**Mines Nancy - Département Énergie - 2A - Module MF2 par E. Plaut**

**Test du 20 janvier 2021 - Durée 3 h**

Seul document autorisé : le polycopié de MF2 - Calculettes scientifiques autorisés

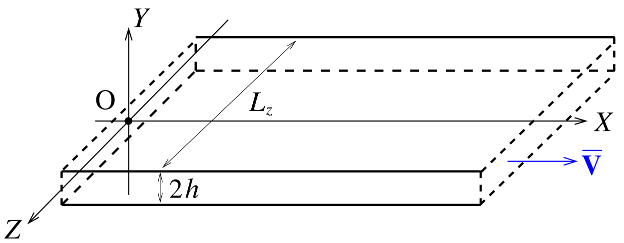
Barème indicatif :

| Question | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Total/31 | Total/20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Points | 1,5 | 6,5 | 8 | 2 | 2 | 3,5 | 1 | 3,5 | 3 | $N_b = 31$ | $N_f \simeq 0{,}7 N_b$ |

Veuillez ***rédiger avec soin et en langue française***. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques risque d'être considérée comme nulle.

**Problème : *Écoulements laminaires et turbulents en canal***

On étudie des ***écoulements établis*** d'un ***fluide newtonien incompressible*** de masse volumique $\rho$, viscosité dynamique (resp. cinématique) $\eta$ (resp. $\nu$). Ces écoulements ont lieu dans un ***canal plan*** contenant une zone d'intérêt de demi-épaisseur $h$, longueur $L_x \gg h$, largeur $L_z \gg h$, comme représenté ci-dessous :




Dans le repère cartésien $Ox_1x_2x_3 = OXYZ$, l'entrée (resp. sortie) du fluide se fait « loin » en amont (resp. aval) de $X = 0$ (resp. $L_x$), tandis que des parois fixes sont situées sur les frontières $Y = \pm h$, $Z = \pm L_z/2$. Dans le domaine

$$\Omega \;=\; \{(X,Y,Z) \in \,]0,L_x[\, \times \,]-h,h[\, \times \,]-L_z'/2,L_z'/2[\} \;, \tag{1}$$

avec $L_z' \simeq 0{,}8\; L_z$ , l'***écoulement*** est ***établi*** : le ***champ de vitesse laminaire complet ou turbulent moyen*** est de la forme

$$\overline{\mathbf{V}} \;=\; U(Y)\; \bar{\mathbf{e}}_X \;, \tag{2}$$

avec, par symétrie, $U$ fonction paire de $Y$. Dans tout le problème on étudie les écoulements dans ce domaine $\Omega$. On montrera par la suite, et on l'admet pour traiter la question 1, que la ***pression motrice*** dans le cas d'écoulements laminaires, ***pression motrice moyenne*** dans le cas d'écoulements turbulents, est de la forme

$$\widehat{p} \;=\; \widehat{p}(X,Y) \;=\; -GX \;+\; \pi(Y) \tag{3}$$

avec $G$ une constante qui ne dépend que de l'écoulement mais pas de la position, $\pi$ une fonction à préciser.

**1** On rappelle que l'équation (1.65) du cours donnant les ***pertes de charge*** $\delta H$ entre l'entrée et la sortie de $\Omega$ est valable en moyenne dans le cas turbulent, et donne bien la puissance dissipée dans l'écoulement, en moyenne dans le cas turbulent. On rappelle aussi que $\rho g\; \delta H = \delta\widehat{p}$ évalué aux parois soit $\widehat{p}(0,h) - \widehat{p}(L_x,h)$ ou $\widehat{p}(0,-h) - \widehat{p}(L_x,-h)$, avec $g$ l'accélération de la pesanteur.

**1.1** Expliquez pourquoi la connaissance de $\delta H$ importe, en imaginant par exemple, en terme d'application, que ce système est un modèle isotherme et très simplifié d'un élément d'un échangeur à plaques.

