

Veuillez *rédigé avec soin et en langue française*. Toute réponse à une question constituée uniquement de symboles mathématiques sera, a priori, considérée comme nulle.

Barème indicatif¹ :

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Points	0,5	6,5	2	2,5	4	4	1	2,5	2	2	27

Problème : Modèle de Karman - Prandtl d'écoulements turbulents en tuyau

On veut modéliser des *écoulements turbulents établis*, dans un tuyau cylindrique à section circulaire de rayon a et longueur $L \gg a$, d'un fluide newtonien incompressible de masse volumique ρ , viscosité dynamique (resp. cinématique) η (ν). En négligeant les effets d'entrée-sortie, en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz l'axe de révolution du tuyau, dans tout le domaine fluide le *champ de vitesse moyen*

$$\bar{\mathbf{V}} = U(r) \bar{\mathbf{e}}_z . \quad (1)$$

On adopte l'approche de Reynolds - Boussinesq et on admet que l'*énergie cinétique turbulente massique moyenne*, la *pression motrice moyenne* et la *viscosité dynamique turbulente* sont de la forme

$$k = k(r) , \quad P = P(r, z) , \quad \eta^t = \eta^t(r) . \quad (2)$$

1. Donnez les expressions intrinsèques des tenseurs $\overline{\nabla \mathbf{V}}$ et $\overline{\mathbf{D}(\bar{\mathbf{V}})}$, partie symétrique du précédent².

2.a Écrivez de façon intrinsèque l'équation de Reynolds sous l'hypothèse de Boussinesq. Montrez que le terme de diffusion moléculaire et turbulente, en $\overline{\text{div}} \bar{\mathbf{T}}$ pour $\bar{\mathbf{T}}$ bien choisi, peut s'écrire sous la forme d'un seul terme proportionnel à $\bar{\mathbf{e}}_z$.

2.b À l'aide des composantes radiale et azimutale de cette équation, montrez que P est la somme d'une fonction de r , ne dépendant que de $k(r)$, et d'une fonction $\Pi(z)$. Interprétez physiquement la contribution proportionnelle à $k(r)$.

2.c À l'aide de la composante axiale de l'équation de Reynolds, montrez que $\Pi(z)$ est de la forme $p_0 - Gz$ avec G constant. Donnez l'expression complète de P . Quelle est la signification physique précise de G , supposé strictement positif? Comment pourrait-on mesurer G ?

2.d Toujours à partir de la composante axiale de l'équation de Reynolds, établissez une équation différentielle ordinaire liant η , η^t , $U(r)$, r et G .

2.e Que vaut, à la paroi du tuyau, en $r = a$, η^t ? Déduisez-en la *contrainte pariétale de frottement moyenne*

$$\tau_p = -\tau_{rz}(\bar{\mathbf{V}}) > 0 ,$$

$\bar{\tau}(\bar{\mathbf{V}})$ étant le tenseur des contraintes visqueuses moyen, en fonction de G et a . Commentez et interprétez physiquement cette relation.

3.a Justifiez que dans la *couche externe* située a priori en proche paroi, où la turbulence joue un rôle dominant, on a en première approximation

$$\eta^t U'(r) = -\tau_p . \quad (3)$$

1. Le total sur 27 sera ramené à 20 environ suivant une règle qui reste à définir.

2. Vous noterez $U'(r)$ la dérivée $dU(r)/dr$, l'usage du ' pour ce champ étant sans ambiguïté.

3.b On utilise comme variable d'espace la distance à la paroi $y = a - r$, i.e., on fait le changement de variable

$$W(y) = U(a - y) .$$

D'autre part on utilise le modèle de longueur de mélange de Prandtl pour estimer la viscosité turbulente, avec $\ell_m = \chi y$, où χ est la constante de Von Karman. Explicitiez alors l'équation (3) et calculez $W(y)$. Vous ferez apparaître la **vitesse de frottement** u_τ , la vitesse réduite $W^+ = W/u_\tau$, et la distance à la paroi réduite $y^+ = y u_\tau / \nu$. Montrez que l'on obtient une **loi de paroi** identique à celle trouvée au-dessus d'une paroi plane ; vous l'écrirez sous la même forme en faisant apparaître la même constante additive C .

4.a De façon audacieuse, suivant Prandtl, on suppose que la loi trouvée précédemment pour W^+ est valable en turbulence forte dans la quasi-totalité du tuyau, en dehors d'une très fine couche visqueuse, puisqu'alors la couche externe s'« étend ». Donnez l'expression approximative correspondante de la vitesse réduite $U^+ = U/u_\tau$, d'abord en terme de r puis en terme de $\tilde{r} = r/a$. Vous ferez apparaître le nombre de Reynolds construit sur la vitesse de frottement et le rayon du tuyau

$$\boxed{Re_\tau = a^+ = \frac{u_\tau a}{\nu}} . \quad (4)$$

4.b Calculez d'après ce modèle la vitesse débitante V de l'écoulement, réduite en unités de u_τ , soit $V^+ = V/u_\tau$.

Indications : on donne

$$\int_0^1 \tilde{r} \ln(1 - \tilde{r}) d\tilde{r} = -\frac{3}{4} ;$$

vous établirez une expression de la forme $V^+ = V^+(a^+, \chi, C)$.

