# Mécanique des fluides 2 : ondes, couches limites et turbulence

par Emmanuel Plaut à Mines Nancy

Version du 31 mai 2022

# Table des matières

 $\mathbf{5}$ 

#### Introduction

1	Base	s de la r	nodélisation en mécanique des fluides	7
	1.1	Modèle	du milieu continu fluide, liquide ou gaz	7
	1.2	Cinéma	$\operatorname{tique}$	8
		1.2.1	Descriptions du mouvement	8
		1.2.2	Dérivées particulaires	9
		1.2.3	Tenseur des taux de déformation	9
		1.2.4	Transport d'un volume infinitésimal en description eulerienne	9
	1.3	Transpo	ort d'une quantité extensive : bilan global	9
	1.4	Bilan d	e masse	11
		1.4.1	Conservation de la masse - Débits - Vitesse débitante	11
		1.4.2	Transport d'une quantité extensive définie par une densité massique	11
	1.5	Bilan d	e quantité de mouvement	12
		1.5.1	Expression cinématique du taux d'évolution de la quantité de mouvement	12
		1.5.2	Bilan dynamique - Tenseur des contraintes	12
	1.6	Compos	rtement des fluides visqueux - Équation de Navier-Stokes	12
		1.6.1	Cas de fluides compressibles	12
		1.6.2	Cas de fluides incompressibles	14
1.7 Compléments : origine et estimation physique de la viscosité		Complé	ments : origine et estimation physique de la viscosité	15
		1.7.1	Cas de liquides	16
		1.7.2	Cas de gaz	16
	1.8	Bilans o	d'énergie cinétique - Puissances	18
	1.9	Applica	tion : pertes de charge dans un écoulement ouvert	18
	1.10	Bilans o	l'énergie interne	20

<ul> <li>2.1 Conditions de nature cinématique</li></ul>	<ul> <li>23</li> <li>24</li> <li>25</li> <li>25</li> <li>26</li> <li>28</li> <li>31</li> <li>31</li> <li>31</li> <li>33</li> <li>34</li> <li>35</li> <li>35</li> </ul>
<ul> <li>2.2 Forces linéiques de tension superficielle - Interprétation</li></ul>	<ul> <li>. 24</li> <li>. 25</li> <li>. 26</li> <li>. 28</li> <li>31</li> <li>. 31</li> <li>. 31</li> <li>. 33</li> <li>. 34</li> <li>. 35</li> <li>. 35</li> </ul>
<ul> <li>2.3 Condition dynamique à une interface</li></ul>	<ul> <li>25</li> <li>25</li> <li>26</li> <li>28</li> <li>31</li> <li>31</li> <li>31</li> <li>33</li> <li>34</li> <li>35</li> <li>35</li> </ul>
<ul> <li>2.3.1 Cas d'une interface plane</li></ul>	<ul> <li>25</li> <li>26</li> <li>28</li> <li>31</li> <li>31</li> <li>33</li> <li>34</li> <li>35</li> <li>35</li> </ul>
<ul> <li>2.3.2 Cas d'une interface courbe bidimensionnelle</li></ul>	<ul> <li>26</li> <li>28</li> <li>31</li> <li>31</li> <li>31</li> <li>33</li> <li>34</li> <li>35</li> <li>35</li> </ul>
<ul> <li>2.3.3 Cas d'une interface courbe tridimensionnelle</li></ul>	<ul> <li>. 28</li> <li>31</li> <li>. 31</li> <li>. 33</li> <li>. 34</li> <li>. 35</li> <li>. 35</li> </ul>
<ul> <li>3 Ondes et instabilités - Acoustique et ondes d'interface</li> <li>3.1 Généralités - Analyse linéaire de stabilité - Dispersion</li></ul>	<ul> <li>31</li> <li>31</li> <li>31</li> <li>33</li> <li>34</li> <li>35</li> <li>35</li> </ul>
3.1 Généralités - Analyse linéaire de stabilité - Dispersion	. 31 . 31 . 33 . 34 . 35 . 35
3.1.1 Principes de l'analyse linéaire de stabilité en modes normaux	. 31 . 33 . 34 . 35 . 35
sure remember de remanyse micane de stabilité en modes normaux	. 33 . 34 . 35 . 35
3.1.2 Cas d'ondes neutres : vitesse de groupe et « dispersion » $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	. 34 . 35 . 35
3.2 Les ondes sonores - De la compressibilité dans les fluides	. 35 . 35
3.2.1 Loi thermodynamique : compressibilité is entropique $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	. 35
3.2.2 Théorie générale en milieu fluide « infini » $\ldots$	
3.2.3 Cas des gaz parfaits	. 36
3.2.4 Cas des liquides	. 37
3.2.5 Critère d'effets de compressibilité dans un écoulement macroscopique	. 37
3.2.6 Problèmes et exercice sur les ondes sonores	. 38
Pb. 3.1 : Étude détaillée d'ondes sonores planes en milieu semi-infini $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	. 38
Ex. 3.1 : Étude sommaire de l'effet « coup de bélier » dans une conduite d'eau $\ldots$	. 40
Pb. 3.2 : Effets de la viscosité sur des ondes de type sonore	. 40
3.3 Ondes d'interface avec tension superficielle	. 43
3.3.1 Modèle à un seul fluide pesant et fluides au repos : ondes neutres	. 43
3.3.2 Problèmes et compléments sur les ondes d'interface	. 45
Pb. 3.3 : Étude détaillée d'ondes de surface en eau profonde	. 45
Pb. 3.4 : Instabilités de Rayleigh-Taylor et Kelvin-Helmholtz	. 48
Comp. 3.1 : On the Rayleigh-Taylor Instability	. 51
Comp. 3.2 : Sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz	. 52
4 Couches limites	53
4.1 Introduction - Équations de Prandtl	. 53
4.2 Couche limite de Blasius au dessus d'une plaque plane	. 56
4.3 Problèmes	. 59
Pb. 4.1 : Calcul et étude de la couche limite de Blasius	. 59
Pb. 4.2 : Calcul et étude des couches limites de Falkner-Skan	. 66
Pb. 4.3 : Couches limites : épaisseur de déplacement - couches limites aspirée et standard .	. 73
5 Écoulements turbulents	77
5.1 Introduction	. 78
5.2 Décomposition en champs moyens et fluctuations	. 80

5.3	Échel	les caractéristiques de la turbulence et cascade de Kolmogorov	81			
5.4	Théor	rie de Kolmogorov : corrélations et spectres	83			
	5.4.1	Principales hypothèses de la théorie de Kolmogorov	84			
	5.4.2	Corrélation et densité spectrale d'énergie 3D	84			
	5.4.3	Corrélations et densités spectrales d'énergie 1D	85			
	5.4.4	Hypothèse de Taylor	86			
	5.4.5	Spectre de Kolmogorov	87			
5.5	Équat	tions de Reynolds	88			
5.6	Modè	le de Boussinesq - Viscosité turbulente	90			
5.7	Modè	le de longueur de mélange de Prandtl	91			
5.8	Équat	tions d'évolutions supplémentaires	92			
	5.8.1	Motivation : mise en place du modèle $k-\varepsilon$ . Dissipations $\hdots$	92			
	5.8.2	Équation d'évolution de la vitesse fluctuante $\dots \dots \dots$	93			
	5.8.3	Équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente	93			
	5.8.4	Équation d'évolution de la pseudo-dissipation turbulente	95			
5.9	Modè	le $k-\varepsilon$	95			
	5.9.1	Équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente modélisée $\ldots \ldots \ldots \ldots$	95			
	5.9.2	Équation d'évolution de la pseudo-dissipation turbulente modélisée	96			
	5.9.3	Modèle $k - \varepsilon$ de la viscosité turbulente	96			
5.10	) Diffus	sion turbulente d'un champ scalaire	97			
5.11	5.11 Discussion de conclusion et ouvertures					
5.12	5.12 Exercices et problèmes					
	Ex. 5	.1 : Estimation d'ordres de grandeur en écoulement turbulent	100			
	Ex. 5	.2 : Calcul tensoriel de relations entre les dissipations turbulentes $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$	100			
	Ex. 5	.3 : Dissipations en turbulence homogène et isotrope	100			
	Pb. 5	.1 : Modèle simplifié de turbulence en proche paroi - Lois de paroi $\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots$	101			
	Pb. 5	.2 : Réanalyse de la simulation de couche limite turbulente de KTH				
		pour caractérisation fine des zones « locale », « visqueuse » et « logarithmique » $\ .$ .	109			
	Ex. 5.	.4 : Modèle $k - \varepsilon$ de turbulence de grille et mesure du coefficient $C_2$	112			
	Pb. 5	.3 : Écoulements laminaires et turbulents en canal	113			
	Pb. 5	.4 : Modèle de Karman - Prandtl d'écoulements turbulents en tuyau	117			
Bibliog	raphie		121			
A Éléi	ments d	le correction de problèmes	125			
	Pb. : Étude détaillée d'ondes de surface en eau profonde					
Pb. : Réanalyse de la simulation de couche limite turbulente de KTH						
		pour caractérisation fine des zones « locale », « visqueuse » et « logarithmique » $\ .$ .	127			
	Pb. :	Écoulements laminaires et turbulents en canal $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	130			
	Pb. :	Modèle de Karman - Prandtl d'écoulements turbulents en tuyau	131			

133

# Introduction

Ceci constitue la dernière version de mon document de cours - TD de *Mécanique des fluides* 2 destiné aux élèves de deuxième année de l'école nationale supérieure des Mines de Nancy ayant choisi le département *Énergie*<sup>1</sup>. Ce cours, qui utilise le *calcul tensoriel* (Plaut 2021*a*), se situe dans la continuité du cours de *mécanique des milieux continus solides et fluides* de 1<sup>ère</sup> année Plaut (2021*b*). J'utilise des notations identiques : les caractères gras surmontés d'une barre (exemple :  $\overline{\mathbf{v}}$ ) désignent les vecteurs, les caractères gras surmontés de deux barres (exemple :  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ ) désignent les tenseurs d'ordre 2, etc... J'utilise aussi la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés (par exemple, dans l'équation 1.65). Ce cours se situe enfin dans la suite du cours de *Mécanique des fluides* 1 Combeau (2019).

Je reprends et complète dans le chapitre 1 les bases générales de la modélisation en mécanique des fluides, en discutant d'effets de compressibilité, et en allant jusqu'au bilan d'énergie interne, i.e., en abordant la thermomécanique des fluides. Le chapitre 2 parachève ces bases en présentant les lois fondamentales régissant les phénomènes interfaciaux, dans les cas les plus simples d'interfaces sans changement de phase ou transfert de masse, ni réaction chimique, et en équilibre mécanique local.

Le chapitre 3 donne des éléments pour étudier les phénomènes d'*ondes* et d'*instabilités*; en l'occurrence, on considère des *ondes acoustiques* et *de surface*. Les TD correspondants seront l'occasion de manipuler (à nouveau) le *modèle* (non linéaire!) *du fluide parfait*.

Le chapitre 4 est consacré à la *théorie des couches limites laminaires*; on y donne aussi quelques éléments sur la transition vers la turbulence dans la couche limite de Blasius, et sur la couche limite turbulente. Dans les TD, on commencera à affronter des problèmes où les *phénomènes visqueux* (linéaires) et d'*advection* (non linéaires) jouent de concert.

Le chapitre 5 donne enfin des éléments sur les *écoulements turbulents* et leur modélisation. Là encore les *phénomènes visqueux* et d'*advection* co-existent, pour donner lieu à des comportements bien plus complexes que ceux des couches limites laminaires.

L'annexe A donne quelques éléments de correction de certains problèmes. L'annexe B, conçue pour être en dos de couverture, offre un tableau pratique pour l'analyse dimensionnelle en thermomécanique des fluides.

En TD, dans l'optique de la « *transition numérique* » actuelle, on tente d'utiliser un outil logiciel moderne<sup>2</sup>, à savoir **Matlab**, pour résoudre numériquement quelques problèmes différentiels, et aller « fouiller » une base de données... Vous devrez donc, lors des TD signalés sur la page web ci-après, amener votre PC portable équipé de **Matlab**. Ceci aura lieu au niveau des chapitres 4 et 5 seulement, et des TD correspondants (TD3, 4 et 6) : on évoluera ainsi progressivement dans ce module d'*approches analytiques* vers des *approches numériques*.

<sup>1.</sup> Dernière version puisque qu'à l'issue de l'année universitaire 2021-22 je laisse pour ce module la place à un jeune : Jean-Sébastien Kroll-Rabotin.

<sup>2.</sup> Prototype de certains outils logiciels utilisés en R & D.

Des références intéressantes et pédagogiques en mécanique des fluides, complémentaires des éléments de cours donnés ci-après, parfois succints, sont Huerre (1998), Chassaing (2000 a, b), Guyon et al. (2001, 2012). Des traités plus pointus, rédigés dans la langue de Shakespeare, sont ceux de Batchelor (1967) et Davidson (2004).

La page web

#### http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mf

contient ce document ainsi qu'un plan du module dans sa dernière édition, celle de l'année 2021-22.

Je remercie Hervé Combeau et Jean-Sébastien Kroll-Rabotin pour leurs remarques pertinentes. Je remercie mes collègues du Lemta<sup>3</sup>, Mathieu Jenny pour son aide concernant les codes **Matlab**, et Joël Ducourneau pour son aide autour du problème 3.1. Je remercie enfin mon ex-collègue Jean-Régis Angilella pour avoir attiré mon attention sur le site web que je cite dans le complément 3.1, et, surtout, pour m'avoir permis de m'inspirer des cours et TD de turbulence qu'il a donné à l'école des Mines jusqu'en 2010, afin de rédiger une première version du chapitre 5.

Nancy, le 31 mai 2022. Emmanuel Plaut.

<sup>3.</sup> Le Laboratoire Énergies & Mécanique Théorique et Appliquée, dans lequel je mène mes activités de recherche, cf. http://lemta.univ-lorraine.fr .

# Chapitre 1

# Bases de la modélisation en mécanique des fluides

Une présentation moins succinte de ces bases, en ce qui concerne toutes celles-ci exceptées la loi de comportement des fluides compressibles donnée en section 1.6, les compléments sur l'origine physique de la viscosité de la section 1.7, et le bilan d'énergie interne de la section 1.10, est accessible dans Plaut (2021b); cf. aussi Combeau (2019).

# 1.1 Modèle du milieu continu fluide, liquide ou gaz

Ce modèle suppose que la matière est constituée de « *particules fluides* », points à l'échelle du mécanicien, qui sont physiquement des « *volumes élémentaires représentatifs* » de diamètre caractéristique *d dans un état local homogène de quasi-équilibre thermodynamique*, suffisamment gros pour contenir suffisamment d'atomes ou de molécules pour que cette notion de quasi-équilibre ait un sens du point de vue de la physique statistique,

$$\ell$$
 échelle des hétérogénéités atomiques ou moléculaires  $\ll d$ , (1.1)

suffisamment petits pour qu'ils méritent le titre de « particules fluides ponctuelles »,

$$d \ll L$$
 échelle des hétérogénéités « macroscopiques »  $\simeq 1$  cm. (1.2)

Dans le cas de *liquides* « *simples* »,  $\ell \simeq 10$  Å donc (1.1) est satisfaite si  $d \simeq 1 \mu m$ . Dans le cas de *gaz*,  $\ell$  = libre parcours moyen des atomes ou molécules, et

$$\ell \ll L \iff K = nombre \ de \ Knudsen = \ell/L \ll 1$$
. (1.3)

En adoptant le modèle pertinent du *gaz parfait*, cf. par exemple Gaudry (2019),

$$\ell = 1/(\sqrt{2} \sigma_c n) \tag{1.4}$$

avec  $\sigma_c$  la section efficace de collision entre deux atomes ou molécules, de l'ordre de  $\pi d^2$  avec d le diamètre des atomes ou molécules, n la densité atomique ou moléculaire. Comme

$$n = p/(kT) \tag{1.5}$$

avec p la pression,

$$k = 1,381 \ 10^{-23} \ \text{J/K} \ \text{la constante de Boltzmann}, \tag{1.6}$$

T la température absolue, on obtient

$$K = 1/(\sqrt{2} \sigma_c n L) = kT/(\sqrt{2} \sigma_c p L).$$
 (1.7)

Le modèle du milieu continu ne sera pas valable pour des gaz très peu denses, i.e. chauds ou à faible pression. Ceci écarte par exemple les *gaz de la haute atmosphère*, ou encore la plupart des *plasmas*.

Rappelons pour terminer concernant les gaz que la masse volumique  $\rho = mn$  où m est la masse d'un atome ou molécule du gaz,  $m = M/N_A$  avec M la masse molaire du gaz<sup>1</sup>,  $N_A = 6,022 \ 10^{23}/\text{mol}$ le nombre d'Avogadro. Ainsi une autre forme de la loi des gaz parfaits (1.5) est

$$\rho = Mp/RT \tag{1.8}$$

avec la constante des gaz parfaits  $R = N_A k = 8,314 \text{ J/K/mol.}$ 

# 1.2 Cinématique

#### **1.2.1** Descriptions du mouvement

Si le modèle du milieu continu est valable on peut définir la *vitesse*  $\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}},t)$  d'une particule matérielle - volume élémentaire représentatif situé en un point  $\overline{\mathbf{x}}$  de l'espace comme une quantité moyenne, au sens de la physique statistique. Ce *champ de vitesse eulerien*  $\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}},t)$  est un bon choix de description en mécanique des fluides. La *description lagrangienne du mouvement* 

$$\overline{\Phi}(.,t) : D_0 \text{ domaine initialement occupé} \longrightarrow D_t \text{ domaine actuellement occupé} \overline{\mathbf{X}} \text{ position initiale} \longrightarrow \overline{\mathbf{x}} \text{ position actuelle} = \overline{\Phi}(\overline{\mathbf{X}},t)$$
(1.9)

s'obtient par calcul des *trajectoires* définies par

$$\overline{\mathbf{x}}(t_0) = \overline{\mathbf{X}} \quad \text{et} \quad \frac{d\overline{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}(t), t)$$
 (1.10)

De façon très légèrement abusive, on pourrait noter

$$\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{\Phi}}(\overline{\mathbf{X}},t) = \overline{\mathbf{x}}(\overline{\mathbf{X}},t) ,$$

mais récrire l'équation différentielle de (1.10) sous la forme

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{x}}(\overline{\mathbf{X}},t)}{\partial t} = \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}(\overline{\mathbf{X}},t),t)$$

serait peu pertinent, car cette équation différentielle est bien une équation différentielle ordinaire sur  $\overline{\mathbf{x}}(t)$ , le champ de vitesse eulerien  $\overline{\mathbf{v}}$  dépendant seulement de  $\overline{\mathbf{x}}$  et t, non pas de  $\overline{\mathbf{X}}$  totalement « oublié » en eulerien. Voir cette équation comme une équation aux dérivées partielles, ce que suggérerait la notation  $\partial$ , serait sans grand intérêt pratique<sup>2</sup>. Observons aussi que, souvent, le champ de vitesse  $\overline{\mathbf{v}}$  dépend de façon non linéaire de  $\overline{\mathbf{x}}$  : en conséquence le calcul des trajectoires est rarement possible de façon analytique, et celles-ci peuvent « facilement » présenter une certaine voire une grande complexité, cf. par exemple sur ce sujet le problème 3.3.

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}(\overline{\mathbf{X}},t)}{\partial t} \;\; = \;\; \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{X}}+\overline{\mathbf{u}}(\overline{\mathbf{X}},t),t) \; \ldots \;$$

même si, lorsqu'on l'intégrera à  $\overline{\mathbf{X}}$  fixé, on pourra penser que le terme de gauche est  $d\overline{\mathbf{u}}/dt$ .

<sup>1.</sup> Par exemple, pour l'air,  $M_{\rm air} = 29.0 \text{ g mol}^{-1}$ .

<sup>2.</sup> Par contre, si on passe en **déplacement**  $\overline{\mathbf{u}}(\overline{\mathbf{X}},t) = \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{X}}$ , la position de référence  $\overline{\mathbf{X}}$  apparaît naturellement dans l'équation différentielle des trajectoires, qu'il convient donc d'écrire comme l'équation aux dérivées partielles

#### **1.2.2** Dérivées particulaires

Elles reposent sur l'utilisation de l'opérateur gradient introduit dans Plaut (2021 a). Pour un champ scalaire

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\overline{\mathbf{\nabla}}_{\mathbf{x}}\rho) \cdot \overline{\mathbf{v}} ; \qquad (1.11)$$

pour le champ de vitesse

$$\frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\partial\overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\overline{\overline{\mathbf{v}}}_{\mathbf{x}}\overline{\mathbf{v}}) \cdot \overline{\mathbf{v}} .$$
(1.12)

On rappelle que la notation d/dt, dans toutes les formules de cette section et de la suivante, signifie que l'on suit le fluide (en local, ici, les « particules » de fluide, d'où le terme « particulaire ») dans son mouvement.

#### 1.2.3 Tenseur des taux de déformation

C'est le tenseur eulerien

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \frac{1}{2} \left( \overline{\overline{\mathbf{\nabla}}} \overline{\mathbf{v}} + \overline{\overline{\mathbf{\nabla}}} \overline{\mathbf{v}}^T \right)$$
(1.13)

qui permet de calculer la dérivée particulaire d'un produit scalaire entre petits vecteurs,

$$\frac{d(d\overline{\mathbf{x}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}')}{dt} = 2d\overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}' \qquad (1.14)$$

Il permet aussi la décomposition locale d'un champ de vitesse général, autour d'un point  $\overline{\mathbf{x}}$  donné,

$$d\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}} + d\overline{\mathbf{x}}) - \overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\overline{\mathbf{v}}}\overline{\mathbf{v}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} = \overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} + \overline{\boldsymbol{\omega}} \wedge d\overline{\mathbf{x}} \qquad (1.15)$$

avec

$$\overline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \, \overline{\mathbf{rot}} \, \overline{\mathbf{v}} \, . \tag{1.16}$$

Ainsi localement on peut décomposer le mouvement en une *déformation instantanée* (terme  $\overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}$ ) et une *rotation instantanée* (terme  $\overline{\boldsymbol{\omega}} \wedge d\overline{\mathbf{x}}$ ).

#### 1.2.4 Transport d'un volume infinitésimal en description eulerienne

Cette formule de transport

$$\frac{d(d^3x)}{dt} = (d^3x) \operatorname{tr} \overline{\overline{\nabla}} \overline{\mathbf{v}} = (d^3x) \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}}$$
(1.17)

permet une interprétation immédiate de la divergence du champ de vitesse.

## 1.3 Transport d'une quantité extensive : bilan global

L'importance de ce bilan justifie qu'il soit présenté dans une nouvelle section, même s'il relève toujours de la cinématique. On considère une quantité extensive C définie par une densité volumique  $c = c(\bar{\mathbf{x}}, t)$ ,

$$C = \iiint_{\Omega_t} c \ d^3x ,$$



**Fig. 1.1** – Représentation schématique d'un domaine matériel constituant un « *tube de courant* ». Les flèches représentent des vecteurs vitesses.

avec  $\Omega_t$  le domaine fluide considéré, que l'on appelle parfois « volume de contrôle ». On montre que

$$\frac{dC}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c\overline{\mathbf{v}}) \right] d^3x = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial c}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} c \,\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \, d^2S \quad (1.18)$$

Pour faire le lien avec les bilans présentés dans l'approche « *phénomènes de transport* » de Bellot (2017), considérons le cas d'un domaine  $\Omega_t$  tube de courant tel que sa frontière  $\partial \Omega_t$  se décompose en

- une surface d'entrée  $S_e$  sur laquelle  $\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} < 0$ ,
- une surface de sortie  $S_s$  sur laquelle  $\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} > 0$ ,
- une surface latérale (par exemple une paroi solide)  $S_{\ell}$  sur laquelle  $\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} = 0$ ,

avec  $\overline{\mathbf{n}}$  est le vecteur unitaire normal sortant de  $\Omega_t$ . Une telle situation est représentée sur la figure 1.1. On peut alors récrire le bilan (1.18) sous la forme

$$\tau_{\text{évolution}} = \frac{dC}{dt} = \tau_{\text{accumulation}} + \tau_{\text{gain en sortie}} - \tau_{\text{perte en entrée}}$$
, (1.19)

avec le taux d'accumulation (s'il est positif, sinon, c'est un taux de diminution)

$$\tau_{\text{accumulation}} = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial c}{\partial t} d^3 x , \qquad (1.20)$$

le taux de gain en sortie (en supposant que c est une quantité positive)

$$\tau_{\text{gain en sortie}} = \iint_{S_s} c \, \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \, d^2 S$$
 (1.21)

et le taux de perte en entrée

$$\tau_{\text{perte en entrée}} = \iint_{S_e} c \left( -\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \right) d^2 S .$$
 (1.22)

Ces taux se simplifient dans le cas où on suppose que c est uniforme en entrée et sortie,

$$\tau_{\text{gain en sortie}} = c_s q_s \quad \text{avec} \quad q_s = \iint_{S_s} \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \ d^2 S = \text{débit volumique sortant}, \quad (1.23)$$

$$\tau_{\text{perte en entrée}} = c_e q_e$$
 avec  $q_e = \iint_{S_e} (-\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}}) d^2 S = \text{débit volumique entrant.}$  (1.24)

Le bilan (1.19) s'interprète ainsi : le taux temporel global d'évolution de la quantité C du fluide contenu dans  $\Omega_t$ , en suivant ce fluide dans son mouvement, soit  $\tau_{\text{évolution}}$ , est la somme

- du taux temporel de variation de C dans  $\Omega_t$  dû à d'éventuelles instationnarités (c dépend effectivement du temps), soit  $\tau_{\text{accumulation}}$ ,
- du taux temporel de gain de C en sortie, puisque dans l'écoulement on gagne du volume en sortie, soit  $\tau_{\text{gain en sortie}}$ ,
- de l'opposé du taux temporel de perte de C en entrée, puisque dans l'écoulement on perd du volume en entrée, soit  $\tau_{\text{perte en entrée}}$ .