**1.2** On définit le ***coefficient de perte de charge*** $\lambda$ par analogie avec le cas du tuyau, suivant la formule

$$\delta H \;=\; \frac{V^2}{2g}\,\frac{L_x}{h}\,\lambda \tag{4}$$

avec $V$ la ***vitesse débitante*** à travers la section d'entrée de $\Omega$, soit l'intersection de $\partial\Omega$ avec le plan $X = 0$. Établissez les expressions de $G$ fonction de $\lambda$, $h$, $\rho$ et $V$ ; $\lambda$ fonction de $G$, $h$, $\rho$ et $V$.

**2.1** Dans le cas d'un ***écoulement laminaire établi***, explicitez les composantes de l'équation de Navier-Stokes, en travaillant en pression motrice, supposée maintenant de forme générale, $\widehat{p} = \widehat{p}(X,Y,Z)$. Démontrez que $\widehat{p}$ est bien de la forme (3) avec $\pi$ une constante.

**2.2** Calculez $U(Y)$, en faisant le lien entre la vitesse au centre $U_0 = U(0) > 0$ et la constante $G$. Montrez que $U_0$ est une fonction de $G$, $h$ et $\eta$, et interprétez physiquement l'influence de chacun des paramètres. Représentez enfin le champ de vitesse dans le plan $XOY$.

**2.3** Calculez la ***vitesse débitante*** $V$ à travers la section d'entrée de $\Omega$,

$$S \;=\; \{(Y,Z) \in \,]-h,h[\, \times \,]-L'_z/2,L'_z/2[\} \;. \tag{5}$$

Commentez l'expression de $V$ fonction de $U_0$ .

**2.4** Calculez le ***coefficient de perte de charge*** $\lambda$ en fonction du ***nombre de Reynolds***

$$\boxed{Re \;=\; Vh/\nu} \;. \tag{6}$$

Commentez.

---

On étudie maintenant des ***écoulements turbulents établis*** avec l'***approche de Reynolds-Boussinesq***. On note maintenant $\widehat{p}$ la ***pression motrice moyenne***, supposée au départ de la forme $\widehat{p} = \widehat{p}(X,Y,Z)$. On suppose par symétrie que l'***énergie cinétique turbulente moyenne*** et la ***viscosité dynamique turbulente*** sont des fonctions paires de $Y$ seulement,

$$k \;=\; k(Y) \;, \quad \eta^t = \eta^t(Y) \;. \tag{7}$$

**3.1** Explicitez les composantes de l'équation de Reynolds-Boussinesq en introduisant une ***pression motrice modifiée*** $P$, somme de $\widehat{p}$ et d'un terme proportionnel à $k$, de façon à faire disparaître $k$.

**3.2** Montrez que $\widehat{p}$ est de la forme donnée dans l'équation (3) avec $\pi$ une fonction bien définie. Interprétez physiquement la forme complète de l'expression de $\widehat{p}$.

**3.3** Établissez une équation liant $\eta$, $\eta^t$, $U'(Y)$, $Y$ et $G$ à une constante d'intégration $T_0$ . En utilisant une propriété de symétrie, montrez que cette constante d'intégration est nulle.

**3.4** Que vaut $\eta^t$ sur les parois situées en $Y = \pm h$ ? Notant $\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}(\overline{\mathbf{V}})$ le tenseur des contraintes visqueuses moyen, établissez par un calcul l'expression de la ***contrainte pariétale de frottement moyenne*** $\tau_p > 0$ exercée par le fluide sur la paroi « inférieure » $Y = -h$ ou « supérieure » $Y = h$. Montrez que $\tau_p$ est la même en ces deux parois, proportionnelle au produit $Gh$. Cette relation serait-elle aussi valable en écoulement laminaire ? Proposez-en, au moins dans un cas particulier, une interprétation physique.

