

Séance 11 de Mécanique des fluides

Écoulements de Stokes ou « écoulements dominés par la viscosité »

- Unicité
- Minimum de dissipation
- TD

Bilan du test 1 (cf. la page ARCHE)

Cours : écoulements de Stokes ou « rampants »

- **Effets visqueux** \gg effets inertiels : $t_{\text{visqueux}} \ll t_{\text{convectif}}, t_{\text{évolution}}$.
- Gouvernés par l'**équation de Stokes**

$$\boxed{\eta \overline{\Delta \mathbf{v}} = \overline{\nabla \hat{p}}} \quad \text{dans } D,$$

qui doit être munie de conditions limites de la forme

$$\overline{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{v}}^{\text{donnée}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{sur } \partial D, \quad p(\bar{\mathbf{x}}_b) = p^{\text{donnée}} \quad \text{en } \bar{\mathbf{x}}_b \in \partial D.$$

Attention on suppose toujours ici le fluide **incompressible**, donc

$$\text{div} \overline{\mathbf{v}} = 0 \quad \text{dans } D.$$

- **Linéarité** par rapport à $\overline{\nabla \hat{p}}$ et $\overline{\mathbf{v}}^{\text{donnée}}$
 \implies **réversibilité cinématique.**

Cours : écoulements de Stokes ou « rampants »

• Équation de Stokes

$$\boxed{\eta \overline{\Delta \mathbf{v}} = \overline{\nabla \hat{p}}} \quad \text{dans } D,$$

qui doit être munie de conditions limites de la forme

$$\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{v}}^{\text{donnée}}(\overline{\mathbf{x}}) \quad \text{sur } \partial D, \quad p(\overline{\mathbf{x}}_b) = p^{\text{donnée}} \quad \text{en } \overline{\mathbf{x}}_b \in \partial D.$$

(H) fluide **incompressible** $\text{div} \overline{\mathbf{v}} = 0$ dans D .

• **Unicité** de la solution.

Par différence, montrer que

$$\eta \overline{\Delta \mathbf{v}} = \overline{\nabla \hat{p}} \quad \text{dans } D, \quad (\overline{\mathbf{S}})$$

$$\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{0}} \quad \text{sur } \partial D, \quad p(\overline{\mathbf{x}}_b) = 0 \quad \text{en } \overline{\mathbf{x}}_b \in \partial D$$

$$\implies \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}} \quad \text{et } p = 0 \quad \text{dans } D.$$

1^{ère} étape :

$$\iiint_D (\overline{\mathbf{S}}) \cdot \overline{\mathbf{v}} \, d^3x \iff \eta \iiint_D (\overline{\Delta \mathbf{v}}) \cdot \overline{\mathbf{v}} \, d^3x = \iiint_D (\overline{\nabla \hat{p}}) \cdot \overline{\mathbf{v}} \, d^3x$$

Cours : écoulements de Stokes ou « rampants »

$$\boxed{\eta \overline{\Delta \mathbf{v}} = \overline{\nabla \hat{p}}} \quad \text{et} \quad \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans} \quad D,$$

$$\mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{v}^{\text{donnée}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{sur} \quad \partial D, \quad p(\bar{\mathbf{x}}_b) = p^{\text{donnée}} \quad \text{en} \quad \bar{\mathbf{x}}_b \in \partial D.$$

La loi du **minimum de dissipation** fait référence au bilan global d'énergie cinétique

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{volumique}} + P_{\text{surfaiques}} - P_{\text{dissipée}}}$$

$$E_c = \iiint_D \rho e_c \, d^3x, \quad \frac{dE_c}{dt} = \iiint_D \frac{\partial(\rho e_c)}{\partial t} \, d^3x + \iint_{\partial D} \rho e_c \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d^2S$$

$$P_{\text{volumique}} = \iiint_D \rho \bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{v} \, d^3x$$

$$P_{\text{surfaiques}} = \iint_{\partial D} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v} \, d^2S$$

$$P_{\text{dissipée}} = 2\eta \iiint_D \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}} \, d^3x \geq 0$$

Loi du minimum de dissipation

Si $\bar{\mathbf{v}}$ est solution du problème de Stokes

$$\boxed{\eta \Delta \bar{\mathbf{v}} = \nabla \hat{p}} \quad \text{et} \quad \text{div} \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad \text{dans} \quad D,$$

$$\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{v}}^{\text{donnée}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{sur} \quad \partial D,$$

$\bar{\mathbf{v}}'$ vérifie seulement $\text{div} \bar{\mathbf{v}}' = 0$ dans D
et les mêmes conditions limites