La valeur du taux d'évolution de la quantité C, que la cinématique nous permet d'expliciter avec la formule (1.19), sera finalement donnée par la physique. Par exemple, si C est la masse, par conservation de la masse,

$$au_{
m \acute{e}volution} \;=\; {dm\over dt} \;=\; 0 \;,$$

si C est la quantité de mouvement, par la loi de Newton,

 $\overline{\tau}_{\text{évolution}} = \frac{d\overline{\mathbf{p}}}{dt} = \overline{\mathbf{R}}_{\text{ext}} = \text{ somme des forces extérieures appliquées.}$ 

Il est donc temps de passer de la cinématique à la physique des fluides !..

## 1.4 Bilan de masse

## 1.4.1 Conservation de la masse - Débits - Vitesse débitante

A l'aide de ce qui précède la *conservation de la masse* s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \overline{\mathbf{v}}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}} = 0 \quad . \tag{1.25}$$

En fluide *incompressible* ou *écoulement isovolume* 

$$\rho = \rho_0 \quad \text{donc} \quad \text{div}\overline{\mathbf{v}} = 0.$$
(1.26)

Le long d'un tube de courant, en écoulement permanent d'un fluide quelconque, ou, en écoulement quelconque d'un fluide incompressible, on a *conservation du débit massique* 

$$\dot{m} = \iint_{S} \rho \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \ d^2 S \tag{1.27}$$

avec S une section du tube,  $\overline{\mathbf{n}}$  normale à cette section orientée comme le tube. Enfin en fluide incompressible on a *conservation du débit volumique* 

$$q = \frac{\dot{m}}{\rho} = \iint_{S} \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \ d^{2}S , \qquad (1.28)$$

qui est souvent écrit VA avec V vitesse débitante et A aire d'une section du tube.

#### 1.4.2 Transport d'une quantité extensive définie par une densité massique

La quantité étant définie par

$$E = \iiint_{\Omega_t} \rho e \ d^3 x$$

on a montré que

$$\frac{dE}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{de}{dt} d^3 x = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} d^3 x + \iint_{\partial\Omega_t} \rho e \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} d^2 S .$$
(1.29)

### 1.5 Bilan de quantité de mouvement

#### 1.5.1 Expression cinématique du taux d'évolution de la quantité de mouvement

À partir de (1.18) et (1.29) on obtient

$$\frac{d\overline{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho \overline{\mathbf{v}} d^3 x = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} d^3 x \tag{1.30}$$

$$\frac{d\overline{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho\overline{\mathbf{v}})}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \rho\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{v}}\cdot\overline{\mathbf{n}}) d^2S \qquad (1.31)$$

Cette dernière forme de la dérivée de la quantité de mouvement par rapport au temps est connue sous le terme « formule d'Euler ».

#### **1.5.2** Bilan dynamique - Tenseur des contraintes

On introduit pour décrire les efforts intérieurs dans un fluide le **tenseur des contraintes** de Cauchy  $\overline{\overline{\sigma}}$ . Ainsi, la force exercée sur un élément de surface  $d^2S$  de normale sortante  $\overline{\mathbf{n}}$  par le milieu extérieur est

$$d^{2}\mathbf{\bar{f}} = \mathbf{\overline{T}}d^{2}S = \mathbf{\overline{\sigma}} \cdot \mathbf{\overline{n}}d^{2}S , \qquad (1.32)$$

avec $\overline{\mathbf{T}}$ le vecteur contrainte. D'après Newton, il vient

$$\frac{d\overline{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \overline{\mathbf{n}} d^2S \qquad (1.33)$$

En utilisant la formule intégrale de la divergence (cf. Plaut 2021a) on obtient l'équation locale d'évolution de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \overline{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} + \overline{\mathbf{div}} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (1.34)$$

# 1.6 Loi de comportement des fluides visqueux Équation de Navier-Stokes

#### **1.6.1** Cas de fluides compressibles

On veut ici introduire la loi de comportement des *fluides compressibles visqueux isotropes newtoniens*. On a toujours dans ce cas séparation du tenseur des contraintes

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{1} + \overline{\overline{\tau}} \tag{1.35}$$

en un tenseur de **pression**  $-p\overline{\overline{\mathbf{l}}}$  et un tenseur des **contraintes visqueuses**  $\overline{\overline{\tau}}$ , avec a priori une relation **linéaire** entre  $\overline{\overline{\tau}}$  et le **tenseur des taux de déformation** (1.13). En effet un mouvement de rotation en bloc du fluide ne doit pas créer de contraintes visqueuses, d'où la proportionnalité de  $\overline{\overline{\tau}}$  à  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$  et non  $\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{v}}$ ; l'hypothèse de linéarité quant à elle est caractéristique du fluide **newtonien**. Comme le fluide est compressible on n'a plus forcément tr $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$  = div $\overline{\mathbf{v}}$  = 0, donc la loi de comportement la plus générale respectant les hypothèses que l'on vient d'énoncer s'écrit

$$\overline{\overline{\tau}} = \eta_1 (\operatorname{tr} \overline{\overline{\mathbf{D}}}) \overline{\overline{\mathbf{1}}} + 2\eta_2 \overline{\overline{\mathbf{D}}} .$$
(1.36)

Dans un écoulement de Couette plan comme celui étudié en première année,

$$\overline{\mathbf{v}} = V \frac{y}{\ell} \overline{\mathbf{e}}_x ,$$

on a tr $\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}} = 0$ , donc on retrouve une contrainte tangentielle à la paroi y = 0 valant

$$T_x = \overline{\mathbf{e}}_x \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \overline{\mathbf{e}}_y = \eta_2 \frac{V}{\ell}$$

Cette relation de proportionnalité entre la contrainte de cisaillement et le taux de déformation de cisaillement, via  $\eta_2$ , montre que  $\eta_2$  est la *viscosité (dynamique) de cisaillement* déjà rencontrée en première année; on notera en conséquence

$$\eta = \eta_2 . \tag{1.37}$$

Pour interpréter la viscosité  $\eta_1$ , considérons au contraire un mouvement de compression pure seulement possible en fluide compressible,

$$\overline{\mathbf{v}} = -V\frac{\overline{\mathbf{x}}}{a} \ .$$

On a alors

$$\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{v}} = -\frac{V}{a}\overline{\overline{\mathbf{I}}} = \overline{\overline{\mathbf{D}}}$$

donc

$$\overline{\overline{\tau}} = -(3\eta_1 + 2\eta)\frac{V}{a}\overline{\overline{\mathbf{1}}} = \kappa(\operatorname{div}\overline{\mathbf{v}})\overline{\overline{\mathbf{1}}}$$

avec

$$\kappa = \eta_1 + \frac{2}{3}\eta \tag{1.38}$$

le coefficient de proportionnalité entre les contraintes visqueuses liées à la compression et le coefficient de contraction volumique div $\overline{\mathbf{v}}$  (cf. l'équation 1.17). On appelle donc  $\kappa$  viscosité (dynamique) de dilatation-compression volumique.

On peut faire à partir de la théorie cinétique des gaz faiblement hors de l'équilibre, i.e. en équilibre thermodynamique local seulement<sup>3</sup>, des prédictions concernant le tenseur des contraintes visqueuses, prenant leur source dans les collisions entre atomes ou molécules. Ceci permet de montrer que, pour un gaz monoatomique, la viscosité de dilatation-compression volumique est nulle,

$$\kappa = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \eta_1 = -\frac{2}{3}\eta \;. \tag{1.39}$$

La première « démonstration » de cette propriété a été donnée par Stokes en 1845, voir Stokes  $(1845)^4$ . Il s'avère que dans les gaz polyatomiques et les fluides la viscosité de dilatation-compression volumique est faible; en conséquence on suppose en général, pour simplifier, la validité de la *rela-tion de Stokes* (1.39). Au bilan on a donc

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{1}} + 2\eta\overline{\overline{D}} - \frac{2}{3}\eta (\operatorname{tr}\overline{\overline{D}})\overline{\overline{1}} \qquad (1.40)$$

<sup>3.</sup> Cette théorie, plus complexe que celle des gaz en équilibre thermodynamique global (qui a été vue en première année dans le cours de Gaudry 2019), est par exemple présentée dans Huang (1988).

<sup>4.</sup> Stokes, mathématicien et physicien anglais, l'a basée sur des raisonnements mécaniques et non sur la théorie cinétique des gaz.

Fluide	$\rho  [\rm kg/m^3]$	$\eta \; [{\rm Pa \; s}]$	$\nu \ [m^2/s]$
Eau sous $p = 1$ atm, $T = 10 ^{\circ}\text{C}$	1000	$1,31 \ 10^{-3}$	$1,31 \ 10^{-6}$
Eau sous $p = 1$ atm, $T = 20 ^{\circ}\text{C}$	998	$1,00 \ 10^{-3}$	$1,00 \ 10^{-6}$
Eau sous $p = 1$ atm, $T = 30 ^{\circ}\text{C}$	996	$7,98 \ 10^{-4}$	$8,01 \ 10^{-7}$
Air sous $p = 1$ atm, $T = 20 ^{\circ}\text{C}$	1,20	$1,82 \ 10^{-5}$	$1,51 \ 10^{-5}$
Air sous $p = 1$ atm, $T = 40 ^{\circ}\text{C}$	1,13	$1,91 \ 10^{-5}$	$1,70 \ 10^{-5}$

Tab. 1.1 – Valeurs typiques de la masse volumique  $\rho$ , de la viscosité dynamique  $\eta$  et de la viscosité cinématique  $\nu = \eta/\rho$  pour divers fluides. On rappelle qu'une atmosphère vaut 1,013 10<sup>5</sup> Pa soit 1,013 bar. L'unité de  $\eta$  est aussi bien le Pascal seconde [Pa s] que le kilogramme par mètre et par seconde [kg/(m s)]. Les propriétés de l'eau sont tirées de Lide (2001). La masse volumique de l'air peut se déduire de la loi des gaz parfaits 1.8; les viscosités sont tirées du site web 'Engineering ToolBox'.

Une conséquence importante de ces effets de frottements visqueux est que les fluides visqueux *adhérent* à une paroi solide, ce qu'exprime la condition d'*adhérence* 

$$\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}},t) = \overline{\mathbf{v}}_{\text{paroi}}(\overline{\mathbf{x}},t)$$
 sur la paroi. (1.41)

En remplaçant dans (1.34) et en utilisant le fait que sur la Terre  $\bar{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} = \rho \bar{\mathbf{g}}$  il vient l'équation de Navier<sup>5</sup>- Stokes

$$\rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \overline{\mathbf{g}} - \overline{\mathbf{\nabla}} p + \eta \overline{\mathbf{\Delta}} \overline{\mathbf{v}} + \frac{1}{3} \eta \overline{\mathbf{\nabla}} (\operatorname{div} \overline{\mathbf{v}}) \quad (1.42)$$

On introduit en général la viscosité cinématique

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad . \tag{1.43}$$

Des valeurs typiques des viscosités sont présentées sur la table 1.1; voir aussi sur ce sujet la section 1.7.

En fluide compressible, l'équation scalaire de conservation de la masse (1.25) et l'équation vectorielle de Navier- Stokes (1.42) ne suffisent sûrement pas à déterminer les deux champs scalaires inconnus  $\rho$  et p, ainsi que le champ vectoriel inconnu  $\overline{\mathbf{v}}$ . Une « loi de comportement thermodynamique » supplémentaire est nécessaire, par exemple, la loi des gaz parfaits, qui introduit aussi la température... dont l'équation d'évolution sera discutée en section 1.10. Plus simplement, dans l'étude des ondes sonores de la section 3.2, on fera une hypothèse d'adiabaticité qui permet de relier directement les fluctuations de masse volumique aux fluctuations de pression (l'équation 3.21), sans avoir besoin d'introduire la température. On n'affrontera pas dans ce module le problème difficile de la modélisation d'écoulements de fluides compressibles en présence d'effets thermiques...

#### **1.6.2** Cas de fluides incompressibles

Très souvent les fluides considérés sont supposés *incompressibles*. Alors, en vertu de (1.26),

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{v}} = 0 , \qquad (1.44)$$

<sup>5.</sup> Navier, ingénieur et scientifique français, avait étudié le cas d'un fluide incompressible dés 1822, en proposant le modèle qui correspond à (1.46).

la loi de comportement (1.40) devient plus simplement

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{\mathbf{I}}} + 2\eta\overline{\overline{\mathbf{D}}} , \qquad (1.45)$$

i.e. le tenseur des contraintes visqueuses  $\overline{\overline{\tau}} = 2\eta \overline{\overline{\mathbf{D}}}$ . L'équation de Navier-Stokes (1.42) se récrit donc

$$\rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \overline{\mathbf{g}} - \overline{\mathbf{\nabla}} p + \eta \overline{\Delta} \overline{\mathbf{v}} \qquad (1.46)$$

On peut, à l'échelle du laboratoire où  $\overline{\mathbf{g}} = -g\overline{\mathbf{e}}_z$  est uniforme, regrouper les deux premiers termes du membre de droite dans le gradient de *pression motrice* 

$$\widehat{p} = p + \rho g z \quad , \tag{1.47}$$

c'est-à-dire écrire

$$\underbrace{\rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt}}_{\text{terme s inertiels}} = \rho \left[ \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left( \overline{\overline{\mathbf{v}}} \overline{\mathbf{v}} \right) \cdot \overline{\mathbf{v}} \right] = \underbrace{-\overline{\mathbf{v}} \widehat{p}}_{\text{terme de pression}} + \underbrace{\eta \overline{\Delta} \overline{\mathbf{v}}}_{\text{terme visqueux}} \right|.$$
(1.48)

Contrairement au cas du fluide compressible <sup>6</sup>, l'équation scalaire de conservation de la masse (1.25) et l'équation vectorielle de Navier-Stokes (1.48) permettent maintenant, en général, de déterminer le champ scalaire inconnu p et le champ vectoriel inconnu  $\bar{\mathbf{v}}$ , la masse volumique  $\rho$  étant a priori « connue » c'est-à-dire donnée par les conditions thermodynamiques de l'écoulement, cf. la table 1.1. Cependant, en dehors du cas des écoulements à faible nombre de Reynolds, où le terme non linéaire inertiel d'advection<sup>7</sup> de l'équation de Navier-Stokes est négligeable, on a affaire en général à un problème non linéaire, d'où une grande sensibilité aux conditions initiales et aux perturbations. Ceci conduit à une grande richesse de comportement permettant par exemple des instabilités (cf. le chapitre 3) ou la turbulence (cf. le chapitre 5)...

Dans une optique d'exhaustivité, bien que tout soit disponible, comme expliqué dans l'introduction, dans Plaut (2021a), donnons l'écriture en coordonnées cartésiennes de l'équation (1.48):

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) v_j \right] = -\frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} .$$
(1.49)

## 1.7 Compléments : origine et estimation physique de la viscosité

Quelques éléments sur la physique de la viscosité des liquides et des gaz sont présentés ici. Pour une étude plus approfondie, voyez par exemple la section 2.2 de Guyon et al. (2001).

<sup>6.</sup> Cf. la discussion de la fin de la section 1.6.1.

<sup>7.</sup> Le terme  $\rho(\overline{\overline{\nabla}}\overline{v}) \cdot \overline{v}$ , qui s'écrit aussi  $\rho(\overline{v} \cdot \overline{\nabla})\overline{v}$  en coordonnées cartésiennes.

#### 1.7.1 Cas de liquides

Dans un liquide la mobilité des molécules est faible. En conséquence la diffusion de quantité de mouvement est gouvernée par des « sauts » dans l'espace sur une longueur comparable à la taille  $\ell$  des molécules, sous l'effet des contraintes internes. Une analyse basée sur la mécanique quantique et statistique, donnée dans la section 2.2.2 de Guyon et al. (2001), montre que l'on peut estimer la viscosité dynamique comme étant

$$\eta \simeq \frac{h}{\ell^3} \exp\left(\frac{\delta E}{kT}\right)$$
 (1.50)

où  $h = \text{constante} \text{ de Planck} = 6,626 \ 10^{-34} \text{ J K}$ ,  $\delta E$  est l'énergie d'activation à fournir pour un saut de position lorsque le fluide est au repos sans écoulement. Un tel saut de position se produit par agitation thermique, d'où le facteur de Maxwell-Boltzmann en  $\exp(\delta E/kT)$ . Une loi de ce type, généralisée avec un préfacteur moins contraint,

$$\eta \simeq \eta_0 \exp\left(\frac{\delta E}{kT}\right)$$
 (1.51)

est appelée « loi d'Arrhenius »<sup>8</sup>. Elle prédit que la viscosité doit diminuer avec la température, ce que l'on observe bien expérimentalement dans le cas de l'eau, cf. les données de la table 1.1. Pour aller plus loin de façon semi-quantitative, on peut supposer physiquement que l'énergie d'activation  $\delta E$  est de l'ordre de  $kT_{\acute{e}}$ , où  $T_{\acute{e}}$  est la température d'ébullition du liquide. Pour bien reproduire les observations on prend numériquement

$$\delta E = 3.8 \ kT_{\rm e} \tag{1.52}$$

ce qui conduit avec (1.50) à l'estimation

$$\eta \simeq \frac{h}{\ell^3} \exp\left(3.8 \frac{T_{\acute{e}}}{T}\right). \tag{1.53}$$

Dans le cas de l'eau,  $\ell=3,4$  Å et  $T_{\rm \acute{e}}~=~100$  °C ~=~373 K donnent, à T~=~10 °C ~=~283 K,

$$\eta_{\rm eau} \simeq 2.5 \ 10^{-3} \ {\rm Pa \ s} \ ,$$

ce qui est du bon ordre de grandeur, cf. la table 1.1.

#### 1.7.2 Cas de gaz

La diffusion de quantité de mouvement dans les gaz se fait essentiellement à cause de l'agitation thermique et des collisions. Cette agitation thermique peut être décrite en première approximation grâce à la théorie cinétique des gaz parfaits, cf. par exemple Gaudry (2019). Cette théorie montre que la vitesse d'agitation thermique moyenne <sup>9</sup>

$$V_{\text{therm}} = \sqrt{\langle \overline{\mathbf{v}}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$
 (1.54)

<sup>8.</sup> Physicien et chimiste suédois de la fin $\mathrm{XIX}^{\grave{e}me}$ , début $\mathrm{XX}^{\grave{e}me}$ .

<sup>9.</sup> La moyenne que signifient les crochets est celle de la physique statistique, on suppose ici qu'il n'y a pas de vitesse moyenne locale, ou plutôt, la vitesse  $\overline{\mathbf{v}}$  est l'écart à la vitesse moyenne locale.

en ordre de grandeur, avec m la masse d'un atome ou d'une molécule. D'autre part la longueur caractéristique sur laquelle se font les échanges de quantité de mouvement est la distance parcourue par atome ou molécule entre deux collisions, i.e. le libre parcours moyen  $\ell$  déjà introduit équation (1.4). Comme l'analyse dimensionnelle montre que la viscosité cinématique

$$\nu \equiv v \ell ,$$

il est naturel de postuler la relation d'ordre de grandeur<sup>10</sup>

$$\nu \simeq V_{\text{therm}} \ell \iff \eta = \nu \rho \simeq \sqrt{\frac{kT}{m}} \frac{1}{\sigma_c n} mn \simeq \frac{\sqrt{mkT}}{\sigma_c} .$$
 (1.55)

Dans le cas de diazote à température ambiante, on peut estimer que la section efficace de collision  $\sigma_c$  est de l'ordre de  $4\pi r_{N_2}^2$  où  $r_{N_2} = 1.6$  Å est le rayon de la molécule de diazote. D'autre part  $m = m_{N_2} = 14$  uma , où l'on rappelle qu'une unité de masse atomique

1 uma = 
$$\frac{1 \text{ g}}{N_{\text{A}}}$$
 =  $\frac{1 \text{ g}}{6,02 \ 10^{23}}$  = 1,66  $10^{-27} \text{ kg}$ ,

 $N_{\rm A}$  étant le nombre d'Avogadro. On obtient ainsi à 20 °C,

$$\eta_{\rm N_2} \simeq 3 \ 10^{-5} \ {\rm Pa \ s} \ .$$
 (1.56)

Le fait que cette valeur estimée soit 1,7 fois la viscosité de l'air mesurée à température ambiante (donnée dans la table 1.1) illustre que cette théorie est seulement valable semi-quantitativement, en ordre de grandeur<sup>11</sup>.

La formule (1.55) prédit une augmentation de la viscosité (dynamique) lorsque la température donc l'agitation thermique augmentent. Cette augmentation est bien observée expérimentalement : la table 1.1 montre que lorsque la température augmente de 20 à 40 °C, la viscosité de l'air augmente de 5%. Cette augmentation est comparable à celle du facteur racine carrée de la température absolue dans la formule (1.55), soit 3% dans ce cas.

<sup>10.</sup> Le premier à poser cette relation fut le physicien et mathématicien britannique Maxwell, qui vécut au XIX<sup>ème</sup> siècle.

<sup>11.</sup> Développer des modèles quantitatifs de coefficients de transport comme la viscosité est très difficile...

# 1.8 Bilans d'énergie cinétique - Puissances

Le *bilan local* s'obtient en multipliant (1.34) scalairement par  $\overline{\mathbf{v}}$ , d'où

$$\rho \frac{de_c}{dt} = \bar{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + (\overline{\mathbf{div}} \ \overline{\overline{\sigma}}) \cdot \bar{\mathbf{v}}$$
(1.57)

avec 
$$e_c = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}}^2$$
 la densité massique d'énergie cinétique. (1.58)

Le **bilan global** sur un volume de fluide  $\Omega_t$  s'écrit

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{volumiques}} + P_{\text{surfaciques}} - P_{\text{dissipée}}$$
(1.59)

avec

$$E_c = \acute{e}nergie \ cinétique \ totale = \iiint_{\Omega_t} \rho e_c \ d^3x$$
, (1.60)

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho e_c)}{\partial t} d^3 x + \iint_{\partial\Omega_t} \rho e_c \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} d^2 S , \qquad (1.61)$$

$$P_{\text{volumiques}} = \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} \cdot \overline{\mathbf{v}} \ d^3x \ , \qquad P_{\text{surfaciques}} = \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\mathbf{T}} \cdot \overline{\mathbf{v}} \ d^2S \ , \qquad (1.62)$$

$$P_{\text{dissipée}} = \iiint_{\Omega_t} \Phi_{\text{diss}} d^3 x , \qquad (1.63)$$

avec la fonction de dissipation, en fluide incompressible,

$$\Phi_{\rm diss} = \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{\nabla}} \overline{\overline{v}} = 2\eta \overline{\overline{\mathbf{D}}} : \overline{\overline{\nabla}} \overline{\overline{v}} = 2\eta \overline{\overline{\mathbf{D}}} : \overline{\overline{\mathbf{D}}}$$
(1.64)

qui est toujours positive. En terme des composantes de  $\overline{\mathbf{D}}$ , par exemple,

$$\Phi_{\rm diss} = 2\eta D_{ij} D_{ji} = 2\eta D_{ij} D_{ij} . \qquad (1.65)$$

# **1.9** Application : pertes de charge dans un écoulement ouvert

On considère un écoulement quasi permanent d'un fluide incompressible dans un tube de courant  $\Omega_t$ , dont les sections d'entrée  $S_e$  et de sortie  $S_s$  se trouvent dans des régions où l'écoulement est établi i.e. quasi unidirectionnel, et sont faiblement étendues dans la direction verticale z. On montre que le bilan (1.59) s'écrit dans ce cas

$$\dot{m}g \,\delta H = \dot{m}g \,(H_e - H_s) = P_{\text{dissipée}} \ge 0$$
(1.66)

avec

$$H_e = z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_e V_e^2}{g} = charge \text{ au niveau de } S_e , \qquad (1.67)$$

$$V_e = \frac{1}{A_e} \iint_{S_e} v \ d^2 S = \frac{q}{A_e} = \text{ vitesse débitante sur } S_e , \qquad (1.68)$$

$$\langle v^3 \rangle_e = \frac{1}{A_e} \iint_{S_e} v^3 d^2 S = \text{vitesse cubique moyenne sur } S_e , \qquad (1.69)$$

$$\alpha_e = \frac{\langle v^3 \rangle_e}{V_e^3} = \text{ coefficient d'énergie cinétique sur } S_e , \qquad (1.70)$$

en notant  $A_e$  l'aire de la section d'entrée, des formules identiques étant valables au niveau de la sortie s. Cette notion de **perte de charge** est extrêmement importante pour l'ingénieur, car elle permet le calcul des « circuits hydrauliques ». Pour une démonstration de la formule de bilan des pertes de charge (1.66), dans le cas laminaire, voir par exemple la section 7.5.3 de Plaut (2021 b), ou encore Combeau (2019). On peut admettre cette formule, en moyenne, pour des écoulements turbulents.

