat{P} - \frac{2}{3} \rho \bar{\nabla} k + 2 \overline{\text{div}} \left[ (\eta + \eta^t) \bar{\bar{\mathbf{D}}}(\bar{\mathbf{V}}) \right]. \quad (2')$$

La **dispersion turbulente** ( $\eta^t$ ) augmente les effets de la diffusion moléculaire ( $\eta$ ).

## Approche de Reynolds

Décomposition en **champs moyens**  $\bar{\mathbf{V}} = \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle$ ,  $P = \langle p \rangle$  + **fluctuations** :

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{V}} + \bar{\mathbf{v}}', \quad p = P + p'$$

Équations de Reynolds :  $\text{div} \bar{\mathbf{V}} = 0$ , (1)

$$\rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \left( \overline{\bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{V}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}} \right] = - \bar{\nabla} \hat{P} + \eta \overline{\Delta \bar{\mathbf{V}}} + \overline{\text{div}(\bar{\bar{\tau}}^t)}. \quad (2)$$

**Tenseur de Reynolds** :  $\bar{\bar{\tau}}^t = -\rho \langle \bar{\mathbf{v}}' \otimes \bar{\mathbf{v}}' \rangle$ .

Modèle de Boussinesq :

$$\bar{\bar{\tau}}^t = \bar{\bar{\tau}}_{\text{iso}}^t + \bar{\bar{\tau}}_{\text{défmoy}}^t = -\frac{2}{3} \rho k \bar{\mathbf{1}} + 2\eta^t \overline{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{V}})$$

$$\Rightarrow \rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + \left( \overline{\bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{V}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}} \right] = - \bar{\nabla} \hat{P} - \frac{2}{3} \rho \bar{\nabla} k + 2 \overline{\text{div}} \left[ (\eta + \eta^t) \overline{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{V}}) \right]. \quad (2')$$

Modèle de longueur de mélange de Prandtl si écoulement fortement cisailé :

$$\eta^t = \text{viscosité turbulente} = \rho \ell_m^2 \left| \partial V_1 / \partial x_2 \right|.$$

## TD

## Ex. 6.1 Ordres de grandeur en turbulence

## Ex. 6.3 Dissipations en turbulence homogène et isotrope

Dissipation turbulente massique locale :

$$\epsilon(\bar{\mathbf{x}}, t) = 2\nu \langle D'_{ij}(\bar{\mathbf{x}}, t) D'_{ij}(\bar{\mathbf{x}}, t) \rangle$$

Pseudo-dissipation turbulente massique locale :

$$\varepsilon(\bar{\mathbf{x}}, t) = \nu \left\langle \frac{\partial v'_i(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial x_j} \right\rangle$$

D'après l'ex. 6.2 (admis) :

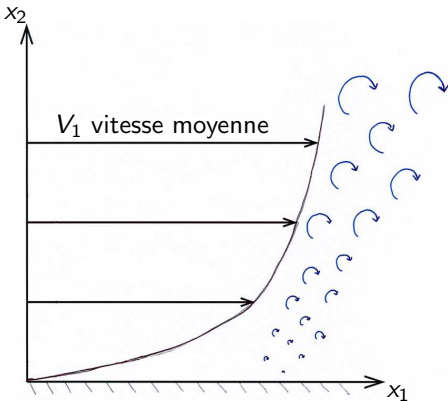
$$\epsilon - \varepsilon = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle v'_i \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right\rangle$$

Formule de Karman et Howarth :

$$\left\langle \left( \frac{\partial v'_1}{\partial x_2} \right)^2 \right\rangle = 2 \left\langle \left( \frac{\partial v'_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle .$$

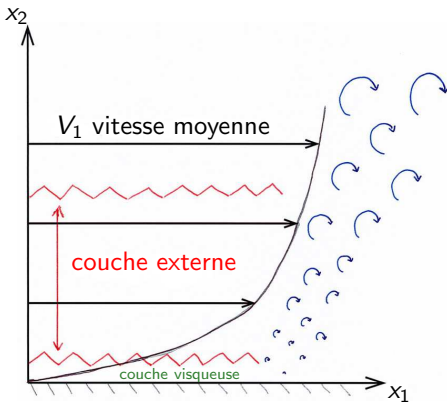
# TD

## Pb. 6.1 Modèle simplifié de turbulence en proche paroi



# TD

## Pb. 6.1 Modèle simplifié de turbulence en proche paroi



## Projets de département parcours Artem

- Catalogue, distribué aux 10 élèves concernés, en ligne en section 1.2 de la page 2A du département  
<http://energie.mines-nancy.univ-lorraine.fr/2A>
- 4 sujets proposés dont 1 sur la turbulence : les 10 élèves concernés prépareront la dernière séance de MF pour ce mercredi, afin d'anticiper la [séance de présentation des projets...](#)
- [RV ce mercredi à 14h ici même](#), à l'issue des présentations vous devrez former 2 trinômes et 2 binômes...