Mines Nancy - Département *Énergie* - $2^{\text{ème}}$ année - Mécanique des fluides 2

Test du 22 janvier 2020 - Durée : 3 heures

Seul document autorisé : le polycopié de MF2 - Calculatrices autorisées

PC autorisés, sans Wifi, exclusivement pour Matlab, de 15h à 16h45, *sous conditions*

Veuillez ***rédiger*** avec soin et en langue française. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques risque d'être considérée comme nulle. Indiquez votre chargé de TD en entête : EP, JSK ou MJ. Des éléments de correction seront publiés en fin d'après-midi sur http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mf .

Barème indicatif[1] :

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Points	3	3	1,5	3	1,5	2	1	5	8,5
Cumul	3	6	7,5	10,5	12	14	15	20	28,5

Problème : *Étude détaillée d'ondes de surface en eau profonde*

Première partie : *calcul analytique d'une « onde linéaire »*

1 Dans un repère Oxyz cartésien, avec z vertical, on considère une ***couche d'eau très profonde*** au repos, située dans le domaine $z < 0$. L'interface supérieure définie par $z = 0$ peut être considérée comme « libre » car de l'***air***, considéré ***parfait non pesant***, se trouve dans le domaine $z > 0$. On considère une ***perturbation « mode normal onde pure »*** de cette configuration, dans laquelle l'***interface eau - air*** est définie par

$$z \;=\; \zeta(x,t) \;=\; A\cos(kx-\omega t) \;, \tag{1}$$

avec A une ***petite amplitude***, $k > 0$ le ***nombre d'onde***, $\omega > 0$ la ***fréquence angulaire***. On considère que l'***eau*** est un ***fluide pesant parfait incompressible*** en ***écoulement potentiel* 2D** xz.

1.a Dans le cadre d'une ***analyse linéaire de stabilité***, en explicitant une équation de conservation, une condition limite et une condition d'interface, montrez que le ***potentiel des vitesses*** dans l'eau peut être pris de la forme

$$\phi \;=\; \phi(x,z,t) \;=\; \Phi(z)\;\sin(kx-\omega t) \;, \tag{2}$$

où $\Phi(z)$, d'ordre A, est connue. Déduisez-en les composantes v_x et v_z de la vitesse $\overline{\mathbf{v}}$.

1.b Afin de préparer le tracé des lignes de courant instantanées (cf. la question 6), on admet qu'il existe une ***fonction courant*** $\psi(x,z,t)$ telle que

$$\overline{\mathbf{v}} \;=\; \overline{\mathbf{rot}}(\psi\overline{\mathbf{e}}_y) \;=\; (\overline{\boldsymbol{\nabla}}\psi)\wedge\overline{\mathbf{e}}_y \;=\; -\frac{\partial\psi}{\partial z}\overline{\mathbf{e}}_x \;+\; \frac{\partial\psi}{\partial x}\overline{\mathbf{e}}_z \;. \tag{3}$$

Démontrez, par un calcul différentiel intrinsèque, en considérant un déplacement infinitésimal $d\overline{\mathbf{x}}$ sur une ***ligne de courant*** dans le plan xOz, tel que, par définition, $d\overline{\mathbf{x}} \parallel \overline{\mathbf{v}}$ i.e. $d\overline{\mathbf{x}}\wedge\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}}$, que les iso-$\psi$ sont bien ces lignes de courant.

1.c Identifiez par un calcul intégro-différentiel une fonction courant de l'onde dont le champ de vitesse a été calculé en 1.a.

2.a Établissez l'expression des ***pressions*** $p_e(x,z,t)$ dans l'eau et $p_a(t)$ dans l'air, en faisant apparaître des fonctions du temps $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ inconnues a priori, et, pour ce qui est de p_e , des contributions de ϕ et $\overline{\mathbf{v}}$ qu'il est inutile d'expliciter à ce stade.

2.b En explicitant la condition d'interface qui traduit l'existence d'une ***tension superficielle*** là, montrez, par une prise de moyenne à préciser, que $\alpha(t) = \beta(t)$, puis établissez la ***relation de dispersion*** liant ω et k. Validez ce calcul par comparaison à un résultat du cours.

1. Traiter de façon totalement correcte les 3 premières parties du sujet permettrait a priori, même si le barème pourra être ajusté, d'obtenir une note de 20/20, cependant vous pourriez être plus ambitieux et viser une note supérieure !

Deuxième partie : ***étude quantitative élémentaire et validation du modèle du fluide parfait***

On considère dorénavant et jusqu'à la question 8 que l'onde se propage à la surface d'un lac très profond d'eau à 10 °C, avec une amplitude $A = 50$ cm et une longueur d'onde $\lambda = 40$ m.