Dans le cas d'écoulements dans un tuyau cylindrique à section circulaire, l'étude des pertes de charge à l'aide de l'analyse dimensionnelle <sup>12</sup> aboutit à l'introduction d'un « coefficient de perte de charge » <sup>13</sup> adimensionnel  $\lambda$ , fonction du nombre de Reynolds  $Re = Vd/\nu$  avec V la vitesse débitante, d le diamètre,  $\nu$  la viscosité cinématique, et de  $\varepsilon$  la rugosité relative, quotient de la taille caractéristique des rugosités de la paroi sur d. Ce coefficient  $\lambda$  permet d'obtenir la perte de charge entre deux sections distantes d'une longueur L dans la direction de l'axe du tuyau suivant la formule

$$\delta H = \frac{V^2}{2g} \frac{L}{d} \lambda(Re, \varepsilon) . \qquad (1.71)$$

Des corrélations permettant d'estimer  $\lambda$  sont présentées sur la figure 1.2. La figure 1.3 illustre la *transition vers la turbulence* et ses effets, dramatiques, sur les pertes de charge, puisqu'elle conduit à des coefficients beaucoup plus élevés que dans le cas laminaire, où on a la formule exacte dite de *Poiseuille* 

$$\lambda = 64 \ Re^{-1} \ . \tag{1.72}$$

Rappelons aussi quelques *corrélations pour les écoulements turbulents*... toujours en tuyau, jusqu'à la fin de cette section !

Dans le cas d'un tuyau à **paroi lisse**,  $\varepsilon \simeq 0$ , on dispose en régime de turbulence pas trop forte, pour  $3000 \leq Re \leq 10^5$ , de la **formule de Blasius** 

$$\lambda = 0,316 \ Re^{-1/4} , \qquad (1.73)$$

et en turbulence forte, pour  $10^4 \lesssim Re \lesssim 10^8$ , de la *formule de Karman-Nikuradze-Prandtl*<sup>14</sup>

$$1/\sqrt{\lambda} = 2\log(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}) - 0.8. \qquad (1.74)$$

Cette formule est *implicite* et nécessite un calcul numérique pour être utilisée; l'intérêt de l'abaque de la figure 1.2 est de permettre d'estimer  $\lambda$  graphiquement. Cependant, une formule *explicite générale*, donc, d'utilisation plus pratique, a été développée par Haaland (1983), à la fois pour tuyaux à **paroi lisse** ( $\varepsilon = 0$ ) et **rugueuse** ( $\varepsilon > 0$ ). Elle a été ajustée sur la formule de Karman-Nikuradze-Prandtl pour tuyau lisse et sur une formule similaire dite de Colebrook & White pour tuyau rugueux. Cette **formule de Haaland** 

$$\lambda = \left(-1.8 \log\left((\varepsilon/3.7)^{1.11} + 6.9 \ Re^{-1}\right)\right)^{-2}, \qquad (1.75)$$

pourrait selon son auteur être utilisée pour  $4000 \leq Re \leq 10^8$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 5 \ 10^{-2}$ . Remarquablement, en tuyau rugueux et turbulence forte complètement développée, lorsque  $Re \to +\infty$ , le coefficient de perte de charge cesse de décroître et tend vers une valeur finie.

<sup>12.</sup> Présentée par exemple dans la section 8.2 de Plaut (2021b).

<sup>13.</sup> Ou « coefficient de frottement », 'friction factor' en anglais.

<sup>14.</sup> log signifie le logarithme en base 10. L'origine de cette formule sera établie dans le problème 5.4.

Signalons, pour terminer ce paragraphe dédié aux écoulements turbulents en tuyau, que les études expérimentales datent de la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle et ne sont pas extrêmement précises. En particulier, la limite  $Re \simeq 10^8$  indiquée ci-dessus, « revendiquée » comme limite supérieure de validité de la formule (1.75) par Haaland (1983), est sans doute trop élevée. Une étude expérimentale récente en **tuyau lisse** à haut Reynolds, publiée dans McKeon et al. (2005), propose par exemple, pour  $10^4 \leq Re \leq 4 \ 10^7$ , d'« actualiser » la formule de Karman-Nikuradze-Prandtl sous la forme<sup>15</sup>

$$1/\sqrt{\lambda} = 1,930 \log(\text{Re}\,\sqrt{\lambda}) - 0,537 \,. \tag{1.76}$$

Malheureusement, à ma connaissance, des études expérimentales récentes en tuyau rugueux, qui permettraient d'« actualiser » la formule plus générale de Haaland, manquent à l'appel.

# 1.10 Bilans d'énergie interne

L'énergie interne, ou « chaleur », est aussi de l'énergie cinétique, mais correspondant à des mouvements d'agitation thermique « microscopiques » et « désordonnés ». On définit une densité massique d'énergie interne  $e_i$ . Le premier principe de la thermodynamique énonce la loi d'évolution de l'énergie totale

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \frac{d(E_i + E_c)}{dt} = P_{\text{efforts extérieurs}} + \dot{Q}$$
(1.77)

avec $\dot{Q}$  le taux d'énergie interne (chaleur) reçu,

$$\dot{Q} = \iiint_{\Omega_t} r d^3 x - \iint_{\partial \Omega_t} \overline{\mathbf{J}}_{\text{chal}} \cdot \overline{\mathbf{n}} d^2 S , \qquad (1.78)$$

r étant le taux volumique de production de chaleur,  $\overline{\mathbf{J}}_{chal}$  le vecteur densité de flux de chaleur,  $\overline{\mathbf{n}}$  la normale unitaire sortant de  $\Omega_t$ . En utilisant le bilan global d'énergie cinétique (1.59), on établit le bilan global d'énergie interne

$$\frac{dE_i}{dt} = P_{\text{dissipée}} + \dot{Q} \quad . \tag{1.79}$$

La puissance dissipée n'est donc pas perdue mais transformée en chaleur. En introduisant la *den*sité massique d'énergie interne  $e_i$  il vient, à l'aide de la formule de transport (1.29), les expressions suivantes, cinématique puis dynamique,

$$\frac{dE_i}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{de_i}{dt} d^3 x = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho e_i)}{\partial t} d^3 x + \iint_{\partial\Omega_t} \rho e_i \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} d^2 S$$
$$\frac{dE_i}{dt} = \iiint_{\Omega_t} (\Phi_{\text{diss}} + r) d^3 x - \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\mathbf{J}}_{\text{chal}} \cdot \overline{\mathbf{n}} d^2 S .$$
(1.80)

Par transformation du terme de bord lié au flux en terme volumique à l'aide de la formule intégrale de la divergence, puis passage du global au local, on obtient l'équation locale

$$\rho \frac{de_i}{dt} = \Phi_{\text{diss}} + r - \text{div} \overline{\mathbf{J}}_{\text{chal}} . \qquad (1.81)$$

<sup>15.</sup> Cette formule (1.76) serait plus pertinente à partir de  $Re \gtrsim 10^6$ ; elle conduit à des valeurs de  $\lambda$  supérieures à celles estimées par (1.74) de 2% pour  $Re \simeq 10^6$ , 3% pour  $Re \simeq 10^7$ , 5% pour  $Re \simeq 4 \ 10^7$ .



Fig. 1.2 – Coefficients de perte de charge  $\lambda$  des écoulements en tuyau en fonction du nombre de Reynolds Re et de la rugosité relative  $\varepsilon$  (Bonnin 1983). La formule associée est l'équation (1.71).



Fig. 1.3 – Propriétés d'écoulements dans un tuyau. (a) : figure tirée de Schlichting (1979); Faisst & Eckhardt (2003). (b) : visualisation expérimentale d'une « bouffée turbulente » ('puff' en anglais) à Re = 1900, grâce à des particules anisotropes minces s'orientant dans l'écoulement et réfléchissant la lumière (Peixinho & Mullin 2006). (c) : a numerical 'puff' at Re = 1900 with a (r,z) section of the axial vorticity (Willis & Kerswell 2007).

Par définition même de la *capacité calorifique massique* c, une variation infinitésimale dT de température équivaut à une variation infinitésimale de densité massique d'énergie interne

$$de_i = c \, dT \, . \tag{1.82}$$

Lorsque r = 0, et que la **loi de Fourier** 

$$\overline{\mathbf{J}}_{\text{chal}} = -\lambda \overline{\boldsymbol{\nabla}} T \tag{1.83}$$

avec  $\lambda$  la conductivité thermique est bien vérifiée, l'équation de la chaleur s'écrit

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \Phi_{\rm diss} + \lambda \Delta T \qquad (1.84)$$

Le terme de dissipation visqueuse est souvent négligeable.

Des valeurs typiques des capacités calorifiques et conductivités thermiques sont

 $\begin{aligned} c &= 4180 \text{ J/kg/K}, \quad \lambda = 0,597 \text{ W/m/K} \qquad \text{pour de l'} \boldsymbol{eau} \ge 20^{\,\text{o}\text{C}} \ , \\ c &= 1006 \text{ J/kg/K}, \quad \lambda = 0,0257 \text{ W/m/K} \qquad \text{pour de l'} \boldsymbol{air} \ge 20^{\,\text{o}\text{C}} \ . \end{aligned}$ 

On en déduit des valeurs typiques des diffusivités thermiques

$$\begin{aligned} \kappa &= \lambda/(\rho c) = 1,43 \ 10^{-7} \ \text{m}^2/\text{s} & \text{pour de l'} eau \ \text{à} \ 20^{\,\text{o}}\text{C} \ , \\ \kappa &= \lambda/(\rho c) = 2,12 \ 10^{-5} \ \text{m}^2/\text{s} & \text{pour de l'} air \ \text{à} \ 20^{\,\text{o}}\text{C} \ . \end{aligned}$$

Revenons pour terminer sur le bilan global (1.80) dans le cas où  $\Omega_t$  est un tube de courant, de section d'entrée  $S_e$ , de sortie  $S_s$ , et l'écoulement est permanent. Il vient alors, en négligeant la dissipation visqueuse et en revenant à des écritures globales des termes de droite <sup>16</sup>,

$$\iint_{S_e} \rho e_i \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \ d^2 S + \iint_{S_s} \rho e_i \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \ d^2 S = \dot{Q} \ . \tag{1.85}$$

En faisant l'hypothèse que les conditions thermiques sont quasi uniformes sur les sections d'entrée et de sortie du tube de courant, il vient

$$\dot{m} \left[ e_i(\text{sortie}) - e_i(\text{entrée}) \right] = \dot{Q} .$$
 (1.86)

En faisant enfin l'hypothèse que la relation (1.82) est valable sur toute la plage de température balayée, avec une capacité calorifique *c constante*, il vient

$$q_c [T(\text{sortie}) - T(\text{entrée})] = \dot{Q} \quad \text{avec} \quad q_c = \dot{m}c \text{ le } d\acute{e}bit \ calorifique.$$
(1.87)

Cette équation bilan permet par exemple d'estimer le débit massique du fluide caloporteur circulant dans un réacteur nucléaire, T(entrée) et T(sortie) étant fixées par des contraintes de conception du réacteur,  $\dot{Q}$  étant la puissance thermique à évacuer, produite par les réactions de fission nucléaire... Ces bilans d'énergie interne sont repris dans Bellot (2017); Jannot (2012); Jannot & Moyne (2016). Globalement, les sciences des **phénomènes de transport** et des **transferts thermiques** devraient compléter l'étude des phénomènes de conduction et convection de la chaleur, abordables en thermomécanique des fluides, mais peu considérés ici, par celle des phénomènes de rayonnemment, qui dépasse largement le cadre de la thermomécanique des fluides... Voyez enfin l'annexe B du présent document sur l'analyse dimensionnelle en thermomécanique des fluides...

$$au_{
m \acute{e}volution}~=~Q~=~ au_{
m gain~en~sortie}~-~ au_{
m perte~en~entr\acute{e}e}$$
 .

<sup>16.</sup> On peut aussi établir l'équation (1.85) à partir du bilan (1.19), qui s'écrit, en l'absence de tout phénomène d'accumulation,

# Chapitre 2

# Conditions à une interface entre fluides -Tension superficielle

Dans ce chapitre toujours fondamental, on passe en revue les **conditions à une interface** « **matérielle** » **entre deux fluides**. L'**interface** est « **matérielle** » au sens où il n'y a, à son voisinage, **aucun changement de phase ou transfert de masse**, **ni réaction chimique**. Une interface liquide-vapeur avec changement de phase, par exemple, ou un front de flamme, ont une physique beaucoup plus riche qui dépasse largement le cadre de ce module. On précise aussi que l'interface est supposée en **équilibre mécanique local**, dans le cas de dynamiques très rapides, cette hypothèse peut être invalidée<sup>1</sup>.

On commence par les *conditions de nature cinématique* section 2.1. Les sections suivantes sont consacrées à l'étude de la *condition limite dynamique*, qui repose sur un bilan physique de forces, et l'équilibre mécanique local que nous venons d'évoquer. On s'est inspiré de Fermigier (1999) et Guyon et al. (2001) pour la partie physique, et de l'article *Courbure* de Wikipedia pour la section 2.3.3.

# 2.1 Conditions de nature cinématique

Une première condition limite cinématique universelle, au sens où elle est valable en fluide parfait comme en fluide visqueux, stipule qu'une particule qui se trouve à un instant donné à une interface matérielle y reste toujours. Si l'interface est d'équation

$$F(\overline{\mathbf{x}},t) = 0 \tag{2.1}$$

il faut vérifier, pour tout  $\overline{\mathbf{x}}$  et t,

$$F(\overline{\mathbf{x}},t) = 0 \implies \frac{dF(\overline{\mathbf{x}},t)}{dt} = 0$$
 (2.2)

Ceci doit être vérifié dans chaque fluide, de part et d'autre de l'interface. Choisissons un système de coordonnées cartésiennes tel que, en un point  $\overline{\mathbf{x}}_0$  et à un instant  $t_0$  donnés,

le plan tangent à l'interface soit le plan 
$$z = 0$$
. (2.3)

<sup>1.</sup> Pour l'écriture des conditions « générales » à une interface avec changement de phase, transfert de masse ou réaction chimique, et, éventuellement, une situation hors d'équilibre mécanique, voir Fer (1971).

Alors, au voisinage du point  $\overline{\mathbf{x}}_0$  et de l'instant  $t_0$ , l'équation de l'interface peut s'écrire sous la forme

$$F(\bar{\mathbf{x}},t) = z - f(x,y,t) = 0.$$
(2.4)

Dans chaque fluide, repéré par un indice i valant 1 ou 2, il faut donc vérifier que

$$z = f(x,y,t) \implies \frac{dz}{dt} = v_{zi} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}}_i \cdot \overline{\mathbf{\nabla}} f$$
 (2.5)

Ainsi la vitesse normale de chaque fluide à l'interface est la vitesse normale de l'interface dans ce fluide. Celle-ci peut dépendre du fluide considéré, si les fluides sont parfaits  $^2$ .

En *fluides visqueux*, il faut rajouter une deuxième condition cinématique de *continuité des vitesses tangentielles à l'interface*, à cause de l'*adhérence* entre les deux fluides.

Travaillant toujours au voisinage d'un point  $\overline{\mathbf{x}}_0$  et d'un instant  $t_0$  vérifiant la condition (2.3), ce qui permet localement d'écrire l'équation de l'interface sous la forme (2.4), on a donc

$$v_{x1}(\bar{\mathbf{x}}_0, t_0) = v_{x2}(\bar{\mathbf{x}}_0, t_0) \quad \text{et} \quad v_{y1}(\bar{\mathbf{x}}_0, t_0) = v_{y2}(\bar{\mathbf{x}}_0, t_0) .$$
 (2.6)

L'équation (2.5) montre alors que

$$v_{z1}(\bar{\mathbf{x}}_0, t_0) = v_{z2}(\bar{\mathbf{x}}_0, t_0) .$$
 (2.7)

On retiendra donc qu'à une interface entre deux fluides visqueux toutes les composantes de la vitesse sont continues. Ainsi la notion de vitesse normale de l'interface entre deux fluides visqueux est bien définie, i.e. ne dépend pas du fluide considéré.

# 2.2 Forces linéiques de tension superficielle - Interprétation

Afin de préparer l'écriture de la condition limite dynamique, considérons une interface plane, placée en z = 0, séparant un fluide 1 situé dans le demi espace z < 0 d'un fluide 2 situé dans le demi espace z > 0. Considérons un petit parallélépipède de fluide 1 juste sous celle-ci, comme cela est présenté figure 2.1a. La face située dans le plan de l'interface, carrée de côté dx, est centrée en  $x \overline{\mathbf{e}}_x + y \overline{\mathbf{e}}_y$ . Les faces latérales sont rectangulaires de grand côté dx et de petit côté dz, avec  $dz \ll dx$ . Il existe des **forces linéiques de tension superficielles** qui assurent la cohésion et la planéité de l'interface :

• sur la face latérale située en x + dx/2 est appliquée par les fluides environnants une force

$$d\overline{\mathbf{F}} = \gamma \, dx \, \overline{\mathbf{e}}_x \qquad (2.8)$$

• sur la face latérale située en x - dx/2 est appliquée par les fluides environnants une force

$$-d\overline{\mathbf{F}} = -\gamma \ dx \ \overline{\mathbf{e}}_x ;$$

• sur la face latérale située en y + dx/2 est appliquée par les fluides environnants une force

$$d\overline{\mathbf{F}}' = \gamma \ dx \ \overline{\mathbf{e}}_y ;$$

• sur la face latérale située en y - dx/2 est appliquée par les fluides environnants une force

$$-d\overline{\mathbf{F}}' = -\gamma \ dx \ \overline{\mathbf{e}}_y$$
.



**Fig. 2.1** – **a** : Représentation des *forces tangentielles de tension superficielle* exercées sur un petit parallélépipède du fluide 1 juste « sous » l'interface plane. Le fluide 2 est situé « au dessus ». **b** : Représentation des forces tangentielles de tension superficielle, exercées sur une tige mobile mouillée par un film de liquide.

Le coefficient de tension superficielle  $\gamma$  est donc la force de tension de surface par unité de longueur. Pour une interface eau-air  $\gamma = 0,074$  N/m. Ce phénomène peut être mis en évidence expérimentalement en étudiant un film de liquide peu lourd (par exemple de l'eau savonneuse) s'appuyant sur un cadre en U, complété par une tige mobile mouillée par le film, comme cela est représenté sur la figure 2.1b. On observe que la tige doit être maintenue avec une force  $\overline{\mathbf{F}}$  non nulle, dans le plan des deux interfaces air-liquide « inférieure » et liquide-air « supérieure », pour rester immobile. D'autre part on observe que cette force est proportionnelle à la longueur l de la tige. Ceci montre bien l'existence de forces linéiques de la forme (2.8), puisque pour équilibrer les forces exercées au niveau des deux interfaces air-liquide et liquide-air mouillant la tige, il faut exercer

$$\overline{\mathbf{F}} = -2 \int_{y=0}^{l} d\overline{\mathbf{F}} = -2 \int_{y=0}^{l} \gamma \, dy \, (-\overline{\mathbf{e}}_{x}) = 2 \, \gamma \, l \, \overline{\mathbf{e}}_{x} \, . \tag{2.9}$$

Pour augmenter la surface des interfaces de dS = 2 l dx, il faut exercer sur la tige, donc, par transmission, sur les interfaces, un travail

$$dW = F \, dx = \gamma \, dS \,. \tag{2.10}$$

Ainsi le coefficient de tension superficielle peut être vu comme une énergie par unité de surface : avoir une interface d'aire S coûte une énergie de surface

$$E_{\text{surface}} = \gamma S$$
 (2.11)

#### 2.3 Condition dynamique à une interface

#### 2.3.1 Cas d'une interface plane

Faisons un bilan de quantité de mouvement pour le parallélépipède de la figure 2.1a. Comme le volume  $d^3x = (dx)^2 dz$  de celui-ci est un infiniment petit d'ordre supérieur, les termes de volume, i.e. le terme inertiel et le terme de force de pesanteur, sont négligeables. La loi d'évolution de la

<sup>2.</sup> Méditez sur ce sujet l'exemple du problème 3.4.

quantité de mouvement s'écrit en conséquence

$$\overline{\mathbf{0}} = \sum_{\mathbf{F}} \overline{\mathbf{F}}_{\text{extérieures linéiques}} + \sum_{\mathbf{F}} \overline{\mathbf{F}}_{\text{extérieures surfaciques}}$$
$$= d\overline{\mathbf{F}} - d\overline{\mathbf{F}} + d\overline{\mathbf{F}}' - d\overline{\mathbf{F}}' + d^2\overline{\mathbf{F}}_2 + d^2\overline{\mathbf{F}}_1$$
$$\overline{\mathbf{0}} = d^2\overline{\mathbf{F}}_2 + d^2\overline{\mathbf{F}}_1$$
(2.12)

somme des forces exercées par le fluide 2 sur la face « supérieure » et par le fluide 1 sur la face « inférieure ». Les forces de tension de surfaces se compensent donc mutuellement dans le cas d'une interface plane. Les forces de surface  $d^2 \overline{\mathbf{F}}_1$  et  $d^2 \overline{\mathbf{F}}_2$ , quant à elles, sont définies par les tenseurs des contraintes dans ces deux fluides,  $\overline{\overline{\sigma}}_1$  et  $\overline{\overline{\sigma}}_2$ ,

$$d^2 \overline{\mathbf{F}}_1 = -\overline{\overline{\sigma}}_1 \cdot \overline{\mathbf{e}}_z \ d^2 S \quad \text{et} \quad d^2 \overline{\mathbf{F}}_2 = \overline{\overline{\sigma}}_2 \cdot \overline{\mathbf{e}}_z \ d^2 S$$

avec  $d^2S = (dx)^2$  l'aire des faces « supérieure » et « inférieure ». La loi de la quantité de mouvement (2.12) donne donc, dans le cas d'une interface plane, qu'il y a continuité des vecteurs contraintes :

$$\overline{\overline{\sigma}}_2 \cdot \overline{\mathbf{n}} = \overline{\overline{\sigma}}_1 \cdot \overline{\mathbf{n}} , \qquad (2.13)$$

en notant  $\overline{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{e}}_z$  le vecteur unitaire normal à l'interface, allant du fluide 1 vers le fluide 2.