5.a Rappelez d'après le cours l'expression des **pertes de charge** dans le tuyau en fonction du **coefficient de perte de charge** λ . Déduisez-en une relation entre G , V , ρ , a et λ , puis la vitesse de frottement u_τ en fonction de V et λ . Expliquez la physique de cette relation.

5.b Exprimez $Re_\tau = a^+$ en fonction de λ et du nombre de Reynolds Re construit sur la vitesse débitante et le diamètre du tuyau. Commentez succinctement.

6.a Déduisez de tout ce qui précède la **relation de Karman - Prandtl**

$$\boxed{1/\sqrt{\lambda} = \alpha \log(Re\sqrt{\lambda}) + \beta} , \quad (5)$$

où $\log$ désigne le logarithme en base 10, $\log = \ln / \ln 10$, α et β sont des nombres fonctions des paramètres de la loi de paroi χ et C .

6.b En utilisant les valeurs retenues (sur la base d'expériences et de simulations numériques directes) pour la loi de paroi en tuyau $\chi = 0,41$ et $C = 5,2$ donnez les valeurs numériques prévues pour α et β avec 2 chiffres significatifs. Comparez à la formule de Karman-Nikuradze-Prandtl donnée dans le cours, sachant que Karman a légèrement corrigé les valeurs numériques issues de son calcul en ajustant directement les valeurs de α et β pour reproduire une étude expérimentale détaillée de Nikuradze. Commentez succinctement.

7 À partir de la loi trouvée question 4.a, établissez une loi pour le profil de vitesse normalisé $\tilde{U} = U(r)/U(0)$ en terme de $\tilde{r} = r/a$.

Indication : $\tilde{U}(\tilde{r})$ fait naturellement intervenir les paramètres de la loi de paroi χ et C , ainsi que le nombre de Reynolds a^+ .

À partir de 17h15, une fois toutes ces questions résolues, montrez vos résultats à E. Plaut, qui vous donnera ou non un feu vert pour continuer le problème, éventuellement, avec votre PC (sans Wifi) et (seulement) Matlab.

8.a Dans l'article de El Khoury et al. (2013) présentant des simulations numériques directes d'écoulements en tuyau, on étudie deux écoulements ainsi caractérisés :

Numéro d'écoulement	Nombre de Reynolds Re	Coefficient de perte de charge λ
1	19000	0,0268
2	37700	0,0225

Calculez pour ces deux écoulements le coefficient de perte de charge λ prédit par la relation de Karman - Prandtl (5) établie en question 6, comparez et commentez.

Indication : si vous faites le calcul avec Matlab, votre programme pourrait avoir la structure suivante :

```
alpha= ... ; beta= ... ; Rey= ... ;
% Tests pour choisir les valeurs de l'intervalle où chercher le zéro
loiKP( ... , Rey, alpha, beta)
loiKP( ... , Rey, alpha, beta)

% Recherche de lambda par vérification de la loi de KP
lambda= fzero(@(x) loiKP(x, Rey, alpha, beta), [... ...])

% Loi de KP
function res= loiKP(lambda, Rey, alpha, beta)
res= 1/sqrt(lambda) - alpha*log10(Rey*sqrt(lambda)) - beta; end
```

8.b Calculez en conséquence le nombre de Reynolds $Re_\tau = a^+$ prédit par la théorie de Karman - Prandtl, pour ces deux écoulements. Commentez succinctement.

9 Dans le plan $(\tilde{r}, \tilde{U})$, représentez sur un même graphe

- le profil $\tilde{U}(\tilde{r})$ de l'écoulement laminaire, dont vous rappellerez l'expression analytique ;
- le profil $\tilde{U}(\tilde{r})$ de l'écoulement 1 prédit par la théorie de Karman - Prandtl ;
- le profil $\tilde{U}(\tilde{r})$ de l'écoulement 2 prédit par la théorie de Karman - Prandtl.

Reproduisez ce graphe sur votre copie, comparez et commentez physiquement.

10 En revenant sur les calculs de la question 3.b, établissez l'expression de la viscosité turbulente réduite $\nu^+ = \eta^t/\eta$ en fonction de $\tilde{r}$, puis représentez les profils correspondants pour les écoulements turbulents 1 et 2 dans le plan $(\tilde{r}, \nu^+)$ sur un même graphe. Reproduisez ce graphe sur votre copie, et commentez physiquement.

Formulaire de calcul tensoriel en coordonnées cylindriques

Notant $\{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\}$ la base locale des coordonnées cylindriques, pour un champ scalaire $P(r, \theta, z)$,

$$\bar{\nabla} P = \frac{\partial P}{\partial r} \bar{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \bar{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial P}{\partial z} \bar{\mathbf{e}}_z, \quad (6)$$

pour un champ vectoriel $\bar{\mathbf{V}} = U(r) \bar{\mathbf{e}}_z$,

$$\text{Mat}(\bar{\nabla} \bar{\mathbf{V}}, \{\bar{\mathbf{e}}_r, \bar{\mathbf{e}}_\theta, \bar{\mathbf{e}}_z\}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dU}{dr} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

pour un champ tensoriel d'ordre 2 symétrique $\bar{\bar{\mathbf{T}}} = T_{rz}(r)(\bar{\mathbf{e}}_r \otimes \bar{\mathbf{e}}_z + \bar{\mathbf{e}}_z \otimes \bar{\mathbf{e}}_r)$,

$$\bar{\text{div}} \bar{\bar{\mathbf{T}}} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r T_{rz}) \bar{\mathbf{e}}_z. \quad (8)$$