3.a Calculez numériquement le nombre d'onde et la vitesse de phase de cette onde ; qualifiez en conséquence sa nature physique.

3.b Calculez numériquement la fréquence angulaire et la période temporelle de cette onde.

4 On désire valider l'hypothèse que l'eau se comporte comme un fluide parfait.

4.a Montrez par un calcul analytique général que le terme visqueux dans l'équation de Navier-Stokes est négligeable.

4.b Montrez par un calcul d'ordre de grandeur que le terme visqueux, proportionnel à la viscosité de l'eau, dans l'expression de la condition dynamique à l'interface est négligeable.

Question de transition : ***système d'équations régissant les trajectoires***

5 Explicitez analytiquement le système qu'il faut résoudre pour calculer, dans ce champ de vitesse, les ***trajectoires*** d'une particule fluide se trouvant à $t = 0$ en $\overline{\mathbf{X}} = X\overline{\mathbf{e}}_x + Z\overline{\mathbf{e}}_z$.
Quelle est sa nature mathématique précise, et pourquoi est-il difficile à résoudre analytiquement ?

À partir de 15h seulement, si vous pensez avoir résolu correctement les questions 1 à 5, levez la main pour présenter à E. Plaut votre copie. Il vérifiera vos solutions avant de vous donner un feu vert pour sortir votre **PC portable** *et résoudre avec l'aide de* **Matlab** *la troisième partie.*

Troisième partie : ***étude numérique avec*** **Matlab** ***du champ de vitesse et de trajectoires***

6 Représentez, à $t = 0$, les ***lignes de courant*** du champ de vitesse et ce ***champ de vitesse*** dans le domaine

$$D \;=\; \{(x,z) \in \; [0,\, 40 \text{ m}] \times [-10 \text{ m},\, 0]\} \; .$$

Pour cela, faisant usage du fait que les valeurs de ψ et $\overline{\mathbf{v}}$ n'importent, pour les tracés demandés, qu'à un facteur près, le cœur de votre programme a cette structure (attention les ... sont à corriger, notez aussi l'usage de l'opérateur `.*` pour la multiplication terme à terme de 2 tableaux) :

```
% Grille = valeurs tabulées de x et z
[x,z]= meshgrid( linspace(0, 40, ...), linspace(..., ..., ...));
% Valeurs tabulées de psi à un facteur près
psi= exp(k*z) .* ... ;
% Lignes de courant : isocontours de la fonction courant psi
hold on; contour( x, z, psi)
% Imposer les intervalles voulus et un rapport d'aspect physique
axis([0 40 -10 0.5]); axis equal;
% Nouvelle grille moins fine
[x,z]= meshgrid( ..., linspace(-10, -2, 4));
% Valeurs tabulées de la vitesse à un facteur près
vx= exp(k*z) .* cos(k*x);  vz= ... ;
% Tracé de ce champ de vecteurs
quiver( x, z, vx, vz)
```

Reproduisez, avec quelques lignes de courant et vecteurs vitesses bien choisis, et aussi une courbe donnant la position de l'interface, ce schéma sur votre copie. Listez et commentez succinctement deux propriétés caractérisant la structure spatiale du champ de vitesse, visibles sur votre figure.

7 À une ***position eulerienne*** $\overline{\mathbf{x}}$ fixée dans l'eau, décrivez la courbe décrite par $\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}},t)$ quand t varie. Représentez la par une figure tracée à la main, et faites le lien avec la figure précédente.

8.1 Pour passer en ***description lagrangienne***, résolvez numériquement le système écrit en question 5, pour calculer les ***trajectoires*** de deux particules fluides qui se trouvent à $t = 0$ en $(x,z) = (0, -1)$ m et $(0, -5)$ m, ce pendant 6 périodes temporelles de l'onde. Remarquez pour cela que ce système est déjà sous forme canonique en terme du vecteur colonne

$$\mathbf{F}(t) \;=\; \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \;,$$

$$\text{i.e.} \quad \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} \;=\; \mathbf{G}(t,\mathbf{F}(t)) \;=\; ...$$

Le cœur de votre (nouveau) programme a, pour ce qui concerne la $1^{\text{ère}}$ particule, cette structure (attention les ... sont à corriger) :

```
% Intervalle temporel avec 200 points
tint= linspace(0, 6*T, 200);
%% Trajectoire 1
[t1, F1]= ode45(@(t,F) G(t, F, k, omega, V), tint, [ 0 ; -1 ]);
x1= F1(:,1); z1= F1(:,2);
hold on; axis equal; plot(x1,z1)

%% Fonction qui définit l'équation différentielle
function res= G( t, F, k, omega, V)
res= V * [ exp(k*F(2)) * ... ; ... ];
end
```

avec V une amplitude caractéristique de la vitesse à calculer au début du programme.
Représentez ces deux trajectoires dans le domaine

$$D' \;=\; \{(x,z) \in \; [-0{,}5 \text{ m}, \, 1{,}5 \text{ m}] \times [-6 \text{ m}, \, 0]\} \;,$$

et reproduisez ce schéma à la main sur votre copie.
Décrivez qualitativement et quantitativement, de façon précise, ces trajectoires, en mettant notamment en évidence une « ***dérive*** ».
Donnez une interprétation physique de ces trajectoires et de cette dérive.