#### 2.3.2 Cas d'une interface courbe bidimensionnelle

Considérons une interface courbe, étendue dans la direction z, direction d'invariance de cette interface. Au voisinage d'un point, on utilise un repère Oxyz avec O centre de courbure de l'interface, Ox dans la direction normale à l'interface,  $\bar{\mathbf{e}}_y$  vecteur tangent à l'interface. Le **rayon de courbure** de l'interface au point considéré est R. Une situation typique d'un cas « concave » <sup>3</sup> est présentée figure 2.2. Faisons un bilan de quantité de mouvement sur un petit élément de fluide 1 situé, en coordonnées cylindriques associées à Oxyz, dans le domaine

$$\Omega = \{ (r, \theta, z) \in [R - dr, R] \times [0, d\theta] \times [0, dz] \} .$$

Comme le volume  $d^3x = R dr d\theta dz$  de  $\Omega$  est un infiniment petit d'ordre 3, on peut encore négliger (comme au niveau de l'équation 2.12) les termes de volume dans le bilan de quantité de mouvement. Celui-ci s'écrit donc

$$\overline{\mathbf{0}} = \sum_{\mathbf{F}} \overline{\mathbf{F}}_{\text{extérieures linéiques}} + \sum_{\mathbf{F}} \overline{\mathbf{F}}_{\text{extérieures surfaciques}}$$
$$\overline{\mathbf{0}} = d\overline{\mathbf{F}}_{+} + d\overline{\mathbf{F}}_{-} + d\overline{\mathbf{F}}_{z} - d\overline{\mathbf{F}}_{z} + d^{2}\overline{\mathbf{F}}_{2} + d^{2}\overline{\mathbf{F}}_{1}$$
(2.14)

avec

- $d\overline{\mathbf{F}}_+$  la force exercée sur la frontière définie par  $\theta = d\theta$ ;
- $d\overline{\mathbf{F}}_{-}$  la force exercée sur la frontière définie par  $\theta = 0$ ;
- $d\overline{\mathbf{F}}_z$  la force exercée sur la frontière définie par z = dz;
- $-d\overline{\mathbf{F}}_z$  la force exercée sur la frontière définie par z = 0;
- $d^2 \overline{\mathbf{F}}_2 = \overline{\overline{\sigma}}_2 \cdot \overline{\mathbf{e}}_x d^2 S$  la force exercée sur la frontière définie par r = R,
- $d^2 \overline{\mathbf{F}}_1 = -\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}_1 \cdot \overline{\mathbf{e}}_x d^2 S$  la force exercée sur la frontière définie par r = R dr,

<sup>3.</sup> Cf. la fin de cette sous-section.



**Fig. 2.2** – Représentation des *forces de tension superficielles* s'exerçant sur un petit élément de fluide 1 juste « à gauche » d'une interface courbe, présentant un rayon de courbure fini seulement. On confond, à l'échelle de la figure, l'intersection entre l'interface et le plan de la figure avec le cercle osculateur à cette intersection.

 $d^2S = R \, d\theta \, dz$  étant l'aire de ces deux dernières frontières. Les forces  $d\overline{\mathbf{F}}_z$  et  $-d\overline{\mathbf{F}}_z$  se compensent exactement. Par contre, du fait de la courbure de l'interface, ce n'est plus le cas des forces

$$d\overline{\mathbf{F}}_{+} = \gamma \ dz \ \overline{\mathbf{e}}_{\theta}(d\theta) = \gamma \ dz \ (-d\theta \ \overline{\mathbf{e}}_{x} + \overline{\mathbf{e}}_{y})$$

 $\operatorname{et}$ 

$$d\overline{\mathbf{F}}_{-} = -\gamma \ dz \ \overline{\mathbf{e}}_{\theta}(0) = -\gamma \ dz \ \overline{\mathbf{e}}_{y} \ .$$

Il vient

(

$$d^{2}\overline{\mathbf{F}}_{\text{tension sup.}} := d\overline{\mathbf{F}}_{+} + d\overline{\mathbf{F}}_{-} = -\gamma \ d\theta \ dz \ \overline{\mathbf{e}}_{x} = -\gamma \ \frac{d^{2}S}{R} \ \overline{\mathbf{n}} , \qquad (2.15)$$

en notant  $\overline{\mathbf{n}} = \overline{\mathbf{e}}_x$  la normale unitaire à l'interface sortant du fluide 1. La loi d'évolution de la quantité de mouvement appliquée à  $\Omega$ , (2.14), s'écrit en conséquence

$$\overline{\mathbf{0}} = \overline{\overline{\sigma}}_2 \cdot \overline{\mathbf{n}} \, d^2 S - \overline{\overline{\sigma}}_1 \cdot \overline{\mathbf{n}} \, d^2 S - \gamma \, \frac{d^2 S}{R} \, \overline{\mathbf{n}} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[ \overline{\overline{\sigma}}_2 \cdot \overline{\mathbf{n}} - \overline{\overline{\sigma}}_1 \cdot \overline{\mathbf{n}} = \gamma \, \frac{1}{R} \, \overline{\mathbf{n}} \right].$$
(2.16)

Physiquement, les forces de tension superficielles ne se compensent pas à cause de la courbure de l'interface (d'autant plus que R est petit), et leur résultante a une composante normale (2.15) qu'il faut compenser par un « saut de contrainte normale ». En fluides parfaits, ce saut de contrainte normale se traduit exactement par un saut de pression,

$$p_1 - p_2 = \gamma \frac{1}{R} , \qquad (2.17)$$

qui exprime que dans le cas de la figure 2.2 il existe une supression dans le fluide 1. Les formules (2.16) et (2.17) sont valables dans le cas d'une interface « concave », pour laquelle le centre de courbure se trouve du côté du fluide 1. Dans le cas d'une interface « convexe », pour laquelle le centre de courbure se trouve du côté du fluide 2, on peut se convaincre (faire un dessin) que le saut de contrainte normale (donc de pression en fluides parfaits) est opposé. Pour cette raison, on définit le rayon de courbure de façon algébrique :

- R > 0 dans le cas d'une interface « concave », pour laquelle le centre de courbure se trouve du côté du fluide 1;
- R < 0 dans le cas d'une interface « convexe », pour laquelle le centre de courbure se trouve du côté du fluide 2.

Alors dans les deux cas les formules (2.16) et (2.17) sont valables.

#### 2.3.3 Cas d'une interface courbe tridimensionnelle

Dans le cas d'une interface courbe tridimensionnelle, on peut considérer en un point quelconque M un plan tournant, perpendiculaire en M au plan tangent à la surface. Ce plan intersecte la surface considérée en une courbe. À chacune des courbes ainsi construite est associée sa courbure en M, inverse du rayon de courbure de cette courbe. Les valeurs minimum et maximum de la courbure définissent les *deux rayons de courbure principaux*  $R_1$  et  $R_2$ . En général, ces rayons sont différents et, dans ce cas, les plans correspondants, dits de « courbure principale », sont perpendiculaires entre eux, comme cela est présenté sur la figure 2.3 [ cf. *Courbure* sur Wikipedia ]. En écrivant la loi d'évolution de la quantité de mouvement d'un petit élément de surface centré en M, on peut se convaincre que dans les deux plans de courbure principale la situation est analogue à celle de la figure 2.2, d'où des contributions de même forme (2.15),

$$-\gamma \frac{d^2S}{R_1} \overline{\mathbf{n}}$$
 et  $-\gamma \frac{d^2S}{R_2} \overline{\mathbf{n}}$ 

avec  $\overline{\mathbf{n}}$  la normale unitaire à l'interface allant du fluide 1 vers le fluide 2. On en déduit la condition de saut

$$\overline{\overline{\sigma}}_2 \cdot \overline{\mathbf{n}} - \overline{\overline{\sigma}}_1 \cdot \overline{\mathbf{n}} = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \overline{\mathbf{n}} \qquad (2.18)$$

Dans cette formule les rayons de courbure sont algébriques ; dans chaque plan de courbure principale la convention de la section 2.3.2 doit être appliquée. On peut aussi noter que dans le cas d'une interface bidimensionnelle, où l'un des rayons de courbure est infini, la formule (2.18) redonne (naturellement!) la formule (2.16). En général on peut définir un champ de normale sortante unitaire  $\bar{\mathbf{n}}$  à l'interface, prolongé de façon régulière de part et d'autre de l'interface. Par exemple, si une interface est définie par

$$z = \zeta(x,y) ,$$

on utilisera

$$\overline{\mathbf{n}} = \frac{\overline{\mathbf{\nabla}}(z-\zeta)}{||\overline{\mathbf{\nabla}}(z-\zeta)||}$$

a priori régulière dans un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  contenant l'interface. On peut alors montrer que

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \operatorname{div}(\overline{\mathbf{n}}) \tag{2.19}$$

soit la « courbure » au point considéré de l'interface. La condition de saut (2.18) s'écrit alors

$$\overline{\overline{\sigma}}_2 \cdot \overline{\mathbf{n}} - \overline{\overline{\sigma}}_1 \cdot \overline{\mathbf{n}} = \gamma \operatorname{div}(\overline{\mathbf{n}}) \overline{\mathbf{n}} \qquad (2.20)$$

Dans le cas de fluides parfaits, les tenseurs des contraintes se réduisent à la contribution des pressions, et on obtient la *condition de saut* dite *de Laplace* 

$$p_1 - p_2 = \gamma \operatorname{div}(\overline{\mathbf{n}}) \quad . \tag{2.21}$$



Fig. 2.3 – En couleurs dans la version PDF. Représentation d'une interface tridimensionnelle quelconque et des plans dont les intersections avec l'interface possèdent des cercles osculateurs de rayon  $R_1$  et  $R_2$ , rayons de courbure principaux au point considéré. En l'occurrence  $R_1$  et  $R_2$  sont de signes opposés.

# Chapitre 3

# Ondes et instabilités -Acoustique et ondes d'interface

Comme discuté brièvement à la fin de la section 1.6.2, le caractère non linéaire du terme inertiel de l'équation de Navier-Stokes est source d'une grande richesse de comportements. À cause de cette non-linéarité, de petites perturbations d'un écoulement dit « de base » peuvent éventuellement s'amplifier, conduisant ainsi à une « *instabilité* » de cet écoulement de base. Dans la section 3.1, on introduit de façon relativement générale la méthode de l'*analyse linéaire de stabilité en modes normaux*, qui permet de mettre en évidence des ondes en général, et, parfois, des instabilités. Dans le cas d'ondes neutres, on donne des éléments sur leur vitesse de groupe, et leur caractère « *dispersif* » ou non. Cette méthode est mise en œuvre avant tout en fluides parfaits, même si le problème 3.2 proposé en complément considère des fluides visqueux. On s'intéresse ainsi aux *ondes acoustiques* dans la section 3.2, ce qui permet de discuter d'effets de *compressibilité*, puis aux *ondes d'interface* dans la section 3.3, ce qui permet de discuter d'effets de *tension superficielle…* et, comme promis, d'*instabilités* !..

# 3.1 Généralités - Analyse linéaire de stabilité - Dispersion

#### 3.1.1 Principes de l'analyse linéaire de stabilité en modes normaux

L'analyse linéaire de stabilité en modes normaux est une méthode qui permet d'étudier la stabilité d'une configuration de base « simple » d'un système fluide. Par « simple », on entend ici <sup>1</sup> une configuration qui possède des symétries, notamment, une géométrie et des champs invariants par translations dans deux directions de l'espace, disons, les directions x et y d'un repère cartésien Oxyz. On peut imaginer un fluide totalement homogène, au repos, ou un système à deux fluides homogènes, l'un surmontant l'autre, au repos (figure 3.1a), ou une configuration de même géométrie, mais dans laquelle chaque fluide se déplace avec une vitesse uniforme (figure 3.2a). Cette configuration est donc caractérisée par la donnée des champs de pression et vitesse de base <sup>2</sup>

$$p = p(z), \quad \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{V}}(z).$$
 (3.1)

<sup>1.</sup> Pour une présentation plus générale et complète de l'analyse linéaire de stabilité, cf. Plaut (2022).

<sup>2.</sup> En compressible il faudra rajouter le champ de masse volumique, cf. la section 3.2. Dans l'étude de la stabilité d'une interface, il faudra rajouter un champ caractérisant la position de l'interface, cf. la section 3.3. Mentionnons que l'on peut affronter des cas où p contient un terme en Gx, par exemple, en écoulements en conduite, cf. Plaut (2022).

Physiquement, toutes sortes de « *bruits* » et « *vibrations* » existent toujours, de sorte qu'il faut se poser la question de l'évolution temporelle de cette configuration perturbée, à l'instant t = 0, de la manière suivante<sup>3</sup> :

$$p = p(z) + p'(x,z,0), \quad \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{V}}(z) + \overline{\mathbf{v}}'(x,z,0).$$
 (3.2)

On suppose que les **perturbations initiales** de pression p'(x,z,0) et vitesse  $\overline{\mathbf{v}}'(x,z,0)$  sont petites. Par continuité, elles le restent pendant un certain temps, temps pendant lequel on peut **linéariser** les équations d'évolution du système fluide afin de calculer la valeur, à un instant t > 0, des **perturbations actuelles** de pression p'(x,z,t) et vitesse  $\overline{\mathbf{v}}'(x,z,t)$ , telles que les champs actuels soient

$$p = p(z) + p'(x,z,t), \quad \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{V}}(z) + \overline{\mathbf{v}}'(x,z,t). \quad (3.3)$$

L'invariance par translations dans la direction x et le caractère linéaire (a priori temporaire !) de l'évolution permettent de décomposer les perturbations initiales de tous les champs en **modes de Fourier** en x, et de rechercher, en passant en complexes, des solutions de la forme

$$p' = \operatorname{Re}\left\{\sum_{k} A(k)P(k,z)\exp(ikx + \sigma(k)t)\right\}, \qquad (3.4a)$$

$$\overline{\mathbf{v}}' = \operatorname{Re}\left\{\sum_{k} A(k)\overline{\mathbf{W}}(k,z) \exp(ikx + \sigma(k)t)\right\}.$$
(3.4b)

Par linéarisation, chaque « mode » (= chaque terme dans la somme sur k) évolue indépendamment des autres. On peut donc pour les calculs se restreindre à un seul mode dit « mode normal », c'est-à-dire supprimer la somme sur k des équations (3.4). Le nombre d'onde k du mode, égal à  $2\pi/\lambda$  avec  $\lambda$  la longueur d'onde, est un paramètre géométrique que l'on se donne, à faire varier. Le nombre complexe  $\sigma(k)$ , qui dépend aussi a priori de tous les paramètres de contrôle géométriques et fluides du système, apparaît comme la valeur propre temporelle du système des équations d'évolution linéarisées, dans lequel on peut appliquer (après passage en complexes) les règles

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \rightsquigarrow \quad ik \;, \quad \frac{\partial}{\partial t} \quad \rightsquigarrow \quad \sigma(k) \;.$$
 (3.5)

Pratiquement, dans les cas étudiés ici,  $\sigma(k)$  apparaîtra comme la solution d'une équation caractéristique. La signification physique d'une solution « mode normal » calculée s'obtient en explicitant les complexes A = A(k), l'amplitude du mode, et  $\sigma = \sigma(k)$ , sa valeur propre temporelle :

$$A = |A| \exp(i \arg A), \quad \sigma = \sigma_r + i\sigma_i.$$
(3.6)

Du fait que

$$\operatorname{Re}[A\exp(ikx + \sigma t)] = |A| \cos(kx + \sigma_i t + \arg A) \exp(\sigma_r t), \qquad (3.7)$$

trois cas sont à distinguer, concernant le caractère amplifié ou non des modes :

- soit  $\sigma_r > 0$ , auquel cas on a affaire à un mode **amplifié**; la configuration de base est instable;
- soit  $\sigma_r = 0$ , auquel cas on a affaire à un mode *neutre*; la configuration de base est marginalement stable vis-à-vis de ce mode;
- soit  $\sigma_r < 0$ , auquel cas on a affaire à un mode **amorti**; la configuration de base est stable vis-à-vis de ce mode.

<sup>3.</sup> On fait une étude bidimensionnelle dans le plan xOz pour simplifier.

Dans le cas  $\sigma_r > 0$ ,  $\sigma_r$  est le **taux de croissance** temporel du mode amplifié; dans le cas  $\sigma_r < 0$ ,  $-\sigma_r$  est le **taux d'amortissement** temporel du mode amorti. Dans le premier cas, le mode amplifié par l'**instabilité** est une **petite perturbation** qui devient une **grande perturbation** : ce phénomène, illustré par exemple sur les figures 3.3 et 3.4, est l'essence même d'une instabilité. Il doit être enfin clair que la configuration de base est **stable** si tous les modes normaux de perturbation sont amortis, **instable** dès qu'il existe un mode normal de perturbation amplifié.

De même, trois cas sont à distinguer concernant le caractère propagatif ou non des modes :

- soit σ<sub>i</sub> > 0, auquel cas on pose σ<sub>i</sub> = ω et le mode considéré, oscillant, est une onde gauche se propageant à la vitesse de phase -ω/k;
- soit  $\sigma_i = 0$ , auquel cas le mode considéré est **non oscillant**;
- soit σ<sub>i</sub> < 0, auquel cas on pose σ<sub>i</sub> = -ω et le mode considéré, oscillant, est une onde droite se propageant à la vitesse de phase ω/k.

Dans les cas  $\sigma_i \neq 0$ ,  $\omega = |\sigma_i|$  est la **fréquence angulaire** de l'onde, égale à  $2\pi/T$  avec T la période temporelle de l'onde;  $f = 1/T = \omega/(2\pi)$  est la **fréquence** de l'onde.

Les cas où les modes les plus « dangereux », de  $\sigma_r > 0$  maximum, correspondent à  $k \neq 0$ , conduisent à l'émergence de motifs structurés de longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$  finie, on appelle donc ces instabilités *structurantes*. Au contraire, si les modes les plus « dangereux » correspondent à k = 0, on appelle les instabilités *homogènes*.

Cette étude se fait effectivement en fonction des paramètres de contrôle du système. Lorsque l'on observe un changement des propriétés de stabilité d'une configuration par variation d'un paramètre de contrôle, on a une *« bifurcation »*.

#### 3.1.2 Cas d'ondes neutres : vitesse de groupe et « dispersion »

Dans le cas d'ondes neutres droites<sup>4</sup>, la relation pour la valeur propre temporelle

$$\sigma = -i\omega = \sigma(k)$$

peut se récrire de façon équivalente comme la « relation de dispersion »

$$\omega$$
 = fréquence angulaire =  $\omega(k = \text{ nombre d'onde})$ . (3.8)

On considère un « paquet » ou superposition de telles ondes, de nombres d'ondes proches de k, tel que un champ fluide, la pression ou une composante de vitesse à z donné, ou encore une position d'interface, s'écrit, en vertu des équations (3.4),

$$\zeta(x,t) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{q \ll k} A(k+q) \ F(k+q) \ e^{i[(k+q)x - \omega(k+q)t]}\right\}.$$
(3.9)

Par exemple, si  $\zeta(x,t) = p(x,z,t)$ , alors F(k+q) = P(k+q,z). En posant

$$\widehat{A}(k+q) = A(k+q) F(k+q) ,$$

il vient

$$\zeta(x,t) = \operatorname{Re}\left\{\sum_{q \ll k} \widehat{A}(k+q) \ e^{i[(k+q)x - \omega(k+q)t]}\right\}.$$
(3.10)

<sup>4.</sup> Un raisonnement similaire peut se faire pour des ondes neutres gauches.

Effectuons autour de k le développement limité de la fréquence angulaire

$$\omega(k+q) = \underbrace{\omega(k)}_{\omega_0} + \underbrace{\omega'(k)}_{v_g(k)} q + O(q^2) .$$
(3.11)

Il vient

$$\zeta(x,t) \simeq \operatorname{Re}\left\{E(x,t) \ e^{i(kx-\omega_0 t)}\right\}$$
(3.12)

où  $e^{i(kx-\omega_0 t)}$  est une « **porteuse** » oscillant rapidement, alors que

$$E(x,t) = \sum_{q \ll k} \widehat{A}(k+q) \ e^{i[qx - v_g(k)qt]} \ dq = B(x - v_g(k)t)$$
(3.13)

ne contient que des modes de Fourier de petits nombres d'ondes q - grandes longueurs d'ondes  $2\pi/q$ ; c'est donc une « *enveloppe lentement variable* ». L'équation (3.13) montre que les « modulations de la porteuse » caractérisées par l'enveloppe se propagent à la *vitesse de groupe* 

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk}$$
(3.14)

Des ondes sont **dispersives** si différents paquets d'ondes centrés sur différents nombres d'ondes k ont des enveloppes se propageant à différentes vitesses de groupe, ce qui entraîne une perte de cohérence progressive des paquets les uns par rapport aux autres. Cela est donc si et seulement si  $v_q$  dépend de k. Cela équivaut à avoir une **vitesse de phase** 

$$v_p(k) = \frac{\omega}{k} \tag{3.15}$$

qui dépend de k.

On le montre par contraposition : avoir des ondes *non dispersives* équivaut à avoir

$$v_g(k) = \frac{d\omega}{dk} = constante = c \iff \omega = ck \iff v_p = \frac{\omega}{k} = c$$
 indépendant de  $k$ .

## 3.2 Les ondes sonores - De la compressibilité dans les fluides

On va mettre en œuvre ce qui précède dans le cas de *fluides compressibles en évolution adiabatique réversible*, pour mettre en évidence des *ondes neutres* très importantes, à savoir les *ondes sonores*. On utilisera en cours et TD le *modèle du fluide parfait*. Cependant, le problème 3.2 examine l'effet de la viscosité sur les ondes sonores : on recommande aux élèves de s'y intéresser...

Cette section donne donc des éléments en **acoustique**<sup>5</sup>. Les ondes ainsi désignées, dans l'acception stricte du mot acoustique, c'est-à-dire les vibrations de l'air ou l'eau que l'oreille humaine peut entendre, ont une fréquence f dans l'intervalle

$$16 \text{ Hz} \lesssim f \lesssim 16 \text{ kHz}$$
 (3.16)

<sup>5.</sup> Du grec « akouein » : entendre.

#### 3.2.1 Loi thermodynamique : compressibilité isentropique

Comme discuté à la fin de la section 1.6.1, en fluide compressible on a besoin d'une loi thermodynamique pour relier la masse volumique  $\rho$  à la pression p. Comme les ondes sonores correspondent à des oscillations rapides des particules fluides, on suppose que ces particules n'ont pas le temps d'échanger de la chaleur pendant ces oscillations, i.e., que les ondes sonores correspondent à des phénomènes **adiabatiques réversibles** ou **isentropiques**. On va de plus considérer ces ondes comme de **petites perturbations** du fluide au repos, caractérisé par

$$p = p_0, \quad \rho = \rho_0, \quad \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}}.$$
 (3.17)

Ainsi, en présence des ondes

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}} + \overline{\mathbf{v}}' = \overline{\mathbf{v}}', \quad (3.18)$$

avec p',  $\rho'$ ,  $\overline{\mathbf{v}}'$  les perturbations de p,  $\rho$ ,  $\overline{\mathbf{v}}$ , qui seront calculées par analyse linéaire de stabilité. La loi thermodynamique linéarisée d'intérêt relie directement la perturbation de pression à la perturbation de masse volumique, suivant

$$\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_{S} p' . \tag{3.19}$$

Elle a une interprétation physique claire : si p' > 0, le fluide est comprimé, sa masse volumique augmente en conséquence d'une quantité  $\rho' > 0$ . Traditionnellement, on introduit le *coefficient de compressibilité isentropique* du fluide<sup>6</sup>

$$\kappa_S = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_S = \left. -\frac{1}{\mathcal{V}} \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p} \right|_S$$
(3.20)

en notant  $\mathcal{V}$  le volume occupé par une particule fluide. La relation (3.19) est donc écrite sous la forme équivalente

$$\rho' = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_S p' = \rho_0 \kappa_S p' \quad . \tag{3.21}$$

#### 3.2.2 Théorie générale en milieu fluide « infini »

En utilisant alors un modèle de *fluide parfait non pesant*, la loi de conservation de la masse linéarisée conduit à

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \overline{\mathbf{v}} , \qquad (3.22)$$

tandis que l'équation d'Euler linéarisée s'écrit

$$\rho_0 \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} = -\overline{\mathbf{\nabla}} p' . \tag{3.23}$$

On a négligé le terme de pesanteur : on reviendra sur cette approximation dans le problème 3.1. Au final, il vient l'équation de propagation (dite aussi équation de d'Alembert)

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \kappa_S} \Delta p' . \qquad (3.24)$$

6. Alternativement on pose parfois

$$\kappa_S = \frac{1}{K_S}$$

avec  $K_S$  le module de compression isentropique.
En cherchant un mode normal de la forme  $\exp(ikx + \sigma t)$ , on obtient l'équation caractéristique

$$\sigma^2 = -\frac{k^2}{\rho_0 \kappa_S} \; .$$

La valeur propre temporelle  $\sigma$  est donc imaginaire pure, de la forme  $i\omega$ , avec  $\omega$  proportionnelle à k. La vitesse de phase est donc

$$v_p = c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \kappa_S}} = \frac{1}{\sqrt{\rho \kappa_S}} \qquad (3.25)$$

Ainsi, les ondes sonores sont des **ondes neutres** (ni amplifiées ni amorties) **non dispersives**, ce qui est heureux pour les amateurs de musique !... Par symétrie, plus précisément, isotropie, les ondes gauches et droites, et même, toute onde sonore se propageant dans n'importe quelle direction ont toutes la vitesse de phase (et vitesse de groupe !..) c donnée par (3.25); on dit souvent que c est la « célérité » des ondes sonores. L'équation (3.23) montre aussi que, dans le cas d'une onde pure normale « plane » en  $\exp(ikx + \sigma t)$ , la vitesse des particules fluides est dans la direction du vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$ , il s'agit d'**ondes longitudinales de compression dilatation**. Le problème 3.1, traité en TD, permettra justement une analyse fine de la structure d'une telle onde, et de justifier a posteriori les approximations faites ici par des calculs d'ordre de grandeur. Pour une étude très fine de l'influence de la **viscosité**, cf. le problème 3.2...