**3.5** Déduisez de cela une expression de la ***vitesse de frottement*** $u_\tau = \sqrt{\tau_p/\rho}$ faisant intervenir $G$. En utilisant l'expression générale de $G$ en fonction de $\lambda$, $h$, $\rho$ et $V$ établie en question 1.2, établissez l'expression de $u_\tau$ en fonction de $\lambda$ et $V$. Commentez cette relation.

**4.1** Justifiez que dans la ***couche externe*** proche de la paroi « inférieure » $Y = -h$, où l'influence de la paroi existe encore, mais la turbulence joue un rôle dominant, on a

$$\eta^t \, U'(Y) \;=\; \tau_p \;. \tag{8}$$

**4.2** On utilise comme variable d'espace la distance à la paroi $y = h + Y$, i.e.

$$\text{on fait le changement de variable} \quad W(y) \;=\; U(y-h) \quad \Longleftrightarrow \quad U(Y) \;=\; W(h+Y) \;.$$

D'autre part on utilise le modèle de longueur de mélange de Prandtl pour estimer la viscosité turbulente, avec $\ell_m \;=\; \chi y$ où $\chi$ est la constante de Von Karman. Calculez $W(y)$ en faisant apparaître la vitesse réduite $W^+ \;=\; W/u_\tau$ et la distance à la paroi réduite $y^+ \;=\; yu_\tau/\nu$. Montrez que l'on obtient une ***loi de paroi*** identique à celle trouvée en couche limite ; vous l'écrirez sous la même forme en faisant apparaître la même constante additive $C$.

**5.1** Suivant Prandtl, on suppose que la ***loi turbulente*** trouvée précédemment pour $W^+$ est valable à haut nombre de Reynolds dans la quasi-totalité de la moitié « inférieure » du canal, définie par $y \in [0,h]$, en dehors d'une très fine couche visqueuse, puisqu'alors la couche externe s'« étend ». Donnez l'expression approximative correspondante de la ***vitesse réduite*** $U^+ = U/u_\tau$ en fonction de $y$ puis $\widetilde{y} = y/h$. Vous ferez apparaître le nombre de Reynolds construit sur la vitesse de frottement et la demi-hauteur

$$\boxed{Re_\tau \;=\; h^+ \;=\; hu_\tau/\nu} \;. \tag{9}$$

**5.2** Calculez d'après ce modèle, étendu par symétrie miroir sous $Y \mapsto -Y$, la vitesse débitante $V$ de l'écoulement à travers la surface $S$ (5), réduite en unités de $u_\tau$ , soit $V^+ = V/u_\tau$ .

*Indications* : par symétrie, travaillez sur $S' = \{(y,Z) \in ]0,h[ \times ] - L'_z/2,L'_z/2[\}$ ; faites apparaître

$$\int_0^1 \ln \widetilde{y} \; d\widetilde{y} \;=\; -1 \;;$$

établissez une expression de la forme $V^+ = V^+(h^+, \chi, C)$.

**6.1** Déduisez d'autre part des résultats de la question 3.5 l'expression de $V^+$ en fonction de $\lambda$, puis celle de $Re_\tau = h^+$ en fonction de $\lambda$ et du nombre de Reynolds $Re = Vh/\nu$,

$$V^+ \;=\; \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad Re_\tau \;=\; h^+ \;=\; \qquad\qquad . \tag{10}$$

Établissez enfin une ***relation de type Karman - Prandtl***

$$\boxed{1/\sqrt{\lambda} \;=\; \alpha \;\ln\left(Re\sqrt{\lambda}\right) \;+\; \beta} \;, \tag{11}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres fonctions des paramètres de la loi de paroi $\chi$ et $C$.

**6.2** En utilisant les valeurs mesurées dans l'***étude numérique*** de Eitel-Amor et al. (2014) en TD, $\chi = 0{,}4$ et $C = 5$, donnez les valeurs numériques prévues pour $\alpha$ et $\beta$.