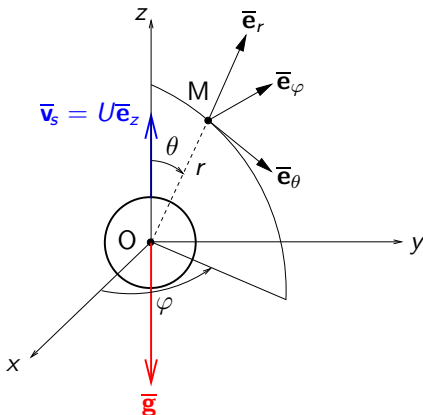
$$\bar{\mathbf{v}}'(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{v}}^{\text{donnée}}(\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{sur} \quad \partial D,$$

alors

$$P_{\text{dissipée}}(\bar{\mathbf{v}}) = 2\eta \iiint_D \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}} \, d^3x \leq P_{\text{dissipée}}(\bar{\mathbf{v}}') = 2\eta \iiint_D \bar{\mathbf{D}}' : \bar{\mathbf{D}}' \, d^3x.$$

- survit au cas de cond. lim. instationnaires (avec cond. sur $t_{\text{évolution}}$)
- pas valable en **écoulements turbulents** qui **dissipent beaucoup** !

TD : Pb. 4.1 : retour sur l'écoulement de Stokes autour d'une sphère dans le référentiel où le fluide est au repos à l'infini



$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{r \sin \theta} (\bar{\nabla} \psi) \wedge \bar{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \bar{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \bar{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\psi = f(r) g(\theta)$$

$$g(\theta) = \sin^2 \theta$$

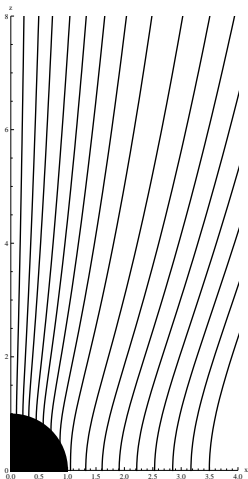
$$f(r) = \frac{Ua}{4} \left(3r - \frac{a^2}{r} \right)$$

Q 4 : lignes de courant ?

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \sin \theta = x/r = x/\sqrt{x^2 + z^2}$$

$$\hookrightarrow \psi = \psi(x, z) = \text{constante} \dots$$

TD : Pb. 4.1 : retour sur l'écoulement de Stokes autour d'une sphère dans le référentiel où le fluide est au repos à l'infini



$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{r \sin \theta} (\bar{\nabla} \psi) \wedge \bar{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \bar{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \bar{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\psi = f(r) g(\theta)$$

$$g(\theta) = \sin^2 \theta$$

$$f(r) = \frac{Ua}{4} \left(3r - \frac{a^2}{r} \right)$$

Q 5 : et dans le référentiel lié à la sphère ?

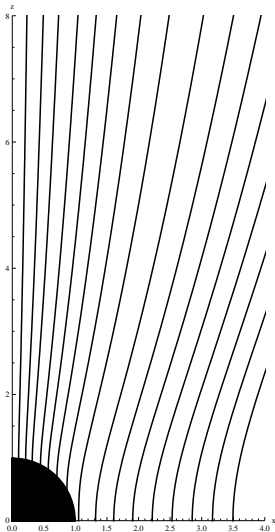
Composition des vitesses - loi de Galilée $\rightarrow \bar{\mathbf{v}}_r$

$$\hookrightarrow \psi_r = \psi_r(x, z) = \text{constante} \dots$$

TD : Pb. 4.1 : retour sur l'écoulement de Stokes autour d'une sphère

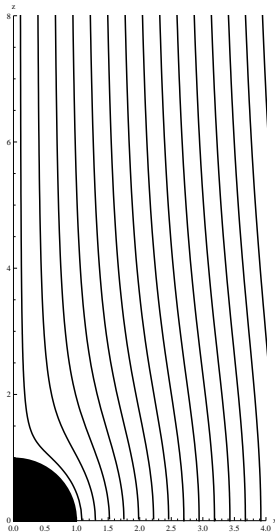
Réf. lié au fluide

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}} \text{ à l}'\infty$$

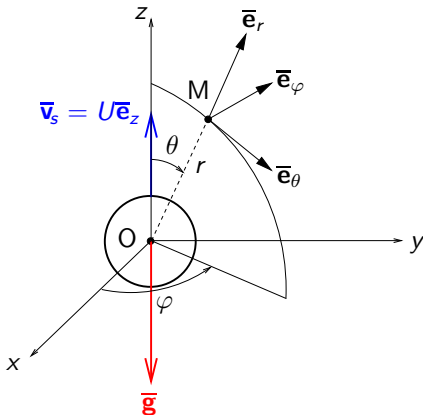


Réf. lié à la sphère

$$\bar{\mathbf{v}} = -U\bar{\mathbf{e}}_z \text{ à l}'\infty$$



TD : Pb. 4.1 : retour sur l'écoulement de Stokes autour d'une sphère dans le référentiel où le fluide est au repos à l'infini