Il est justifié de se poser la question d'ondes non plus planes mais à symétrie sphérique; de telles ondes seront étudiées rapidement en cours.

Afin de concrétiser cette théorie, il est temps de faire des hypothèses sur la nature du fluide!

#### 3.2.3 Cas des gaz parfaits

Dans un  $gaz \ll parfait \gg$  tel que l'air à température ambiante, pour estimer  $\kappa_S$  on part de la loi de Laplace

$$p\mathcal{V}^{\gamma^g} = constante$$
 (3.26)

valable lors d'une transformation adiabatique, avec

$$\gamma^g = \frac{C_p}{C_{\mathcal{V}}} = \frac{\text{capacité calorifique à pression constante}}{\text{capacité calorifique à volume constant}}$$
. (3.27)

On en déduit que

$$\kappa_S = -\frac{1}{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p} \Big|_S = \frac{1}{\gamma^g p} , \qquad (3.28)$$

d'où

$$c = \sqrt{\frac{\gamma^g p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma^g RT}{M}}$$
(3.29)

en utilisant la loi des gaz parfaits, R = 8,314 J/K/mol étant la constante des gaz parfaits, T la température en Kelvins et M la masse molaire du gaz. Pour l'air, gaz essentiellement diatomique,

$$\gamma^g = \frac{7}{5}$$
 et  $M = 29,0$  g/mol (3.30)

donnent, à température ambiante (20 °C) et à une atmosphère,

$$\kappa_S = 7,05 \ 10^{-6} \ \text{Pa}^{-1} \quad \text{et} \quad c = 343 \ \text{m/s} .$$
(3.31)

La vitesse c ainsi prédite est bien celle mesurée expérimentalement, ce qui permet de valider la théorie développée ici !

En général on peut remarquer que, compte tenu des relations

$$R = N_{\rm A} k \quad \text{et} \quad M = N_{\rm A} m \tag{3.32}$$

avec  $N_{\rm A}$  le nombre d'Avogadro, k la constante de Boltzmann et m la masse d'une molécule ou atome, on a

$$c = \sqrt{\gamma^g} V_{\text{therm}} \simeq V_{\text{therm}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$
 (3.33)

vitesse d'agitation thermique typique du gaz - cf. l'équation (1.54) et la discussion correspondante.

#### 3.2.4 Cas des liquides

Dans ce cas la théorie est moins prédictive, et on part plutôt de la vitesse du son mesurée expérimentalement, soit, dans l'eau à température ambiante,

$$c \simeq 1400 \text{ m/s}$$
, (3.34)

pour en déduire, en cohérence avec la formule (3.25), la compressibilité

$$\kappa_S \simeq 5 \ 10^{-10} \ \mathrm{Pa}^{-1} \ .$$
 (3.35)

Par comparaison avec (3.31), on observe naturellement que l'eau est bien moins compressible que l'air.

#### 3.2.5 Critère d'effets de compressibilité dans un écoulement macroscopique

Comme on le verra dans le problème 3.1, les ondes sonores sont typiquement associés à des écoulements « microscopiques » de faibles vitesses physiques (inférieures à 10 cm/s) et faibles déplacements (inférieurs à 30  $\mu$ m). Pour que des effets de compressibilité se manifestent dans des écoulements « macroscopiques » de vitesses physiques plus grandes et plus grands déplacements, il faut que l'amplitude réduite  $\rho'/\rho_0$  des fluctuations macroscopiques de masse volumique soit de l'ordre de 1%. D'après les théorèmes de Bernoulli, les fluctuations macroscopiques de pression sont de l'ordre de

$$p' \simeq \rho_0 V^2$$

avec V l'ordre de grandeur de la vitesse de l'écoulement macroscopique. La relation thermodynamique (3.21) donne alors

$$\rho'/\rho_0 = \kappa_S p' \simeq \kappa_S \rho_0 V^2 \simeq M^2 \tag{3.36}$$

avec le nombre de Mach<sup>78</sup>

$$M = \frac{V}{c}$$
 (3.37)

Ainsi le nombre de Mach doit être de l'ordre de 1/10 au moins pour que des effets de compressibilité influent sur un écoulement macroscopique. Le couplage entre ces effets de compressibilité et des écoulements macroscopiques rapides conduit à des effets importants tels celui de la création d'« ondes de choc »...

<sup>7.</sup> En hommage au physicien et philosophe autrichien Ernst Mach, actif à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle.

<sup>8.</sup> Dans un écoulement « microscopique » associé à une onde « linéaire », cf. le problème 3.1, la relation « linéaire » entre les fluctuations de masse volumique, pression et vitesse conduit à  $\rho'/\rho_0 \simeq M^1$  et non  $M^2$ ...

#### 3.2.6 Problèmes et exercice sur les ondes sonores

# Problème 3.1 Étude détaillée d'ondes sonores planes en milieu semi-infini

On revient ici de façon plus précise sur les calculs faits en cours, dans le cas d'une **onde** sonore plane dans un milieu fluide infini, à savoir, pour les applications numériques, de l'air en conditions « standard »,  $p_0 = 1$  atm, T = 20 °C. Cette onde est caractérisée par une perturbation de pression de la forme

$$p' = P \cos(kx - \omega t) \quad . \tag{3.38}$$

1 Calculez la perturbation de masse volumique  $\rho'$ , et montrez que l'amplitude R des fluctuations qu'elle décrit peut s'exprimer en fonction de P et c seulement,

$$R = .$$
 (3.39)

2 Calculez le champ de vitesse  $\overline{\mathbf{v}}$  associé à l'onde sonore. Montrez que l'amplitude V des fluctuations de vitesse ne dépend que de P,  $\rho_0$  et c,

$$V = . (3.40)$$

**3** On admet qu'à l'échelle de la longueur d'onde d'une onde sonore, la configuration de base (cf. l'équation 3.17) est bien homogène, malgré la présence du champ de pesanteur terrestre  $\overline{\mathbf{g}}$ . Montrez par contre que les approximations qui ont consisté à négliger

1. le terme non linéaire inertiel d'advection,

- 2. le terme visqueux
- 3. et le terme de pesanteur

dans l'équation de Navier-Stokes pour les perturbations peuvent être quantifiées par trois relations d'ordre de grandeur

Observant que vous êtes déjà en mesure de valider H2 et H3, faites-le en évaluant numériquement les rapports impliqués, devant être petits, dans les cas les plus défavorables en terme de fréquence des ondes sonores.

4 Calculez le champ de déplacement lagrangien des particules fluides <sup>9</sup> associé à l'onde,

$$\overline{\mathbf{u}}(\overline{\mathbf{X}},t) = \overline{\mathbf{x}}(\overline{\mathbf{X}},t) - \overline{\mathbf{X}}$$

dans l'hypothèse de petits déplacements et en régime oscillant établi. Il ne faut donc pas voir **X** comme une position de référence à un instant de référence, mais plutôt comme la *position moyenne* de la particule fluide, qui repère de façon non ambiguë celle-ci. Afin de pouvoir résoudre l'équation différentielle ordinaire rencontrée, non linéaire, vous ferez l'hypothèse de petits déplacements,

$$\mathbf{H4} \iff U \ll \lambda = 2\pi/k , \qquad (3.42)$$

<sup>9.</sup> Au sens de la mécanique des milieux continus, cf. la section 1.1!

avec U l'amplitude des fluctuations de position. Montrez que U ne dépend que de V et  $\omega$ ,

$$U = . (3.43)$$

Représentez le champ  $\overline{\mathbf{u}}$  à un instant t particulier, en indiquant aussi avec des + (resp. -) les régions où p' est maximum (resp. minimum). Expliquez la physique et le terme « onde longitudinale de contraction-dilatation ».

5 On suppose que cette onde est produite par une membrane plane (on peut penser à la membrane d'une « enceinte » de chaîne HIFI) située en moyenne en x = 0, et mise en vibration longitudinale avec le champ de déplacement calculé en question 4, évalué en X = 0. Représentez cette situation sur un schéma. Calculez la puissance  $P_{\text{pression}}$  développée par cette membrane sur le fluide. On définit l'*intensité acoustique physique* de l'onde comme la puissance surfacique moyennée dans le temps

$$I = \frac{1}{S} \langle P_{\text{pression}} \rangle_t \tag{3.44}$$

avec S la surface de la membrane en contact avec le fluide. Montrez que

$$I = \frac{1}{2}PV = \frac{1}{2}\frac{P^2}{\rho_0 c} = \frac{1}{2}\rho_0 cV^2 \qquad (3.45)$$

6.1 Dorénavant, on considère une onde de *fréquence* « *conversationnelle* » *ou* « *musicale* » *typique* 

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1 \text{ kHz} , \qquad (3.46)$$

qui est, à peu de choses près, la fréquence du do5 des musiciens <sup>10</sup>. On suppose de plus que le fluide est l'*air en conditions ambiantes*. Calculez la *longueur d'onde* correspondante, et commentez succinctement.

6.2 On définit l'intensité acoustique en décibels en utilisant une échelle logarithmique,

$$I_{\rm dB} = 10 \, \log(I/I_0)$$
, (3.47)

où log désigne le logarithme en base 10, et l'intensité physique de référence

$$I_0 = 10^{-12} \,\mathrm{W/m^2} \,.$$
 (3.48)

Une donnée physiologique importante, pour un humain, est la définition du seuil de souffrance physique associé à un son « très intense ». Il est donné par

$$I_{\rm dB} = 120 \; \rm dB \; .$$
 (3.49)

Pour une onde sonore « très intense » correspondant exactement à ce seuil, calculez numériquement I puis toutes les amplitudes de fluctuations P, R, V et U, commentez les résultats obtenus et montrez que les hypothèses **H1** équation (3.41) et **H4** équation (3.42) sont vérifiées.

<sup>10.</sup> La fréquence du do5 vaut 1046 Hz, c'est la fréquence de la 64<sup>ème</sup> touche de votre piano en partant de la gauche,
cf. la page wikipédia *Fréquences des touches du piano*.

**6.3** Une autre donnée physiologique importante, toujours pour un humain, est le seuil d'audition à 1 kHz, de l'ordre de

$$I_{\rm dB} = 0 \ {\rm dB} \ .$$
 (3.50)

Calculez l'intensité acoustique physique correspondante puis les amplitudes de fluctuations P, R, V et U. Dans quel rapport sont-elles avec celles du son « très intense » étudié à la question précédente ? Discutez physiquement les résultats obtenus.

#### Exercice 3.1 Étude sommaire de l'effet « coup de bélier » dans une conduite d'eau

On considère des écoulements d'eau dans une conduite. Le comportement mécanique de l'eau est supposé décrit par le modèle du fluide parfait compressible non pesant. On suppose en première approximation qu'à ces écoulements, même inhomogènes, peuvent se superposer des ondes sonores dont la célérité est la même qu'en milieu infini, c'est-à-dire c donnée par (3.34). Cette conduite comprend une longue section rectiligne située entre x = 0 et x = L. Partant d'une situation où de l'eau circule en écoulement uniforme à la vitesse

$$\overline{\mathbf{v}} = v_0 \overline{\mathbf{e}}_x$$
,

on ferme à l'instant t = 0, de façon quasi instantanée, une vanne située en x = L. On observe alors que l'eau s'arrête brutalement de couler dans une région, initialement localisée près de la vanne, qui s'étend en remontant la conduite à la vitesse du son. Dans toute cette région on a une surpression p' et une variation de masse volumique  $\rho'$  par rapport à la région en écoulement en amont, qui elle est approximativement à  $p_0$  et  $\rho_0$ . Faites un schéma de cette situation.

En calculant de deux façons différentes le taux d'évolution temporel de la quantité de mouvement de l'eau contenue dans la conduite entre x = 0 et  $L - \delta L$ ,  $\delta L$  étant une petite longueur positive, qui permet de rester dans le domaine liquide en amont de la vanne, évaluez la surpression p'. Commentez la formule obtenue,

$$p' = \delta p = , \qquad (3.51)$$

en faisant une application numérique, dans le contexte d'une grande installation industrielle.

#### Problème 3.2 Effets de la viscosité sur des ondes de type sonore

#### 1 Généralités

On étudie les phénomènes de **propagation et d'amortissement d'ondes de type sonore** dans un **fluide compressible visqueux** au repos. Dans un repère cartésien Oxyz, on utilise exactement les mêmes notations que dans le cours, la seule différence étant que les **ondes linéaires** sont maintenant « **généralisées** » puisqu'elles peuvent éventuellement être amorties. Après linéarisation des équations d'évolution des **perturbations** p' de **pression**,  $\rho'$  de **masse volumique** et  $\overline{\mathbf{v}}'$  de **vitesse** des valeurs de base  $p_0$ ,  $\rho_0$  et  $\overline{\mathbf{0}}$ , puis passage en champs complexes, le champ de vitesse prend la forme

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}' = \overline{\mathbf{V}} \exp[i(kx - \omega t)] . \tag{3.52}$$

Dans cette équation  $\overline{\mathbf{V}}$  est un vecteur uniforme, de composantes réelles, dont la direction dépend de la **polarisation** i.e. de la nature de l'onde,

- la *fréquence angulaire*  $\omega$  est réelle strictement positive;
- le *nombre d'onde* k est, par contre, complexe :

$$k = K + i\alpha \tag{3.53}$$

avec K = Re(k) > 0 le nombre d'onde classique,  $\alpha = \text{Im}(k)$  le coefficient d'atténuation s'il est non nul.

**1.1** En développant le facteur exponentiel dans l'équation (3.52), et en revenant en champ réel, expliquez pourquoi

- l'onde se « propage vers la droite », en établissant au passage l'expression de sa vitesse de phase c en fonction de ω et k;
- le facteur  $\alpha$  doit être positif ou nul,
- le facteur  $\alpha$  mesure l'« atténuation » s'il est non nul.

**1.2** Rappellez l'équation thermodynamique qui relie  $\rho'$  et p', en faisant apparaître  $c_0$ , la vitesse du son si le fluide était non visqueux.

1.3 Rappellez la forme de l'équation locale de conservation de la masse linéarisée.

1.4 En négligeant dorénavant tout effet de pesanteur, établissez la forme linéarisée de l'équation locale d'évolution de la quantité de mouvement, et nommez-là.

**1.5** Éliminez p' dans cette dernière équation, qui doit donc coupler  $\overline{\mathbf{v}}$  et  $\rho'$ .

§

### 2 Étude d'une onde de « contraction - dilatation »

Dans cette partie

$$\overline{\mathbf{V}} = U\overline{\mathbf{e}}_x \implies \overline{\mathbf{v}} = U \exp[i(kx - \omega t)] \overline{\mathbf{e}}_x . \tag{3.54}$$

**2.1** À partir de l'équation de conservation de la masse linéarisée, calculez, en régime oscillant établi, le champ complexe de fluctuations de masse volumique associé. Justifiez le terme « onde de contraction - dilatation ».

2.2 Explicitez la seule composante non triviale de l'équation de la quantité de mouvement sous la forme établie en 1.5, en champs complexes. Montrez que la « *relation de dispersion* » des ondes est de la forme

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 (1 - i\omega\tau)$$

où vous déterminerez le temps caractéristique  $\tau$ .

Indication :  $\tau$  ne dépend que de la viscosité cinématique du fluide et de la vitesse  $c_0$ .

#### **2.3** Calculez $K^2$ et $\alpha^2$ .

Indication : exprimez d'abord  $k^2$  d'après la « relation de dispersion » ci-dessus, puis calculez  $|k^2|$  et  $\operatorname{Re}(k^2)$ .

**2.4** Donnez la valeur physique de  $\tau$  pour de l'eau et de l'air à pression ambiante et température ambiante, T = 20 °C. Que peut-on en déduire concernant l'ordre de grandeur du produit  $\omega \tau$  pour une onde de type sonore?

**2.5** Compte tenu de l'observation quantitative faite sur le produit  $\omega \tau$ , à l'aide de développements limités, simplifiez l'expression de  $K^2$  puis celle de K puis celle de c. Montrez à partir de cette expression que l'effet de la viscosité sur la vitesse de phase du son est une très légère augmentation de celle-ci, que vous quantifierez. Pourrait-on mesurer cet effet ?

**2.6** Simplifiez les expressions de  $\alpha^2$  puis  $\alpha$  compte tenu de l'observation faite en **2.4**, à l'aide de développements limités. Pour de l'eau et de l'air à pression et température ambiantes, calculez  $\alpha$  puis le *facteur d'amortissement* exp $(-\alpha L)$ , sur une distance L = 10 m, d'une onde sonore de fréquence f = 1 kHz.

2.7 Concluez.

§

## 3 Étude d'une onde de « cisaillement »

Dans cette partie

$$\overline{\mathbf{V}} = V \overline{\mathbf{e}}_y \implies \overline{\mathbf{v}} = V \exp[i(kx - \omega t)] \overline{\mathbf{e}}_y . \tag{3.55}$$

**3.1** Que peut-on dire des fluctuations de masse volumique associées à cette onde ? Y a t'il des effets de contraction - dilatation ?

**3.2** Établissez la « *relation de dispersion* » de ces ondes. Calculez analytiquement K, c et  $\alpha$ . Commentez succinctement.

**3.3** Montrez que sur une *pseudo longueur d'onde*  $\lambda = 2\pi/K$ , le *facteur d'amortissement*  $\exp(-\alpha\lambda)$  prend pour ces ondes une valeur universelle très petite. Représentez dans le plan xy le champ de vitesse d'une onde typique, à un instant t fixé, expliquez la terminologie onde de « cisaillement » et concluez.

§

# 4 Question subsidiaire : application à la tomographie du globe terrestre

Dans le manteau terrestre, solide aux échelles de temps des ondes « sonores », se propagent des ondes de contraction - dilatation et des ondes de cisaillement. Que se passe t'il quand ces ondes arrivent dans le noyau de fer liquide de la Terre ? Expliquez comment ceci a permis de découvrir le noyau liquide.

Après cette excursion dans le monde des fluides compressibles, dorénavant, et dans toute la suite de ce module, on ne considérera plus que des fluides **incompressibles** !..



**Fig. 3.1** — Schéma de principe du système étudié pour le calcul d'*ondes à l'interface entre deux fluides*. Dans cette première étude, qui correspond à la section 3.3.1, seul le liquide est pesant. **a** : configuration de base ; **b** : configuration perturbée.

# **3.3** Ondes d'interface avec tension superficielle

Afin notamment de préparer l'étude, qui sera faite en TD, de phénomènes d'*instabilités*, et d'autre part de s'initier à l'étude de phénomènes *diphasiques*<sup>11</sup>, nous développons tout d'abord un *modèle à un seul fluide pesant* des *ondes à l'interface entre deux fluides au repos*. En TD, dans le problème 3.4, on prendra en compte les effets supplémentaires du *poids du fluide supérieur* et d'*écoulements de base* dans les deux fluides, ce qui permettra le déclenchement éventuel des *instabilités de Rayleigh-Taylor et Kelvin-Helmholtz...* Dans les deux cas, on utilisera le modèle des *fluides parfaits (incompressibles) en écoulements potentiels*, i.e., dans chaque fluide, le champ de vitesse s'écrit

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{\nabla}}\phi \tag{3.56}$$

avec  $\phi$  le potentiel des vitesses. Comme démontré dans le chapitre V de Combeau (2019), l'équation d'Euler peut s'intégrer pour montrer le « second théorème de Bernoulli »,

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho g H = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} + \hat{p} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{\overline{\mathbf{v}}^2}{2} + p + \rho g z \text{ est indépendant de } \overline{\mathbf{x}}$$
(3.57)

dans tout le domaine du fluide, avec z la coordonnée verticale.

#### 3.3.1 Modèle à un seul fluide pesant et fluides au repos : ondes neutres

Nous étudions la dynamique d'une interface entre un liquide, typiquement de l'eau, et un gaz, typiquement de l'air, comme représentée sur la figure 3.1. Le gaz supérieur est supposé « non pesant ». En conséquence, d'après (3.57), il est isobare : les écoulements qui pourraient y avoir lieu ne jouent aucun rôle et n'ont donc pas besoin d'être calculés.

On suppose que l'étendue de liquide est située au repos dans l'intervalle  $z \in [0,h]$ . On considère un *mode normal de perturbation* de la configuration de base représentée sur la figure 3.1a, dans lequel l'interface est repérée non plus par z = h mais

$$z = h + \zeta$$
 avec  $\zeta = \zeta(x,t) = \operatorname{Re}[A \exp(ikx) \exp(\sigma t)]$ . (3.58)

Cette proportionnalité en écriture complexe à  $A \exp(ikx + \sigma t)$  doit être vérifiée par tous les champs du mode normal. Ainsi, le potentiel de l'écoulement du mode considéré est, dans le liquide,

$$\phi = \phi_1 = \phi(x, z, t) = \operatorname{Re}\left\{A \ f(z) \ \exp(ikx + \sigma t)\right\}.$$
 (3.59)

<sup>11.</sup> Maintenant la lecture du chapitre 2 devient indispensable.

Grâce à la condition d'incompressibilité, à la condition d'imperméabilité du fond, et à la condition cinématique à l'interface, qui stipule qu'une particule qui s'y trouve à un instant donné y reste toujours<sup>12</sup>,

$$\frac{d}{dt}[z - (h + \zeta)] = 0 \quad \text{si} \quad z = h + \zeta , \qquad (3.60)$$

on montre que le potentiel de l'écoulement dans le liquide est donné par

$$\phi = \phi(x,z,t) = \operatorname{Re}\left\{A \; \frac{\sigma \; \cosh(kz)}{k \; \sinh(kh)} \; \exp(ikx + \sigma t)\right\}.$$
(3.61)

Ainsi, le champ de vitesse sous l'interface (sous la « vague ») est asservi à la cinématique de cette interface. En prenant en compte l'effet d'une **tension de surface**  $\gamma$  non nulle, il existe, d'après le chapitre 2, un saut de pression à l'interface liquide-gaz donné par la **loi de Laplace** 

$$p_1 - p_2 = \gamma \operatorname{div}(\overline{\mathbf{n}}) , \qquad (3.62)$$

avec  $\overline{\mathbf{n}}$  la normale sortante unitaire à l'interface, prolongée de façon régulière de part et d'autre de l'interface. Soit

$$\overline{\mathbf{n}} = \frac{\overline{\mathbf{\nabla}}[z - (h + \zeta)]}{||\overline{\mathbf{\nabla}}[z - (h + \zeta)]||} = \overline{\mathbf{e}}_z - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\overline{\mathbf{e}}_x + O(A^2) .$$
(3.63)

On obtient finalement, après calcul du champ de pression dans le liquide pesant par le second théorème de Bernoulli (3.57), que les valeurs possibles de  $\sigma$  à k fixé vérifient l'équation caractéristique

$$\rho\sigma^2 = -\rho gk \tanh(kh) - \gamma k^3 \tanh(kh) \tag{3.64}$$

où  $\rho$  est la masse volumique du liquide. En conséquence  $\sigma$  est un imaginaire pur, ce qui confirme que l'on a affaire à des **ondes neutres**. Posant  $\sigma = i\omega$ , on obtient la **relation de dispersion** donnant la **vitesse de phase** c de l'onde :

$$c^{2} = \left(\frac{\omega}{k}\right)^{2} = \underbrace{\frac{g}{k} \tanh(kh)}_{\text{terme de gravité}} + \underbrace{\frac{\gamma k}{\rho} \tanh(kh)}_{\text{terme capillaire}} \right|.$$
(3.65)

La fonction  $\omega(k)$  donnée par (3.65) est strictement croissante, ce qui signifie qu'à fréquence  $\omega$  donnée ne se propagent que des ondes, indifféremment droite ou gauche, de nombre d'onde k bien défini.