8.2 Que montre la comparaison entre la figure des lignes de courant et celle des trajectoires ?

Lorsque vous considérerez avoir terminé cette partie, vous me montrerez vos résultats, que je les valide ou non, puis vous fermerez votre PC portable.

Quatrième partie : *étude analytique « faiblement non linéaire » i.e. asymptotique*

On revient au cas général de la $1^{\text{ère}}$ partie, le ***paramètre infinitésimal*** est l'***amplitude*** A. On admet qu'un calcul d'***onde non linéaire*** dans ce système n'introduit pas de corrections à l'ordre A^2, c'est-à-dire que le champ de vitesse d'une onde non linéaire est

$$\overline{\mathbf{v}} \;=\; \big(\overline{\mathbf{v}} \text{ calculé en } 1^{\text{ère}} \text{ partie}\big) \;+\; O(A^3) \;=\; A\omega\big(V_x(x,z,t)\overline{\mathbf{e}}_x \;+\; V_z(x,z,t)\overline{\mathbf{e}}_z\big) \;+\; O(A^3)\;. \tag{4}$$

On veut étudier la ***trajectoire d'une particule fluide jusqu'à l'ordre*** A^2, à partir d'un développement asymptotique, début d'un développement en série entière en fonction de A, qui a sans doute un rayon de convergence strictement positif, de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x(t) & = & x_0 & + & Ax_1(t) & + & A^2x_2(t) & + & O(A^3) \\ z(t) & = & z_0 & + & Az_1(t) & + & A^2z_2(t) & + & O(A^3) \end{array}\right. . \tag{5}$$

9.a Identifiez les fonctions V_x et V_z de l'équation (4).

9.b En injectant les développements (5) dans les équations écrites en question 5, et en effectuant un développement en série de Taylor des fonctions V_x et V_z , identifiez $\dot{x}_1 = dx_1/dt$, $\dot{x}_2 = dx_2/dt$, $\dot{z}_1 = dz_1/dt$ et $\dot{z}_2 = dz_2/dt$.

9.c Calculez $x_1(t)$ et $z_1(t)$; vous supposerez que les valeurs moyennes de ces fonctions sont nulles, i.e. : à l'ordre A, (x_0,z_0) sont les coordonnées de la position moyenne de la particule. Identifiez la nature géométrique de la trajectoire à l'ordre A, définie par $A\ (x_1(t),z_1(t))$. Commentez physiquement. Comparez précisément à l'étude numérique de la question 8 et concluez quand à la pertinence de ces calculs à l'ordre A.

9.d Calculez $\dot{x}_2(t)$ et $\dot{z}_2(t)$. Montrez en particulier l'existence d'une « ***vitesse de dérive*** » à l'ordre A^2 dans la direction x, dont vous donnerez un expression analytique. Commentez physiquement. Comparez précisément à l'étude numérique de la question 8 et concluez quand à la pertinence de ces calculs à l'ordre A^2.

Formulaire de calcul tensoriel et différentiel

Formule du double produit vectoriel :

$$\overline{\mathbf{a}} \wedge (\overline{\mathbf{b}} \wedge \overline{\mathbf{c}}) \;=\; (\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{c}})\overline{\mathbf{b}} \;-\; (\overline{\mathbf{a}} \cdot \overline{\mathbf{b}})\overline{\mathbf{c}}\;. \tag{6}$$

Définition intrinsèque du gradient d'un champ scalaire :

$$d\psi \;=\; (\overline{\boldsymbol{\nabla}}\psi) \cdot d\overline{\mathbf{x}}\;. \tag{7}$$

Développement en série de Taylor à l'ordre 1 d'une fonction de deux variables de classe C^2 :

$$W\big(x_0 + Ax_1 + O(A^2), z_0 + Az_1 + O(A^2)\big) \;=\; W(x_0, z_0) + \frac{\partial W}{\partial x}(x_0, z_0)\, Ax_1 + \frac{\partial W}{\partial z}(x_0, z_0)\, Az_1 + O(A^2)\;. \tag{8}$$