**7** À partir de la loi trouvée question 5.1, calculez analytiquement la ***vitesse normalisée*** $\widetilde{U} = U(y)/U_0$ en terme de $\widetilde{y} = y/h$, dans la moitié « inférieure » $y \in [0,h]$ du canal ; on note toujours ici $U_0$ la valeur maximale de la vitesse, atteinte au centre du canal, en $y = h$.

*Indication* : $\widetilde{U}(\widetilde{y})$ fait aussi intervenir les paramètres $\chi$ et $C$, ainsi que le nombre de Reynolds $h^+$.

---

*Une fois à ce stade, à partir de* 16h, *montrez à E. Plaut vos résultats aux questions* 6 *et* 7. *Il vous indiquera des erreurs éventuelles. Une fois vos résultats validés, vous pourrez traiter les questions* 8 *et* 9 *soit avec votre calculette soit avec Matlab, sur votre PC portable allumé seulement dans ce but, sans Wifi.*

---

**8.1** Décrivez succinctement une ***méthode de mesure expérimentale*** précise de $\lambda$.
Schultz & Flack (2013) donnent justement, pour un écoulement à $Re = 1{,}43\ 10^5$, la valeur mesurée expérimentalement $\lambda = 0{,}00339$. Comparez cette valeur à celle que l'on aurait en écoulement laminaire et commentez.
Calculez pour cet écoulement le coefficient de perte de charge $\lambda$ prédit par la relation de Karman - Prandtl (11), comparez et commentez.

**8.2** Prédisez en conséquence la valeur du nombre de Reynolds $Re_\tau$ .

**9** Dans le plan $(\widetilde{U},\widetilde{y})$, pour $\widetilde{y} \in [0,2]$ correspondant à toute la largeur du canal, représentez sur un même graphe

- le profil de vitesse normalisé $\widetilde{U}(\widetilde{y})$ de l'écoulement laminaire ;
- le profil de vitesse normalisé $\widetilde{U}(\widetilde{y})$ de l'écoulement turbulent étudié en question 8, prédit par la théorie de Karman - Prandtl.

Reproduisez ce graphe sur votre copie, et commentez physiquement.

## Esquisse du programme Matlab de solution des questions 8 et 9

```
%% Constantes de la loi de paroi
chi= 0.4; C= 5;

%% Coefficients de la loi de KP
alpha= ...
beta= ...

%% Q 8.1
Re= 1.43*10^5; lambdaex= 0.00339;

% Pour afficher plus de digits
format long
%% Coeff. de frottement laminaire
lambdalam= ...
...

%% Coeff. de frottement turbulent
lambdath= fzero(@(x) loiKP(x, Re, alpha, beta), [...])
...

%% Q 8.2
Retau= ...

%% Q 9
% Valeur de depart de ytilde proche de 0
ymin= ...

% Valeurs tabulees de ytilde dans la moitie inferieure
y= linspace(ymin,1,100);
% Ecoulement laminaire dans la moitie inferieure
Ulam= ...

hold on;
plot(Ulam,y, "k","LineWidth",2)

% Valeurs de ytilde dans la moitie superieure
ysup= y+1;
% Ecoulement laminaire dans la moitie superieure par parite
Ulamsup= flip(...);

plot(Ulamsup,ysup, "k","LineWidth",2)

...

%% Loi de Karman - Prandtl
function res= loiKP( lambda, Re, alpha, beta)
res= 1/sqrt(lambda) - alpha * log(Re * sqrt(lambda)) - beta;
```

---

## Références bibliographiques


Eitel-Amor, G., Örlü, R. & Schlatter, P. 2014 Simulation and validation of a spatially evolving turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 8300$. *Int. J. Heat Fluid Flow* **47**, 57 – 69.

Schultz, M. P. & Flack, K. A. 2013 Reynolds-number scaling of turbulent channel flow. *Phys. Fluids* **25**, 025104,1–13.