Pour une interface eau-air le coefficient de tension superficielle  $\gamma = 0.074$  N/m, donc le terme capillaire ne domine que pour des longueurs d'ondes  $\lambda = 2\pi/k$  plus petites que la *longueur capillaire* 

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} = 2,7 \text{ mm} ,$$
 (3.66)

auquel cas on a affaire à des **ondes capillaires**. Compte tenu de la petitesse de  $l_c$ , on a plus souvent affaire à des **ondes de gravité** vérifiant  $\lambda \gg l_c$  et

$$c^2 \simeq g \frac{\tanh(kh)}{k} . \tag{3.67}$$

<sup>12.</sup> Cf. la première section du chapitre 2.

On méditera avec profit les courbes exemples présentées en cours.

Au sens de la section 3.1.2, il s'agit d'ondes *dispersives* puisque c dépend de k (ou  $\omega$ ) i.e.

$$\frac{dc}{dk} \neq 0$$

Alors pour un paquet d'ondes centré sur  $k_0$  on constate une propagation de l'enveloppe à la *vitesse* de groupe

$$v_g(k_0) = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

Cette vitesse de groupe dépend du nombre d'onde moyen  $k_0$  lui-même, d'où la dispersion proprement dite du paquet d'ondes, dont les diverses composantes de nombre d'onde moyen  $k_0$ ,  $k'_0$ ,  $k''_0$ , etc... se « séparent » puisque chacune a sa propre vitesse de groupe.

#### 3.3.2 Problèmes et compléments sur les ondes d'interface

On propose un premier problème 3.3, analogue en certains points au problème 3.1, mais avec des aspects numériques, et une physique encore plus riche puisque les trajectoires des particules fluides révèlent un phénomène intéressant, cf. <u>la page Wikipedia 'Stokes drift'</u>. Suit le problème 3.4, un peu moins ambitieux sur le plan des calculs, mais très riche aussi d'un point de vue physique, comme illustré par deux compléments.

#### Problème 3.3 Étude détaillée d'ondes de surface en eau profonde

#### Première partie : calcul analytique d'une « onde linéaire »

1 Dans un repère Oxyz cartésien, avec z vertical, on considère une **couche d'eau très profonde** au repos, située dans le domaine z < 0. L'interface supérieure définie par z = 0 peut être considérée comme « libre » car de l'**air**, considéré **parfait non pesant**, se trouve dans le domaine z > 0. On considère une **perturbation** « **mode normal onde pure** » de cette configuration, dans laquelle l'**interface eau - air** est définie par

$$z = \zeta(x,t) = A\cos(kx - \omega t) , \qquad (3.68)$$

avec A une petite amplitude, k > 0 le nombre d'onde,  $\omega > 0$  la fréquence angulaire. On considère que l'eau est un fluide pesant parfait incompressible en écoulement potentiel 2D xz.

**1.a** Dans le cadre d'une *analyse linéaire de stabilité*, en explicitant une équation de conservation, une condition limite et une condition d'interface, montrez que le *potentiel des vitesses* dans l'eau peut être pris de la forme

$$\phi = \phi(x,z,t) = \Phi(z) \sin(kx - \omega t) , \qquad (3.69)$$

où  $\Phi(z)$ , d'ordre A, est connue. Déduisez-en les composantes  $v_x$  et  $v_z$  de la vitesse  $\overline{\mathbf{v}}$ .

**1.b** Afin de préparer le tracé des lignes de courant instantanées (cf. la question 6), on admet qu'il existe une *fonction courant*  $\psi(x,z,t)$  telle que

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{rot}}(\psi \overline{\mathbf{e}}_y) = (\overline{\mathbf{\nabla}} \psi) \wedge \overline{\mathbf{e}}_y = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \overline{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial \psi}{\partial x} \overline{\mathbf{e}}_z .$$
(3.70)

Démontrez, par un calcul différentiel intrinsèque, en considérant un déplacement infinitésimal  $d\bar{\mathbf{x}}$ sur une *ligne de courant* dans le plan xOz, tel que, par définition,  $d\overline{\mathbf{x}} \parallel \overline{\mathbf{v}}$  i.e.  $d\overline{\mathbf{x}} \wedge \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}}$ , que les iso- $\psi$  sont bien ces lignes de courant.

1.c Identifiez par un calcul intégro-différentiel une fonction courant de l'onde dont le champ de vitesse a été calculé en 1.a.

**2.a** Établissez l'expression des **pressions**  $p_e(x,z,t)$  dans l'eau et  $p_a(t)$  dans l'air, en faisant apparaître des fonctions du temps  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  inconnues a priori, et, pour ce qui est de  $p_e$ , des contributions de  $\phi$  et  $\overline{\mathbf{v}}$  qu'il est inutile d'expliciter à ce stade.

**2.b** En explicitant la condition d'interface qui traduit l'existence d'une *tension superficielle* là, montrez, par une prise de moyenne à préciser, que  $\alpha(t) = \beta(t)$ , puis établissez la *relation de* dispersion liant  $\omega$  et k. Validez ce calcul par comparaison à un résultat du cours.

# Deuxième partie : étude quantitative élémentaire et validation du modèle du fluide parfait

On considère dorénavant et jusqu'à la question 8 que l'onde se propage à la surface d'un lac très profond d'eau à 10 °C, avec une amplitude A = 50 cm et une longueur d'onde  $\lambda = 40$  m.

**3.a** Calculez numériquement le nombre d'onde et la vitesse de phase de cette onde; qualifiez en conséquence sa nature physique.

**3.b** Calculez numériquement la fréquence angulaire et la période temporelle de cette onde.

4 On désire valider l'hypothèse que l'eau se comporte comme un fluide parfait.

4.a Montrez par un calcul d'ordre de grandeur que le terme visqueux dans l'équation de Navier-Stokes est négligeable.

4.b Montrez par un calcul d'ordre de grandeur que le terme visqueux, proportionnel à la viscosité de l'eau, dans l'expression de la condition dynamique à l'interface est négligeable.

§

# Question de transition : système d'équations régissant les trajectoires

5 Explicitez analytiquement le système qu'il faut résoudre pour calculer, dans ce champ de vitesse, les *trajectoires* d'une particule fluide se trouvant à t = 0 en  $\overline{\mathbf{X}} = X\overline{\mathbf{e}}_x + Z\overline{\mathbf{e}}_z$ . Quelle est sa nature mathématique précise, et pourquoi est-il difficile à résoudre analytiquement?

§

#### Troisième partie : étude numérique avec Matlab du champ de vitesse et de trajectoires

6 Représentez, à t = 0, les *lignes de courant* du champ de vitesse et ce *champ de vitesse* dans le domaine

$$D = \{(x,z) \in [0, 40 \text{ m}] \times [-10 \text{ m}, 0]\}$$

Pour cela, faisant usage du fait que les valeurs de  $\psi$  et  $\overline{\mathbf{v}}$  n'importent, pour les tracés demandés, qu'à un facteur près, le cœur de votre programme a cette structure (attention les ... sont à corriger, notez aussi l'usage de l'opérateur .\* pour la multiplication terme à terme de 2 tableaux) :

```
% Grille = valeurs tabulées de x et z
[x,z]= meshgrid( linspace(0, 40, ...), linspace(..., ..., ));
% Valeurs tabulées de psi à un facteur près
psi= exp(k*z) .* ...;
% Lignes de courant : isocontours de la fonction courant psi
hold on; contour( x, z, psi)
% Imposer les intervalles voulus et un rapport d'aspect physique
axis([0 40 -10 0.5]); axis equal;
% Nouvelle grille moins fine
[x,z]= meshgrid( ..., linspace(-10, -2, 4));
% Valeurs tabulées de la vitesse à un facteur près
vx= exp(k*z) .* cos(k*x); vz= ...;
% Tracé de ce champ de vecteurs
quiver( x, z, vx, vz)
```

Reproduisez, avec quelques lignes de courant et vecteurs vitesses bien choisis, et aussi une courbe donnant la position de l'interface, ce schéma. Listez et commentez succinctement deux propriétés caractérisant la structure spatiale du champ de vitesse, visibles sur votre figure.

7 À une *position eulerienne*  $\overline{\mathbf{x}}$  fixée dans l'eau, décrivez la courbe décrite par  $\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}},t)$  quand t varie. Représentez la par une figure tracée à la main, et faites le lien avec la figure précédente.

8.1 Pour passer en *description lagrangienne*, résolvez numériquement le système écrit en question 5, pour calculer les *trajectoires* de deux particules fluides qui se trouvent à t = 0 en (x,z) = (0, -1) m et (0, -5) m, ce pendant 6 périodes temporelles de l'onde. Remarquez pour cela que ce système est déjà sous forme canonique en terme du vecteur colonne

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} , \text{ i.e. } \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} = \mathbf{G}(t,\mathbf{F}(t)) = \dots$$

Le cœur de votre (nouveau) programme a, pour ce qui concerne la 1<sup>ère</sup> particule, cette structure :

```
% Intervalle temporel avec 200 points
tint= linspace(0, 6*T, 200);
%% Trajectoire 1
[t1, F1]= ode45(@(t,F) G(t, F, k, omega, V), tint, [ 0 ; -1 ]);
x1= F1(:,1); z1= F1(:,2);
hold on; axis equal; plot(x1,z1)
%% Fonction qui définit l'équation différentielle
function res= G( t, F, k, omega, V)
res= V * [ exp(k*F(2)) * ... ; ... ];
end
```

avec V une amplitude caractéristique de la vitesse à calculer au début du programme. Représentez ces deux trajectoires dans le domaine

$$D' = \{(x,z) \in [-0,5 \text{ m}, 1,5 \text{ m}] \times [-6 \text{ m}, 0]\},\$$

et reproduisez ce schéma à la main sur votre copie.

Décrivez qualitativement et quantitativement, de façon précise, ces trajectoires, en mettant notamment en évidence une « *dérive* ».

Donnez une interprétation physique de ces trajectoires et de cette dérive.

8.2 Que montre la comparaison entre la figure des lignes de courant et celle des trajectoires?

# §

#### Quatrième partie : étude analytique « faiblement non linéaire » i.e. asymptotique

On revient au cas général de la 1<sup>ère</sup> partie, le **paramètre infinitésimal** est l'**amplitude** A. On admet qu'un calcul d'**onde non linéaire** dans ce système n'introduit pas de corrections à l'ordre  $A^2$ , c'est-à-dire que le champ de vitesse d'une onde non linéaire est

$$\overline{\mathbf{v}} = (\overline{\mathbf{v}} \text{ calculé en 1}^{\text{ère}} \text{ partie}) + O(A^3) = A\omega (V_x(x,z,t)\overline{\mathbf{e}}_x + V_z(x,z,t)\overline{\mathbf{e}}_z) + O(A^3).$$
 (3.71)

On veut étudier la *trajectoire d'une particule fluide jusqu'à l'ordre*  $A^2$ , à partir d'un développement asymptotique, début d'un développement en série entière en fonction de A, qui a sans doute un rayon de convergence strictement positif, de la forme

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + Ax_1(t) + A^2x_2(t) + O(A^3) \\ z(t) = z_0 + Az_1(t) + A^2z_2(t) + O(A^3) \end{cases}$$
(3.72)

**9.a** Identifiez les fonctions  $V_x$  et  $V_z$  de l'équation (3.71).

**9.b** En injectant les développements (3.72) dans les équations écrites en question 5, et en effectuant un développement en série de Taylor des fonctions  $V_x$  et  $V_z$ , identifiez  $\dot{x}_1 = dx_1/dt$ ,  $\dot{x}_2 = dx_2/dt$ ,  $\dot{z}_1 = dz_1/dt$  et  $\dot{z}_2 = dz_2/dt$ .

**9.c** Calculez  $x_1(t)$  et  $z_1(t)$ ; vous supposerez que les valeurs moyennes de ces fonctions sont nulles, i.e. : à l'ordre A,  $(x_0,z_0)$  sont les coordonnées de la position moyenne de la particule. Identifiez la nature géométrique de la trajectoire à l'ordre A, définie par A  $(x_1(t),z_1(t))$ . Commentez physiquement. Comparez précisément à l'étude numérique de la question 8 et concluez quand à la pertinence de ces calculs à l'ordre A.

**9.d** Calculez  $\dot{x}_2(t)$  et  $\dot{z}_2(t)$ . Montrez en particulier l'existence d'une **«** vitesse de dérive **»** à l'ordre  $A^2$  dans la direction x, dont vous donnerez un expression analytique. Commentez physiquement. Comparez précisément à l'étude numérique de la question 8 et concluez quand à la pertinence de ces calculs à l'ordre  $A^2$ .

#### Problème 3.4 Instabilités de Rayleigh-Taylor et Kelvin-Helmholtz

En se restreignant au cas de couches « profondes », le but de cet exercice est d'étendre les calculs faits en cours sur des ondes d'interface en prenant en compte de nouveaux phénomènes.

- 1. L'existence d'une masse volumique non nulle dans la phase supérieure, on développe donc un modèle à *deux fluides pesants*.
- 2. L'existence d'*écoulements de base uniformes i.e.* « *en bloc* » dans les deux fluides; il y a donc en général un saut de vitesse à l'interface, que l'on peut voir comme une nappe de vorticité localisée.



Fig. 3.2 – Schéma de principe de la situation pouvant conduire à des *instabilités de Rayleigh-Taylor et Kelvin-Helmholtz* étudiée dans le problème 3.4. Dans cette étude, les deux fluides sont pesants. a : configuration de base avec écoulements en bloc des deux fluides; b : configuration perturbée.

On étudie donc la stabilité d'une couche d'un fluide 1 de masse volumique  $\rho_1$  et de vitesse  $U_1$  située dans le demi-espace  $z \in \mathbb{R}^-$ , surmontée d'une couche d'un fluide 2 de masse volumique  $\rho_2$  et de vitesse  $U_2$  située dans le demi-espace  $z \in \mathbb{R}^+$ , comme cela est représenté sur la figure 3.2a. Cette configuration de base est caractérisée, dans chaque fluide j = 1, 2, par

$$\overline{\mathbf{v}}_j = U_j \overline{\mathbf{e}}_x , \quad p_j = p_{j0} - \rho_j gz . \tag{3.73}$$

1 Dans cette configuration de base, justifiez la forme des champs de pression  $p_1$  et  $p_2$ . Établissez la relation entre  $p_{10}$  et  $p_{20}$ . Montrez que toutes les conditions à l'interface sont vérifiées.

2 On considère, dans le cadre d'une analyse linéaire de stabilité, un mode normal de perturbation correspondant à une cote z d'interface définie par

$$\zeta = \zeta(x,t) = A \operatorname{Re}[\exp(ikx + \sigma t)], \qquad (3.74)$$

des champs de vitesse dans le fluide j = 1, 2

$$\overline{\mathbf{v}}_j = U_j \overline{\mathbf{e}}_x + \overline{\mathbf{\nabla}} \phi_j \quad \text{avec} \quad \phi_j = \operatorname{Re}[f_j(z) \exp(ikx + \sigma t)] , \qquad (3.75)$$

des champs de pression dans le fluide j = 1, 2

$$p_j = p_{j0} - \rho_j g z + p'_j$$
 avec  $p'_j = \operatorname{Re}[P_j(z) \exp(ikx + \sigma t)]$ . (3.76)

**2.1** Grâce à la condition d'incompressibilité, à la condition de vitesses bornées à l'infini, et à la condition cinématique à l'interface, calculez les fonctions  $f_1$  et  $f_2(z)$  en fonction de A,  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $\sigma$ , k et, bien sûr, z. Commentez physiquement.

**2.2** Calculez les fonctions  $P_1$  et  $P_2(z)$  donnant les perturbations de pression, à l'ordre A, dans les fluides 1 et 2. Commentez physiquement.

**2.3** Grâce à la condition dynamique à l'interface, en présence d'une tension superficielle  $\gamma$  à celle-ci, montrez que  $\sigma$  vérifie une équation caractéristique de la forme

$$a\sigma^2 + 2b\sigma + c = 0. ag{3.77}$$

2.4 Calculez  $\sigma$  en identifiant ses parties réelle et imaginaire. Donnez leurs interprétations physiques en discutant dans le même temps du devenir des perturbations. Vous mettrez en évidence l'existence possible d'*instabilités de Rayleigh-Taylor* si  $\rho_2 > \rho_1$ , de *Kelvin-Helmholtz* si  $U_1 \neq U_2$ . **3** D'après ce modèle, à partir de quelle vitesse de vent au-dessus d'une étendue d'eau au repos se créent des vagues ? Faites l'application numérique et commentez.

#### Indications:

Vous simplifierez le discriminant réduit  $\Delta'$  de l'équation caractéristique en prenant en compte le fait que  $\rho_2 \ll \rho_1$ . Vous déterminerez ensuite le nombre d'onde k optimal pour lequel  $\Delta'/k$  est maximal...





**Fig. 3.3** – Top : Setup devoted to the study of the *Rayleigh-Taylor instability*. Bottom : Snapshots showing the development of the Rayleigh-Taylor instability, as time goes by. For details, see text.

#### Complément 3.1 On the Rayleigh-Taylor Instability

On a former page of the web site <u>http://fluidlab.arizona.edu</u>, people of the Experimental Fluid Mechanics and Instability Laboratory of the Department of Aerospace and Mechanical Engineering at the University of Arizona showed the figure 3.3 and explained this :

'Rayleigh-Taylor instability is generated in our experiments by accelerating a tank containing the two fluids downward at a rate greater than the earth's gravitational acceleration. The experimental apparatus consists of a tank that is mounted to a linear rail system and attached by a cable to a weight and pulley system.

The bottom half of the tank is filled with a heavy liquid and the top half with a lighter liquid. The filled container is then hoisted to the top of the rail system and then oscillated in the horizontal direction giving the interface a sinusoidal initial perturbation. The tank is then released allowing the weight to pull it downward at a rate approximately twice that of the earth's gravitational field which produces a net gravitational pull approximately equal to that of the earth's but oriented upward. Thus, the initially stably-stratified system becomes unstable.

The fluids are visualized in these experiments using Planar Laser Induced Fluorescence. A fluorescent dye is mixed in one of the liquids and then illuminated with a sheet of laser light passing through the top of the container. The resulting fluorescent images are captured by a CCD camera which travels with the moving container. Picture above shows a sequence of images captured during one of these experiments. In these views the effective gravity pulls the lower heavier fluid upward as if the tank had been inverted but without the disrupted effects of actually turning over the tank.'



**Fig. 3.4** – **a** : Profil d'écoulement dans une *couche de cisaillement*. **b** : Développement de l'*instabilité de Kelvin-Helmholtz* d'une telle couche légèrement perturbée : lignes de courant en trait continus, suivi de particules fluides avec les disques pleins, pour différents instants t adimensionnés. **c** : Photographie de nuages par Brooks Martner, du NOAA Environmental Technology Laboratory.

#### Complément 3.2 Sur l'instabilité de Kelvin-Helmholtz

Elle peut exister en l'absence de tension superficielle, sans interface en tant que telle, et en présence d'un cisaillement « plus doux » qu'une discontinuité de vitesse. C'est le cas du profil de vitesse en « couche de cisaillement » de la figure 3.4a. L'instabilité correspondante peut se calculer en fluide parfait à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire numérique, par méthode numérique spectrale (Plaut et al. 2008). Elle conduit à l'amplification de *vortex* dont les lignes de courant sont montrées sur la figure 3.4b. En s'inspirant de Corcos & Sherman (1984), il est intéressant de suivre les trajectoires de l'« interface » située en y = 0, initialement plane, pendant le développement de l'instabilité. On calcule ainsi les trajectoires de points matériels régulièrement espacés à l'instant t = 0 sur la droite y = 0. On obtient les points de la figure 3.4b : l'« interface » s'enroule sous l'effet de l'écoulement associé aux vortex, de plus en plus intense - cf. aussi l'animation vidéo sur la page web du module. Une « pseudo-interface » qui s'enroule peut parfois se visualiser grâce à des nuages, comme le montre la figure 3.4c. Le résultat de cette instabilité est que les couches de fluides « inférieure » et « supérieure » à la couche de cisaillement se mélangent. Pour cette raison on dit que toute couche de cisaillement devient en général une « couche de *mélange* ». Ceci se produit par exemple dans la couche de cisaillement entre les gaz éjectés par un réacteur (turboréacteur, moteur fusée, etc...) et l'air ambiant.

# Chapitre 4

# **Couches limites**

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la *modélisation* et au *calcul* des *couches limites laminaires*. Cependant, on évoquera aussi l'existence des *couches limites turbulentes*, pour donner quelques résultats à leur sujet.

# 4.1 Introduction - Équations de Prandtl

On considère un *écoulement rapide* d'un *fluide newtonien incompressible* autour d'un *obstacle de faible courbure*, en *régime permanent*, comme représenté sur la figure 4.1.



Fig. 4.1 – Géométrie typique d'un système fluide et du repère local pour le calcul d'une couche limite.

Localement, on a une configuration quasi plane où la paroi de l'obstacle est définie comme le plan y = 0. On considère des *écoulements bidimensionnels* xy,

$$\overline{\mathbf{v}} = u(x,y)\overline{\mathbf{e}}_x + v(x,y)\overline{\mathbf{e}}_y \tag{4.1}$$

dans le domaine  $x \in [0,L]$ ,  $y \in \mathbb{R}^+$ , avec L une échelle longitudinale caractéristique, échelle des gradients de  $\overline{\mathbf{v}}$  dans la direction x, voire des écarts à la planéité de la paroi<sup>1</sup>. Si U est l'ordre de grandeur de u loin de la paroi, on suppose que<sup>2</sup>

$$Re = Re_{\text{extérieur}} = \frac{UL}{\nu} \gg 1$$
 (4.2)

En conséquence, en négligeant les effets de la turbulence, on peut utiliser le modèle du *fluide parfait* loin de la paroi, pour calculer l'écoulement dit « *extérieur* ».

<sup>1.</sup> Le plan x = 0 représente la « région d'entrée » de l'écoulement, x = L sa « région de sortie »; ce ne sont en aucun cas des parois fixes où la vitesse devrait s'annuler.

<sup>2.</sup> On introduit la notation  $Re_{\text{extérieur}}$  car on introduira aussi un autre nombre de Reynolds, basé non plus sur L mais sur l'ordre de grandeur  $\delta$  de l'épaisseur de couche limite, cf. l'équation (4.35).

L'effet de la viscosité et de l'adhérence à la paroi se manifestent dans une fine couche limite<sup>3</sup> dans laquelle l'échelle normale, échelle des gradients de  $\overline{\mathbf{v}}$  dans la direction y, qui donne aussi l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite,

$$\delta \ll L \quad . \tag{4.3}$$

À partir de la condition d'incompressibilité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{4.4}$$

on doit donc avoir dans la couche limite

$$v \sim \frac{\delta}{L} u \ll u$$
 (4.5)

D'autre part on y a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \,.$$

$$(4.6)$$

La composante x de l'équation de Navier-Stokes peut donc se simplifier pour donner la **première** équation de **Prandtl**<sup>4</sup>

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \widehat{p}}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.7)$$

Par nature, la couche limite est une zone où les phénomènes visqueux entrent en jeu, contrairement à ce qui se passe à l'extérieur où ils sont négligeables. Toutefois, dans la couche limite, les effets visqueux ne dominent pas complètement les effets inertiels. On n'est donc pas pour autant en écoulement de Stokes, les effets inertiels ne s'annulent pas du fait de l'existence d'une dépendance en x et d'une vitesse normale v; on a ainsi affaire à une couche limite présentant un minimum de complexité spatiale<sup>5</sup>. En vertu de ce « principe de non-dégénérescence » ou de « complexité », il faut que, dans l'équation (4.7), l'ordre de grandeur des deux termes inertiels,

$$u\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u^2}{L} \sim \frac{U^2}{L} \quad \text{et} \quad v\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{\delta}{L}u \frac{u}{\delta} \sim \frac{u^2}{L} \sim \frac{U^2}{L} ,$$
 (4.8)

soit le même que l'ordre de grandeur du terme visqueux

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \nu \frac{U}{\delta^2} . \tag{4.9}$$

$$\frac{U^2}{L} \sim \nu \frac{U}{\delta^2} \iff \delta = \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$
(4.10)

Comme Re est grand, on a bien (4.3).

5. Au contraire de la sous-couche visqueuse au-dessus d'un plan y = 0, réputée homogène en x et sans vitesse transversale, que l'on rencontrera dans le modèle développé dans le problème 5.1.