$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{r \sin \theta} (\bar{\nabla} \psi) \wedge \bar{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \bar{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \bar{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\psi = f(r) g(\theta)$$

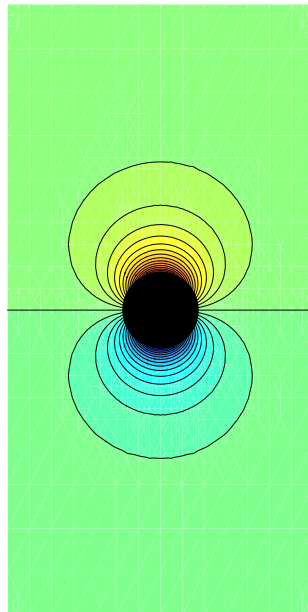
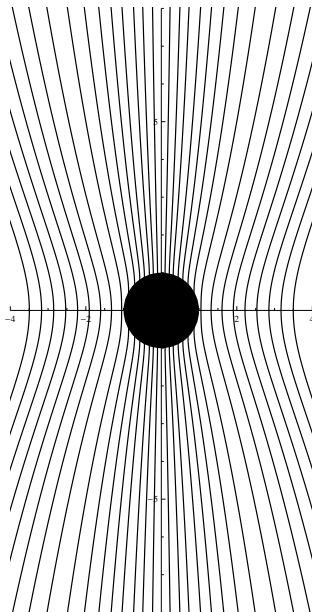
$$g(\theta) = \sin^2 \theta$$

$$f(r) = \frac{Ua}{4} \left(3r - \frac{a^2}{r} \right)$$

Q 6-11 : étudiez la **dynamique** de ce problème...

Lignes de courant

Champ de pression motrice



Formule de Stokes :

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{Stokes}} = \underbrace{\bar{\mathbf{F}}_{\alpha}}_{\text{traînée de pression}} + \underbrace{\bar{\mathbf{F}}_{\gamma}}_{\text{traînée de frottement}} = - \underbrace{6\pi}_{\text{mobilité}} \eta a \bar{\mathbf{v}}_s$$

Application à la sédimentation : bilan de forces :

$$\bar{\mathbf{0}} = \rho_{\text{objet}} \mathcal{V}_{\text{objet}} \bar{\mathbf{g}} + \rho_{\text{fluide}} \mathcal{V}_{\text{objet}} (-\bar{\mathbf{g}}) - 6\pi\eta a \bar{\mathbf{v}}_s$$

$$\rightarrow \text{vitesse de sédimentation} \quad \bar{\mathbf{v}}_s = \frac{2}{9} \frac{\rho_{\text{objet}} - \rho_{\text{fluide}}}{\eta} a^2 \bar{\mathbf{g}}$$



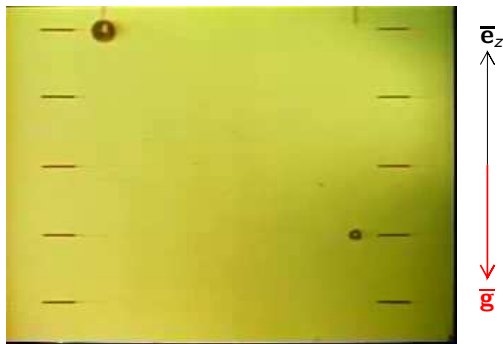
Formule de Stokes :

$$\bar{\mathbf{F}}_{\text{Stokes}} = \underbrace{\bar{\mathbf{F}}_{\alpha}}_{\text{traînée de pression}} + \underbrace{\bar{\mathbf{F}}_{\gamma}}_{\text{traînée de frottement}} = - \underbrace{6\pi}_{\text{mobilité}} \eta a \bar{\mathbf{v}}_s$$

Application à la sédimentation : bilan de forces :

$$\bar{\mathbf{0}} = \rho_{\text{objet}} \mathcal{V}_{\text{objet}} \bar{\mathbf{g}} + \rho_{\text{fluide}} \mathcal{V}_{\text{objet}} (-\bar{\mathbf{g}}) - 6\pi\eta a \bar{\mathbf{v}}_s$$

$$\rightarrow \text{vitesse de sédimentation} \quad \bar{\mathbf{v}}_s = \frac{2}{9} \frac{\rho_{\text{objet}} - \rho_{\text{fluide}}}{\eta} a^2 \bar{\mathbf{g}}$$



Consignes pour lundi 13 novembre

- Tout le monde apporte son **PC portable** avec **Mathematica**, car l'essentiel du TD se fera avec **Mathematica**
⇒ « réviser » les TP de rentrée **Mathematica**, la syntaxe de **Mathematica**, etc...