6. On peut aussi raisonner en termes de temps caractéristiques : l'équilibre « inertie / diffusion » ou « advection / diffusion » se traduit par l'égalité entre le temps d'advection dans la direction longitudinale x, sur une longueur L, et le temps de diffusion visqueuse dans la direction normale y, sur la longueur  $\delta$ ...

<sup>3. &#</sup>x27;Boundary layer' en anglais.

<sup>4.</sup> Physicien allemand actif pendant la première moitié du  $XX^{eme}$  siècle. Remarquez que l'on utilise la pression motrice  $\hat{p}$ , définie dans la section 1.6.2, pour inclure les effets de pesanteur; cependant ceux-ci sont souvent négligeables.

Dans le cas où le champ de pression est non uniforme, l'équation (4.7) permet d'estimer, toujours par « principe de non dégénérescence », que la dérivée partielle de la pression motrice dans la direction longitudinale x

$$\frac{\partial \widehat{p}}{\partial x} \sim \frac{\widehat{p}}{L} \sim \rho \, u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \rho \, \frac{U^2}{L} \iff \widehat{p} \sim \rho \, U^2 \,, \tag{4.11}$$

soit une estimation inertielle bien raisonnable, qui fait d'ailleurs penser aux théorèmes de Bernoulli. Intéressons-nous maintenant à la composante y de l'équation de Navier-Stokes. Elle peut a priori, cf. (4.6), se simplifier sous la forme

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \qquad (4.12)$$

Les deux termes inertiels sont encore du même ordre de grandeur,

$$u\frac{\partial v}{\partial x} \sim u\frac{v}{L} \sim \frac{\delta}{L^2}U^2 \quad \text{et} \quad v\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{v^2}{\delta} \sim \frac{\delta}{L^2}U^2 .$$
 (4.13)

Le terme visqueux aussi est du même ordre de grandeur,

$$\nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \nu \frac{v}{\delta^2} \sim \frac{\delta}{L^2} U^2 , \qquad (4.14)$$

ce, en faisant usage de l'estimation (4.10). Dans le cas où le champ de pression est non uniforme, en supposant que  $\hat{p}$  varie rapidement dans la couche limite, i.e. sur une échelle  $\delta$ , on obtiendrait, avec l'aide de (4.11),

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\hat{p}}{\delta} \sim \frac{U^2}{\delta} . \qquad (\triangle \text{ estimation fausse !})$$

En comparaison avec les autres termes de l'équation (4.12), on aurait un terme beaucoup plus grand, puisque

$$\frac{U^2}{\delta} \gg \frac{\delta}{L^2} U^2 \quad \Longleftrightarrow \quad L^2 \gg \delta^2$$

qui est vrai. Ceci serait absurde : un terme ne peut s'équilibrer tout seul. Il faut donc admettre que  $\hat{p}$  ne varie pas dans la couche limite, où l'on doit écrire la *deuxième équation de Prandtl* 

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = 0 \qquad (4.15)$$

Cette équation reste bien sûr valable, trivialement, dans le cas où le champ de pression est uniforme. Les équations de Prandtl (4.7,4.15) constituent une version dégénérée des équations de Navier-Stokes, puisqu'elles sont d'ordre 2 par rapport à u mais seulement 1 par rapport à v. En conséquence il faut ajouter, aux conditions d'*adhérence à la paroi*,

$$u = v = 0$$
 en  $y = 0$ , (4.16)

des conditions de *raccord avec l'écoulement extérieur* portant seulement sur u et  $\hat{p}$ ,

$$u(x,y)/u_{\text{extérieur}}(x,y) \longrightarrow 1 \quad \text{quand} \quad y/\delta \longrightarrow +\infty ,$$
 (4.17)

$$\widehat{p}(x,y)/\widehat{p}_{\text{extérieur}}(x,y) \longrightarrow 1 \quad \text{quand} \quad y/\delta \longrightarrow +\infty .$$
 (4.18)

Comme u varie sur l'échelle  $\delta$  dans la couche limite mais par contre  $u_{\text{extérieur}}$  varie sur l'échelle  $L \gg \delta$ ,  $y \gg \delta$  correspond encore à y petit pour l'écoulement extérieur. On exprime en conséquence la première condition de raccord sous la forme plus simple

$$u(x, +\infty) = u_{\text{extérieur}}(x, 0) \quad . \tag{4.19}$$

Avec les mêmes notations simplifiées, les conditions (4.15) et (4.18) conduisent à

$$\hat{p} = \hat{p}(x) = \hat{p}_{\text{extérieur}}(x,0)$$
 (4.20)

# 4.2 Couche limite de Blasius au dessus d'une plaque plane

On considère, comme représenté sur la figure 4.2, une plaque plane placée dans un écoulement uniforme à l'infini

$$\overline{\mathbf{v}}_{\text{extérieur}} = U\overline{\mathbf{e}}_x \quad \text{et} \quad \widehat{p}_{\text{extérieur}} = constante$$
 (4.21)

i.e. à gradient de pression motrice nul. Cette plaque possède un bord d'attaque situé en x = 0; l'échelle longitudinale pertinente est alors L = x, la distance au bord d'attaque. D'après (4.10), l'échelle normale de la couche limite est

$$\delta = \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} . \tag{4.22}$$

Ainsi, l'épaisseur de la couche limite augmente avec x. De manière générale, en écoulements bidimensionnels xy, il est intéressant de résoudre l'équation de conservation de la masse (4.4), div $\overline{\mathbf{v}} = 0$ , à l'aide d'un potentiel vecteur, en écrivant que

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{rot}} \mathbf{A}$$
,

puis d'observer qu'à cause de la bidimensionnalité xy, cf. l'équation (4.1),  $\overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}}(x,y)$  n'a qu'une seule composante jouant un rôle, à savoir  $A_z$  notée plutôt  $\psi$ . On peut se convaincre que  $\psi$  est une fonction courant dont les isovaleurs donnent les lignes de courant<sup>7</sup>, et que

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{rot}}(\psi \overline{\mathbf{e}}_z) = (\overline{\mathbf{\nabla}}\psi) \wedge \overline{\mathbf{e}}_z \iff u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} . \tag{4.23}$$

Il est alors raisonnable de rechercher une fonction courant à variables séparées,

$$\psi = P(x) f(\zeta) \tag{4.24}$$

avec

$$\zeta = \frac{y}{\delta} \qquad \text{la coordonnée normale réduite.}$$
(4.25)

La condition de raccord de la vitesse (4.19) peut être résolue en posant que

$$P(x) = U\delta = \sqrt{\nu U x} \quad \text{et} \quad f'(+\infty) = 1 , \qquad (4.26)$$

<sup>7.</sup> Ceci peut se montrer par un calcul différentiel intrinsèque, en considérant un déplacement infinitésimal  $d\overline{\mathbf{x}}$  sur une ligne de courant dans le plan xy, tel que, par définition,  $d\overline{\mathbf{x}} \parallel \overline{\mathbf{v}}$  i.e.  $d\overline{\mathbf{x}} \wedge \overline{\mathbf{v}} = d\overline{\mathbf{x}} \wedge [(\overline{\mathbf{\nabla}}\psi) \wedge \overline{\mathbf{e}}_z] = \overline{\mathbf{0}}$ , et en explicitant ce produit vectoriel...



**Fig. 4.2** – Géométrie de l'écoulement au dessus d'une plaque plane, qui donne lieu au développement de la *couche limite de Blasius*. Le point origine O correspond au *« bord d'attaque »*.

où la deuxième équation est une condition de « normalisation » de la fonction f, en effet l'écriture  $\psi = P f$  ne définit pas univoquement P et f. En conséquence

$$u = Uf'(\zeta)$$
 et  $v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}[\zeta f'(\zeta) - f(\zeta)]$ . (4.27)

L'équation de Prandtl (4.7) conduit après quelques calculs à l'équation de Blasius<sup>8</sup>

$$2f'''(\zeta) + f(\zeta)f''(\zeta) = 0 (4.28)$$

Cette équation doit être résolue munie des conditions d'adhérence

$$f(0) = f'(0) = 0 (4.29)$$

et de la condition de raccord avec l'écoulement extérieur (4.26)

$$f'(+\infty) = 1$$
 (4.30)

L'équation de Blasius, non linéaire, ne peut être résolue que numériquement. Le problème 4.1 sera consacré à cette résolution, et à l'étude de la solution obtenue. Il faut, en complément de ce problème, faire trois remarques importantes.

Tout d'abord, la première condition de validité de cette théorie est la grandeur du nombre de Reynolds extérieur (4.2), condition qui prend ici la forme

$$Re_{\text{extérieur}} = Ux/\nu \gg 1$$
 . (4.31)

Cette condition assure la petitesse de l'échelle normale  $\delta$  donnée par (4.22) devant l'échelle longitudinale x distance au bord d'attaque (cf. l'équation 4.3),

$$Re_{\text{extérieur}} \gg 1 \iff x \gg \nu/U \iff \delta = \sqrt{\nu x/U} \ll x$$
. (4.32)

Ainsi ce modèle n'est pas valable près du bord d'attaque, lorsque x est petit.

<sup>8.</sup> Ingénieur allemand du  $XX^{eme}$  siècle, il fut le premier étudiant de thèse de Prandtl, et pas des moins brillants. En hommage, la fonction f introduite ici est appelée « fonction de Blasius ».

Deuxièmement, des solutions de la forme (4.27) sont dites « *auto similaires* ». En effet elles expriment des lois d'échelles simples qui permettent par des affinités du type

$$(x, y) \mapsto (x', y') = (\alpha_x x, \alpha_y y)$$
 et  $(u, v) \mapsto (u', v') = (\alpha_u u, \alpha_v v)$  (4.33)

de déduire le champ de vitesse dans une région de la couche limite du champ de vitesse dans une autre région. Plus précisément si  $\alpha_x$  est fixé alors les valeurs des coefficients d'affinité  $\alpha_y$ ,  $\alpha_u$  et  $\alpha_v$ qui permettent d'assurer (4.33) se calculent facilement<sup>9</sup>. Plus largement on peut même relier les solutions de Blasius dans deux fluides différents et avec des vitesses extérieures différentes par des affinités du type (4.33), en rajoutant des règles d'affinités des paramètres de contrôle

$$(\nu, U) \mapsto (\nu', U') = (\alpha_{\nu}\nu, \alpha_{U}U).$$
 (4.34)

Il existe une théorie mathématique qui permet d'étudier systématiquement le « groupe de symétrie » des équations de la couche limite (dans tel ou tel cas considéré) et, en faisant l'hypothèse que la solution est invariante par ce groupe de symétrie, d'établir la forme a priori de cette solution auto similaire (ici celle donnée par l'équation 4.27). On économise alors, entre autres, l'hypothèse que la fonction courant est à variables séparées. Une présentation succinte de cette approche est par exemple donnée dans la section 6 de Huerre (1998).

Troisièmement, cette couche limite est susceptible de subir une *transition vers la turbulence*. Une étude locale de stabilité, décrite par exemple dans Schlichting & Gersten (2000), montre que le nombre de Reynolds pertinent est le nombre de Reynolds local

$$Re_{\text{local}} = U\delta/\nu = \sqrt{Ux/\nu} = \sqrt{Re_{\text{extérieur}}}$$
 (4.35)

L'analyse de stabilité montre que la couche limite est instable vis-à-vis de perturbations prenant la forme d'*ondes de Tollmienn-Schlichting* lorsque le nombre de Reynolds local excède une valeur critique

$$Re_{\text{local}}^{c} = 300 \tag{4.36}$$

ce qui correspond à une valeur critique du nombre de Reynolds extérieur

$$Re_{\text{extérieur}}^{\text{c}} = 9 \ 10^4 \ . \tag{4.37}$$

En pratique, la transition vers la turbulence est progressive, et il faut atteindre des  $Re_{extérieur}$  supérieurs à (4.37) pour observer un niveau de fluctuations turbulentes significatif. Cette transition vers la turbulence se développe naturellement dans l'espace, comme schématisé sur la figure 4.3. Elle dépend aussi du niveau de perturbations dans l'écoulement amont. Pour plus d'éléments on pourra consulter la section 8.9 de Drazin (2002) ou encore Plaut (2022). Des éléments sur la modélisation des *écoulements complètement turbulents* (une fois la transition effectuée!) seront donnés dans le chapitre 5, et on étudiera en TD une couche limite turbulente de géométrie simple, cf. le problème 5.1. Enfin, on mentionne que Bellot (2016) présente des modèles globaux de couches limites turbulentes, dans le contexte élargi des phénomènes de transport.

<sup>9.</sup> Le faire en exercice !



**Fig. 4.3** – **En couleurs dans la version PDF.** Figure de principe montrant la *transition vers la turbulence dans une couche limite* placée dans un écoulement amont calme ou « laminaire ». Figure tirée du DVD *Multimedia Fluid Mechanics* de Homsy *et al.* 2004 Cambridge University Press.

Pour des raisons de mise en page, une partie de celle-ci vous est offerte pour, par exemple, prendre des notes personnelles...

## 4.3 Problèmes

Les problèmes frères 4.1 et 4.2, assez poussés, proposent des études analytiques et numériques de couches limites « classiques » mais néanmoins « pertinentes » en ce qu'elles constituent des systèmes fluides modèles. Le problème 4.1 porte sur l'étude de la *couche limite de Blasius* dans une géométrie « simplissime » : l'écoulement au dessus d'une plaque plane. Le problème 4.2 s'intéresse à la famille des *couches limites de Falkner-Skan*, dans lesquelles un *gradient de pression* existe et a une influence, parfois très forte, voire, « dramatique ».

Suit le problème 4.3, plus simple d'un point de vue numérique, sur la notion d'épaisseur de déplacement appliquée à la couche limite de Blasius et à une couche similaire avec aspiration du fluide à la paroi... cette aspiration modifiant fortement la couche limite.

#### Problème 4.1 Calcul et étude de la couche limite de Blasius

#### 1 Calcul avec Matlab de la couche limite de Blasius

Afin de résoudre numériquement le problème différentiel constitué de l'équation de Blasius (4.28) munie des conditions limites (4.29) et (4.30), il faut d'abord ramener l'infini au fini, i.e. transformer la condition « à l'infini » (4.30) en une condition posée pour une « grande valeur » de  $\zeta$ , soit  $\zeta_{\text{max}}$ , que l'on va « faire tendre vers l'infini ». D'autre part, on transforme ce **problème** différentiel aux limites<sup>10</sup> en problème avec conditions initiales, la dérivée seconde de f en  $\zeta = 0$  étant un paramètre inconnu  $\alpha$  que l'on va ajuster avec une « méthode de tir » pour satisfaire la condition (4.30).

<sup>10. &#</sup>x27;Boundary value problem' en anglais.

Dans cette question, pour simplifier, on note z au lieu de  $\zeta$  la distance à la paroi réduite, qui est la seule variable d'espace. On veut donc calculer  $f_{\alpha}$  solution de

$$2f_{\alpha}^{\prime\prime\prime}(z) + f_{\alpha}(z)f_{\alpha}^{\prime\prime}(z) = 0 , \qquad (4.38)$$

munie des conditions initiales

$$f_{\alpha}(0) = 0 , \quad f'_{\alpha}(0) = 0 , \quad f''_{\alpha}(0) = \alpha , \qquad (4.39)$$

et ajuster  $\alpha$  de sorte que

$$f'_{\alpha}(z_{\max}) = 1$$
. (4.40)

**1.1** Mettez ce problème différentiel d'ordre 3 sur  $f_{\alpha}$ , notée f pour simplifier, sous la forme canonique d'un problème différentiel d'ordre 1 sur le vecteur colonne

$$\mathbf{F}(z) = \begin{bmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \\ F_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(z) \\ f'(z) \\ f''(z) \end{bmatrix}, \qquad (4.41)$$

soit  $^{11}$ 

$$\frac{d\mathbf{F}(z)}{dz} = \mathbf{G}(z,\mathbf{F}(z)) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(z)) =$$

$$F_2(z)$$
(4.42)

où les deuxième et troisième lignes sont à compléter. La condition initiale est bien sûr

$$\mathbf{F}(0) = \begin{bmatrix} 0\\0\\\alpha \end{bmatrix} . \tag{4.43}$$

1.2 Téléchargez sur la page web du module le programme blasius.m dont le listing suit :

```
%% Valeur maximale de z et intervalle de valeurs de z
zmax= 10; zint= [0 zmax];
% Parametre de tir
alpha= 0.2;
%% Appel a ode45 pour resolution de l'equation differentielle
% 1er argument = fonction qui definit la derivee,
% 2d argument = intervalle des valeurs de z,
% 3eme argument = vecteur des conditions initiales
[z,F]= ode45(@G , zint , [ 0 ; 0 ; alpha ]);
% Recuperation des valeurs tabulees de la fonction et de sa derivee
f= F(:,1); fprime= F(:,2);
% Graphe de f'(z)
plot(z,fprime); xlabel("z"); ylabel("fprime");
```

<sup>11.</sup> La l<sup>ère</sup> forme de fonction  $\mathbf{G}(z,\mathbf{F}(z))$  est la forme générale supposée par Matlab pour définir une équation différentielle ordinaire; dans notre cas l'équation est « autonome » ou sens où z n'apparaît pas explicitement dans l'équation, mais seulement dans  $\mathbf{F}(z)$ .

```
%% Fonction G qui definit l'equation differentielle
function res= G(z, F)
res= [ F(2) ; F(3) ; ... ];
end
```

Avec l'éditeur de **Matlab**<sup>12</sup>, modifiez la fonction G, qui code l'équation (4.42), en remplaçant dans la 3<sup>ème</sup> ligne les ... par ce qui convient. Faites des tests en faisant varier  $\alpha$ , et comprenez les tendances révélées par le graphe de  $f'_{\alpha}(z)$ . Par essais-erreurs, définissez un intervalle [ $\alpha_1, \alpha_2$ ] dans lequel se trouve la valeur optimale de  $\alpha$ , telle que la condition (4.40) soit vérifiée.

**1.3** Modifiez votre programme pour

- 1. définir une fonction tir qui associe à  $\alpha$  la valeur  $f'_{\alpha}(z_{\max}) 1$ , en prenant aussi comme arguments la valeur maximale de z et l'intervalle des valeurs de z;
- 2. calculer le zéro de cette fonction, avec la fonction fzero.

Pendant l'étape 1, l'étape 2 étant en préparatif avec la ligne commentée avec **fzero**, votre programme devrait ressembler à ceci (des ... sont à éditer - la fin est tronquée) :

```
%% Valeur maximale de z et intervalle de valeurs de z
zmax= 10; zint= [0 zmax];
% Essai de la fonction tir
alpha= 0.2; tir(alpha , zint);
%% Calcul de alpha avec l'objectif que tir = 0
% 1er argument = fonction a annuler,
% 2d argument = intervalle dans lequel chercher alpha
% alpha= fzero(@(x) tir(x , zint) , [... ...])
%% Fonction principale qui resoud l'equation differentielle
[z,F]= ode45(@G , zint , [ 0 ; 0 ; alpha ]);
\% Recuperation des valeurs tabulees de la fonction et de sa derivee
f= F(:,1); fprime= F(:,2);
% Graphe de f'(z)
plot(z,fprime); xlabel("z"); ylabel("fprime");
%% Fonction tir qui donne la valeur de f'-1 en zmax en fonction de alpha
% avec affichage (disp) des valeurs de alpha et f'-1 en zmax
function res= tir(alpha , zint)
 disp(['alpha= ',num2str(alpha)]);
  [z,F]= ode45(@G , zint , [ 0 ; 0 ; alpha ]);
 res= F(end,2) - 1;
 disp(['fprime(zmax) - 1= ',num2str(res)]);
end
```

%% Fonction G qui definit l'equation differentielle comme avant...

<sup>12.</sup> Vous pouvez naviguer avec le menu Open dans votre arborescence, choisir le fichier blasius.m là où vous l'avez mis, et faire Run pour l'exécuter; alors, choisissez Change Folder pour que Matlab reste dans le dossier concerné.

(a)

(b)

Fig. 4.4 – À faire soi-même ! Arcs paramétrés a :  $(f'(\zeta), \zeta)$ , b :  $(\zeta f'(\zeta) - f(\zeta), \zeta)$ , avec  $f(\zeta)$  la fonction de Blasius.

Calculez ainsi avec 4 décimales la valeur physique de  $\alpha$ , qui permet de satisfaire la condition (4.40), et qui s'avère robuste (pour ses 4 premières décimales) quand  $z_{\text{max}}$  est augmenté d'un facteur 2 :

$$\alpha = f''(0) =$$
 (4.44)

## 2 Exploitation : représentations et études du champ de vitesse

**2.1** En repartant avec **Matlab** du programme blasius.m, dans lequel  $\alpha$  est pris à sa valeur physique (4.44), représentez l'arc paramétré  $(f'(\zeta), \zeta)$  pour  $\zeta \in [0,10]$ , i.e. réalisez la figure 4.4a. Que représente physiquement ce graphe? Commentez.

**2.2 Question subsidiaire à ne traiter qu'à la fin!** De même, représentez l'arc paramétré <sup>13</sup> ( $\zeta f'(\zeta) - f(\zeta)$ ,  $\zeta$ ) pour  $\zeta \in [0,10]$ , i.e. réalisez la figure 4.4b. Que représente physiquement ce graphe? Commentez.

**2.3** En zoomant par exemple avec Matlab sur la région d'intérêt du graphe de  $f'(\zeta)$ , déterminez

- 1. la plus grande valeur tabulée de  $\zeta$ , soit  $z_1$ , pour laquelle  $u(\zeta) < 0.99U$ ;
- 2. la plus petite valeur tabulée de  $\zeta$ , soit  $z_2$ , pour laquelle  $u(\zeta) > 0.99U$ .

Déduisez-en avec un seul chiffre significatif la valeur  $\zeta_{99}$  de  $\zeta$  pour laquelle

$$u(\zeta_{99}) \simeq 0.99U$$
, (4.45)

soit

$$\zeta_{99} = \tag{4.46}$$

Déduisez-en une estimation de l'épaisseur physique de la couche limite<sup>14</sup>

$$\delta_{99} = y(\zeta_{99}) = \delta\zeta_{99} = \qquad (4.47)$$

<sup>13.</sup> Pour calculer les valeurs tabulées de  $\zeta f'$  vous aurez besoin du produit terme à terme de 2 vecteurs avec **Matlab**, noté .\* et non simplement \*.

<sup>14.</sup> Attention, on peut utiliser d'autres critères pour définir d'autres épaisseurs caractéristiques, qui sont toutes du même ordre de grandeur, mais diffèrent quand on considère leur valeur précise !..

**Fig. 4.5** – À faire soi-même! Épaisseur de la *couche limite*  $\delta_{99}(x)$  au dessus d'une plaque placée dans un canal hydraulique débitant à U = 0,2 m/s, en fonction de la distance x au bord d'attaque.

**Fig. 4.6** – À faire soi-même! Profils de vitesse tangentielle u dans la *couche limite* de la figure 4.5, à deux distances x du bord d'attaque : x = 20 cm à gauche, 50 cm à droite.

**2.4** On s'intéresse à un *canal hydraulique*, à température ambiante, dans lequel un écoulement réputé uniforme arrive sur une plaque plane avec une vitesse

$$U = 0.2 \text{ m/s}$$
.

2.4.1 On considère (cf. l'équation 4.32) que le modèle de couche limite est valable dès que

$$Re_{\text{extérieur}} \geq 100$$
.

À partir de quelle distance  $x_0$  du bord d'attaque pourra t'on utiliser le modèle de couche limite? Commentez.

**2.4.2** Représentez l'épaisseur de couche limite  $\delta_{99}$  en centimètres dans l'intervalle  $x \in [0, 50 \text{ cm}]$ , i.e. réalisez la figure 4.5. Commentez.

**2.4.3** Représentez les profils de vitesse tangentielle u dans l'intervalle  $y \in [0, 1 \text{ cm}]$  pour x = 20 et 50 cm, avec y en ordonnée, i.e. réalisez la figure 4.6. Commentez.

**Fig. 4.7** – À faire soi-même ! Profil du nombre de Reynolds extérieur dans la *couche limite* de la figure 4.5, en fonction de la distance x au bord d'attaque.

**2.4.4** Représentez le nombre de Reynolds extérieur  $Re_{\text{extérieur}}$  dans l'intervalle  $x \in [0, 50 \text{ cm}]$ , i.e. réalisez la figure 4.7. Que peut-on déduire de ce graphe?

#### 3 Exploitation : caractérisation semi-analytique du frottement

**3.1** Calculez la contrainte pariétale tangentielle  $\tau_p = T_x$  exercée par le fluide en écoulement dans la couche limite sur la paroi de la plaque, à une distance x du bord d'attaque de la plaque. Commentez la formule semi-analytique obtenue.

**3.2** Calculez le *coefficient de frottement pariétal local*  $C_f(x)$  et montrez qu'il s'exprime de façon très simple en fonction du nombre de Reynolds local introduit équation (4.35),

$$C_f(x) = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2} =$$
 (4.48)

Commentez succinctement.

**3.3** Calculez la *traînée*  $F_x$  s'exerçant sur une plaque de longueur totale L dans la direction x et  $L_3$  dans la direction hors du plan  $xy^{15}$ . Calculez aussi le *coefficient de frottement pariétal global* correspondant

$$C_F = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 L L_3} =$$
 (4.49)

Vous montrerez qu'il s'exprime de façon très simple en fonction du nombre de Reynolds local introduit équation (4.35), évalué en x = L. Commentez succinctement.

**3.4** Dans le cas du canal hydraulique étudié en question 2.4, et de la plaque supposée de dimensions  $L = L_3 = 50$  cm, que valent les coefficients  $C_f(L)$  et  $C_F$ , et la traînée totale  $F_x$ ?

**3.5** Situez les conditions de ce calcul sur la figure 4.8, et répondez à la question posée dans la légende de cette figure.

<sup>15.</sup> Calculez cette traînée en prenant en compte un seul côté de la plaque ; en pratique, si la plaque est mince cette traînée devra éventuellement être multipliée par 2.



**Fig. 4.8** – Figure tirée de Schlichting & Gersten (2000), présentant des mesures de *coefficients de frottements* pariétaux locaux  $C_f(x)$  sur une *plaque plane* par Liepmann, ainsi que des lois théoriques. À quoi correspond l'apparition d'une deuxième série de mesures et d'une deuxième loi à haut Reynolds?

#### Problème 4.2 Calcul et étude des couches limites de Falkner-Skan

#### 1 Géométrie - Modèle potentiel de l'écoulement extérieur

Soit  $m \in [-1/2, +\infty)$ . On considère l'écoulement bidimensionnel xy rapide d'un fluide peu visqueux dans un dièdre défini par deux parois solides formant entre elles un angle

$$\beta(m) = \pi/(m+1) , \qquad (4.50)$$

fonction dont le graphe est représenté sur la figure 4.9a. On veut étudier la *couche limite* audessus du *demi-plan* 

$$P = \{(x,0,x_3) \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^{+*}, \ x_3 \in [-L_3/2, L_3/2]\},$$
(4.51)

x étant la distance au point O sommet du dièdre <sup>16</sup>,  $x_3$  étant la coordonnée d'invariance du système. L'écoulement extérieur à la couche limite est décrit par le modèle du fluide parfait en écoulement potentiel. En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans le plan xOy, le potentiel

$$\phi(r,\theta) = Ar^{m+1} \cos[(m+1)\theta]/(m+1) , \qquad (4.52)$$

et la fonction courant correspondante

$$\psi(r,\theta) = Ar^{m+1} \sin[(m+1)\theta]/(m+1) , \qquad (4.53)$$

 ${\cal A}$  étant un réel strictement positif. Le champ de vitesse associé

$$\overline{\mathbf{v}}_{\text{extérieur}} = \overline{\mathbf{\nabla}}\phi = \overline{\mathbf{rot}}(\psi\overline{\mathbf{e}}_3) = (\overline{\mathbf{\nabla}}\psi)\wedge\overline{\mathbf{e}}_3 = \frac{\partial\psi}{\partial y}\overline{\mathbf{e}}_x - \frac{\partial\psi}{\partial x}\overline{\mathbf{e}}_y .$$
(4.54)

La fonction courant (4.53) est bien constante pour  $\theta = 0$  et  $\beta(m)$ . Les lignes de courant de trois écoulements extérieurs, pour trois valeurs représentatives de m et  $\beta$ , obtenues en traçant justement des iso- $\psi$ , sont sur les figures 4.9bcd.

Au voisinage du plan  $P, y \simeq 0$ , la vitesse tangentielle dans la direction des vecteurs  $\overline{\mathbf{e}}_x \simeq \overline{\mathbf{e}}_r$  est

$$u_{\text{extérieur}} = \overline{\mathbf{v}}_{\text{extérieur}} \cdot \overline{\mathbf{e}}_x \simeq \frac{\partial \phi}{\partial r} .$$
 (4.55)

Elle peut se calculer en identifiant la coordonnée cartésienne x au rayon polaire r, et en faisant  $\theta \simeq 0$ , d'où

$$u_{\text{extérieur}} \simeq Ar^m \simeq Ax^m$$
 (4.56)

D'autre part, par continuité et à cause de l'imperméabilité du plan P, au voisinage de celui-ci,

$$v_{\text{extérieur}} = \overline{\mathbf{v}}_{\text{extérieur}} \cdot \overline{\mathbf{e}}_y \simeq 0$$
 (4.57)

**1.1** Représentez quelques vecteurs vitesses correspondants au voisinage du demi-plan P sur les figures 4.9bcd.

**1.2** Calculez le champ de pression motrice correspondant  $\hat{p}_{\text{extérieur}}(x,0)$  au voisinage du demi-plan *P*. Indiquez sur les figures 4.9bcd avec des + (resp. –) les zones de surpression (resp. dépression).

<sup>16.</sup> Le point O est tout simplement un point particulier du plan de la paroi dans le cas exceptionnel m = 0.



**Fig. 4.9** – (a) : Graphe de la fonction (4.50) qui lie le *paramètre de Falkner-Skan* m à l'angle d'ouverture  $\beta$  du dièdre correspondant dans le plan physique. (b,c,d) : Pour les valeurs de m et  $\beta$  indiquées, dans le plan physique, les lignes épaisses représentent les parois du dièdre, les lignes fines les lignes de courant des *écoulements extérieurs* dont le champ de vitesse est défini par les équations (4.52), (4.53) et (4.54).

#### 2 Étude analytique des couches limites

**2.1** Explicitez les équations de Prandtl et les conditions limites portant sur les composantes cartésiennes u(x,y) et v(x,y) du champ de vitesse **dans la couche limite** située au-dessus de P. Montrez que, sauf cas très particulier, il existe un **gradient de pression motrice dans la couche limite**. Selon le signe de m, en lien avec les figures 4.9bcd, montrez qu'il est a priori accélérateur - favorable - moteur pour la couche limite ou, au contraire, décélérateur - défavorable - adverse pour la couche limite.

**2.2** Que se passe t'il si m = 0? Expliquez pourquoi on peut, dorénavant, supposer que  $m \neq 0$ .

**2.3** En explicitant comme dans le cours l'égalité des ordres de grandeur des termes inertiels et visqueux de l'équation de Prandtl dans la direction x, et en estimant l'ordre de grandeur U de u grâce à la condition de raccord avec l'écoulement extérieur, estimez l'échelle normale caractéristique de la couche limite

$$\delta = (4.58)$$

Vous supposerez que l'ordre de grandeur de m, en tant que coefficient (mais pas en tant qu'exposant), est 1. Discutez physiquement de l'influence de A et  $\nu$ . **2.4** De façon analogue à ce qui a été fait pour le calcul de la couche limite de Blasius, on cherche une solution à variables séparées pour la fonction courant dans la couche limite,

$$\psi = P(x) f(\zeta)$$
 avec  $\zeta = \frac{y}{\delta}$  la coordonnée normale réduite. (4.59)

Montrez que la condition de raccord avec l'écoulement extérieur peut se traduire par la condition à l'infini

$$f'(+\infty) = 1 \tag{4.60}$$

si P(x) est convenablement choisie,

$$P(x) = . (4.61)$$

**2.5** Déduisez-en les composantes de la vitesse dans la couche limite en fonction de f,

*Remarque* : ces formules montrent que les solutions que l'on est en train de considérer sont *auto similaires*, au sens expliqué au niveau des équations (4.33) et (4.34).

**2.6** Montrez que la première équation de Prandtl permet d'aboutir à l'*équation* différentielle ordinaire dite *de Falkner-Skan* 

$$f''' + aff'' + bf'^2 + c = 0$$
 avec  $a = , b = , c = , (4.63)$ 

où a, b et c sont des fonctions simples de m seulement.

2.7 Quelles sont les conditions limites qu'il convient de rajouter à cette équation?

**2.8** Quelle équation et quelle solution retrouve t'on dans le cas m = 0, en admettant que les calculs précédents sont encore valables ?

#### 3 Calcul et étude avec Matlab des couches limites

De la même manière que dans le problème 4.1, on résoud le problème différentiel de Falkner-Skan en ramenant l'infini au fini, et en ajustant la dérivée seconde inconnue à l'origine,  $\alpha$ , par la **méthode de tir**. Dans cette question, on note z au lieu de  $\zeta$ , pour simplifier.

**3.1** Mettez ce problème différentiel d'ordre 3 sur  $f_{\alpha}$ , notée f pour simplifier, sous la forme canonique d'un problème différentiel d'ordre 1 sur le vecteur colonne

$$\mathbf{F}(z) = \begin{bmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \\ F_3(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(z) \\ f'(z) \\ f''(z) \end{bmatrix}, \qquad (4.64)$$

soit

$$\frac{d\mathbf{F}(z)}{dz} = \mathbf{G}(z, \mathbf{F}(z), m) = \begin{bmatrix} F_2(z) \\ & & \\ &$$

où les deuxième et troisième lignes sont à compléter. La condition initiale est toujours donnée par l'équation (4.43).

**3.2** Téléchargez sur la page web du module le programme falkners.m dont le listing suit :

```
%% Valeur maximale de z et intervalle de valeurs de z
zmax= 10; zint= [0 zmax];
%% Resolution et traces pour divers parametres m de Falkner-Skan
figure; hold on; calcsol(0, 0.3, zint, 'k');
% calcsol(0.1, ..., zint, 'r');
% calcsol(0.2, ..., zint, 'm');
%% Fonction principale calcsol, alphaest est une estimation de alpha optimal
function calcsol(m, alphaest, zint, color)
 disp(['m= ',num2str(m)]);
 % Calcul de alpha avec l'objectif que tir = 0
 % 1er argument = fonction a annuler,
 % 2d argument = intervalle dans lequel chercher alpha
  alpha= fzero(@(x) tir(x, zint, m), [0.8*alphaest 1.2*alphaest])
 % Resolution de l'equation differentielle une fois alpha connu
  [z,F]= ode45(@(z,F) G(z,F,m) , zint , [ 0 ; 0 ; alpha ]);
 % Recuperation des valeurs tabulees de la fonction et de sa derivee
 f= F(:,1); fprime= F(:,2);
 % Graphe de f'(z)
 plot(z, fprime, color, 'LineWidth',2);
  xlabel("z"); ylabel("fprime"); title(['m = ',num2str(m)]);
end
%% Fonction tir qui donne la valeur de f'-1 en zmax en fonction de alpha
function res= tir(alpha , zint , m)
 disp(['alpha= ',num2str(alpha)]);
  [z,F]= ode45(@(z,F) G(z,F,m) , zint , [ 0 ; 0 ; alpha ]);
 res= F(end,2) - 1;
 disp(['fprime(zmax) - 1 = ',num2str(res)]);
end
%% Fonction G qui definit l'equation differentielle
function res= G(z, F, m)
 res= [F(2) ; F(3) ; ... ];
end
```

Modifiez la fonction G, qui code l'équation (4.65), en remplaçant les ... par ce qui convient. Vérifiez que vous retrouvez ce qu'il faut lorsque m = 0. Faites ensuite des tests en réglant les valeurs estimées de  $\alpha$ ,  $\alpha_{est}$ , pour m = 0,1 et 0,2, par essais-erreurs, en remplaçant dans les lignes 6 et 7 de falkners.m les ... par ce qui convient, pour calculer les couches de Falkner-Skan pour ces paramètres.

Fig. 4.10 – À faire soi-même! Profils de vitesse longitudinale réduite des *couches limites de Falkner-Skan* pour m = 0 en noir, 0,1 en rouge, 0,2 en magenta.

Donnez les valeurs optimales de  $\alpha$  correspondantes :

pour m = 0,1 :  $\alpha =$  , pour m = 0,2 :  $\alpha =$  . (4.66)

Représentez les trois arcs paramétrés (f'(z),z) pour  $z \in [0,10]$ , m = 0, 0,1 et 0,2, avec des couleurs différentes, i.e. réalisez la figure 4.10. Interprétez physiquement ces graphes, représentatifs de ce qui se passe pour des *valeurs positives de* m, en faisant le lien avec la discussion de la question 2.1.

**3.3** Observez que, si vous tentez maintenant avec le même programme de calculer des solutions pour des *valeurs négatives de* m, la méthode de tir est difficile à faire converger,  $\alpha$  diminuant rapidement avec m. En conséquence, il faut programmer une *méthode de continuation* dans laquelle on fait diminuer m progressivement, par pas successifs dm < 0,

$$m_n = n dm$$
,

en utilisant à l'étape n + 1 comme paramètre de tir estimatif  $\alpha_{est}$  la valeur optimale déterminée à l'étape n.

Modifiez donc votre programme pour programmer cette méthode de continuation. Le cœur de votre programme devrait ressembler à ceci :

```
%% Valeur maximale de z et intervalle de valeurs de z comme avant...
%% Resolution et traces pour divers parametres m de Falkner-Skan
% Parametre de tir initial, pertinent pour m= 0
alphaest= 0.3320;
%% Valeur minimale de m et pas
mmin= ...; dm= -...;
%% Boucle principale pour la continuation
for m= -0.01 : dm : mmin
alphaest= calcsol(m, alphaest, zint, "k")
end
```

Fig. 4.11 – À faire soi-même! Profils de vitesse longitudinale réduite des *couches limites de Falkner-Skan* pour m = 0 en noir, -0.09 en bleu.

```
figure; hold on; calcsol(0, 0.3320, zint, "k");
calcsol(mmin, alphaest, zint, "b");
function res= calcsol(m, alphaest, zint, color)
disp(['m= ',num2str(m)]); disp(['alphaest= ',num2str(alphaest)]);
    % Calcul de alpha avec l'objectif que tir = 0
    % 1er argument = fonction a annuler,
    % 2d argument = intervalle dans lequel chercher alpha
    alpha= fzero(@(x) tir(x , zint, m) , [0.7*alphaest 1.1*alphaest])
    ...
    res= alpha; % Renvoyer le parametre de tir optimal en sortie
end
```

Par essais-erreurs, réglez le pas de la méthode, pour calculer des solutions jusqu'à m = -0.09. Donnez la valeur correspondante de  $\alpha$ ,

pour 
$$m = -0.09$$
 :  $\alpha =$  . (4.67)

Représentez les deux arcs paramétrés (f'(z),z) pour  $z \in [0,10]$ , m = 0 et -0,09, avec des couleurs différentes, i.e. réalisez la figure 4.11. Interprétez physiquement ces graphes, en faisant le lien avec la discussion de la question 2.1.

**3.4** Constatez qu'en dessous d'une valeur critique  $m_c$  de m, même en diminuant le pas dm, on n'arrive plus à calculer de solution. Donnez une estimation de  $m_c$ , valeur pour laquelle la dérivée seconde

$$\alpha = f''(0) = 0 , \qquad (4.68)$$

avec trois chiffres significatifs,

$$m_c = \qquad (4.69)$$

On admet qu'effectivement *il n'y a plus de couche limite lorsque*  $m < m_c$ , phénomène aussi appelé « *décollement de la couche limite* ». Tentez de proposer une interprétation physique de ce phénomène.


Fig. 4.12 – Analogie entre un écoulement en incidence oblique sur une plaque plane et un écoulement au dessus du plan droit d'un dièdre.



Fig. 4.13 – Photos instantanées d'écoulements en soufflerie autour d'un profil d'aile en incidence oblique, avec visualisation de lignes d'émissions par fumées. L'angle d'incidence vaut, de gauche à droite,  $\gamma = 5^{\circ}$  puis 15° puis 25°. Dans les deux premiers cas, la ligne d'émission qui arrive juste au dessus du profil reste proche de celui-ci, mettant en évidence la couche limite. Dans le dernier cas, on a gommé les lignes d'émissions au delà du profil : prolongez-les à la main, compte tenu de la conclusion du problème 4.2. Expériences réalisées à Stanford, films disponibles sur la page 'Multimedia Fluid Mechanics Online'.

**3.5** En admettant que les propriétés de l'écoulement au dessus d'une plaque plane en incidence oblique à un angle  $\gamma$  sont qualitativement similaires à celles de l'écoulement au-dessus du plan droit d'un dièdre d'ouverture  $\beta = \pi + \gamma$ , comme schématisé sur la figure 4.12, estimez l'angle d'incidence critique de décollement de la couche limite au-dessus d'une plaque plane :

$$\gamma_c \simeq \qquad (4.70)$$

### Compléments sur le problème 4.2

- Le comportement des couches limites de Falkner-Skan au voisinage de m<sub>c</sub> est étudié dans la section 7.3.3 de Cousteix (1988). L'explication comme quoi « l'épaisseur de la couche limite tendrait vers l'infini » quand m → m<sup>+</sup><sub>c</sub> n'est que « phénoménologiquement correcte », en fait les couches limites restent d'épaisseur finie quand m → m<sup>+</sup><sub>c</sub>, mais il y a alors disparition brutale de la solution de couche limite par effets non linéaires, correspondant à une « bifurcation » ou « catastrophe ». De tels phénomènes peuvent être vus dans de nombreux systèmes non linéaires autres que celui de Falkner-Skan. Les élèves intéressés par la théorie des bifurcations (ou « théorie des catastrophes ») pourront consulter Strogatz (1994) ou Plaut (2008, 2022).
- La valeur (4.70) trouvée pour le seuil de décollement de la couche limite au-dessus d'une plaque en incidence trop oblique est confirmée par l'expérience; elle est même pertinente pour des profils d'ailes, comme on le montrera dans la présentation de « cours » à la fin du TD associé, en parlant des expériences présentées dans la figure 4.13. Comme ce décollement conduit à un décrochement, i.e. une chute de la portance, ce phénomène importe !..

#### Problème 4.3

### Couches limites : épaisseur de déplacement - couches limites aspirée et standard

#### Généralités - Épaisseur de déplacement et coefficient de frottement

On considère des **couches limites** du type de celles étudiées dans le cours, avec les mêmes notations. Dans un repère Oxyz, dont l'origine est sur le bord d'attaque de l'obstacle, celui-ci est la **plaque plane** définie par  $x \in [0,L]$ , y = 0, et le **champ de vitesse**  $\overline{\mathbf{v}} = u(x,y)\overline{\mathbf{e}}_x + v(x,y)\overline{\mathbf{e}}_y$ . Le **fluide newtonien incompressible** occupe au moins le domaine

$$\Omega = \{ (x, y, z) \in [-L, L] \times [0, H] \times [0, L_3] \}$$

avec H, L et  $L_3$  des longueurs très grandes devant l'épaisseur maximale de la couche limite. On suppose que l'écoulement de fluide parfait au-dessus de l'obstacle serait uniforme,  $\hat{p}_{\text{extérieur}} = p_0$ et  $\bar{\mathbf{v}}_{\text{extérieur}} = U \bar{\mathbf{e}}_x$ . La plaque peut être *imperméable*, ou, au contraire, à partir d'une certaine abscisse  $x_a$ , constitué d'un *matériau poreux communiquant avec un système d'aspiration*. Les pores de ce matériau sont en bonne approximation des cylindres microscopiques d'axe de révolution parallèle à Oy: l'aspiration se fait dans la direction normale à la paroi. Dans les deux cas on a la condition d'adhérence pour la vitesse tangentielle

$$\forall x > 0, \quad u(x,0) = 0. \tag{4.71}$$

Sans aspiration, on a la condition d'imperméabilité

$$\forall x > 0, \quad v(x,0) = 0. \tag{4.72}$$

Avec aspiration, par contre, on a approximativement

$$\forall x > x_a, \quad v(x,0) = -V \tag{4.73}$$

avec V > 0 la vitesse d'aspiration, supposée très inférieure à U.

1 On introduit l'épaisseur de déplacement  $\delta^*$ , à une distance x du bord d'attaque, comme la distance de translation de l'écoulement potentiel dans la direction y à cause de la couche limite, comme schématisé ci-dessous <sup>17</sup>:



De façon quantitative, avec  $\delta^* \ll D < H$ , on définit  $\delta^*$  par

débit réduit en amont à travers [0,D] = débit réduit en x à travers  $[0,D+\delta^*]$ 

$$\iff \int_0^D U \, dy = \int_0^{D+\delta^*} u(x,y) \, dy \,. \tag{4.74}$$

Compte tenu du fait que, en bonne approximation, on a, pour  $y > D + \delta^*$ , u(x,y) = U, donnez  $\delta^*$  sous la forme d'une intégrale généralisée dans l'intervalle  $y \in [0, +\infty[$ , ne faisant intervenir que la vitesse réduite u(x,y)/U.

<sup>17.</sup> Figure tirée de Guyon et al. (2001) ou Guyon et al. (2012).

2 On se place à une distance x du bord d'attaque suffisamment grande pour que v y soit uniforme au niveau de la plaque, en y = 0: v = 0 en couche limite non aspirée standard, v = -V en couche limite aspirée (cf. l'équation 4.73). Établissez là l'expression analytique générale du *coefficient de frottement pariétal local* 

$$C_f(x) = \frac{T_x}{\frac{1}{2}\rho U^2} ,$$

avec  $T_x$  la contrainte tangentielle exercée par le fluide sur la plaque,  $\rho$  la masse volumique du fluide. Montrez que  $C_f(x)$  est fonction d'une viscosité du fluide, de U, et d'une dérivée partielle de u.

## Couche limite aspirée asymptotique

On considère le cas d'une **couche limite aspirée**. On suppose que, pour x suffisamment grand devant l'abscisse de début d'aspiration  $x_a$ , on atteint un **régime asymptotique** dans lequel  $\overline{\mathbf{v}}$  devient indépendante de x. On travaille exclusivement dans cette région.

**3.1** Montrez que v y est uniforme, v = -V.

**3.2** Déduisez-en par un calcul, impliquant notamment la résolution soignée d'une équation différentielle ordinaire, l'expression analytique de la vitesse tangentielle u(y). Esquissez l'allure de ce profil, avec en abscisse u et en ordonnée y; une figure plus soignée sera exigée en question 9.

**4.1** Calculez analytiquement l'épaisseur de déplacement  $\delta_1 = \delta^*$  de cette couche limite. Commentez.

**4.2** Calculez numériquement cette épaisseur dans le cas d'une couche limite d'air à pression atmosphérique,  $T \simeq 20$  °C, avec un écoulement extérieur de vitesse U = 10 m/s et une vitesse d'aspiration V = U/1000.

**5.1** Calculez analytiquement le coefficient de frottement pariétal local de cette couche limite. Commentez.

**5.2** Calculez numériquement le coefficient de frottement pariétal local dans le cas de la couche limite envisagée question 4.2.

## Couche limite non aspirée standard

6 À quel cas connu correspond celui envisagé ici d'une couche limite non aspirée?

7.1 Établissez l'expression analytique de l'épaisseur de déplacement  $\delta_2 = \delta^*$  de cette couche limite, en fonction des paramètres du problème et d'une fonction adimensionnelle de couche limite frencontrée pendant le module. Mettez finalement  $\delta_2$  sous la forme du produit d'une longueur caractéristique bien identifiée et d'une intégrale adimensionnelle portant sur f fonction d'une variable adimensionnelle.

7.2 À l'aide de Matlab, et d'une fonction dédiée à l'intégration numérique d'une fonction tabulée, calculez numériquement l'intégrale adimensionnelle qui apparaît dans l'expression de  $\delta_2$ . Donnez sa valeur numérique avec 3 chiffres significatifs, en faisant un test de « convergence / robustesse » de cette valeur, par rapport à des choix de paramètres numériques relativement arbitraires. Donnez finalement l'expression semi-analytique de  $\delta_2$  en fonction de x et d'autres paramètres du problème.

**7.3** Dans le cas d'une couche limite d'air à pression atmosphérique,  $T \simeq 20$  °C, avec un écoulement extérieur de vitesse U = 10 m/s, que vaut  $\delta_2$  à une distance x = 1 m du bord d'attaque? Commentez et comparez.

**8.1** Sans détaillez les calculs sous-jacents, donnez l'expression semi-analytique du coefficient de frottement pariétal local de cette couche limite. Commentez.

8.2 Avec les valeurs considérées en question 7.3, que vaut  $C_f(x = 1 \text{ m})$ ? Commentez et comparez.

## Comparaison et prise de recul

**9** À l'aide de **Matlab**, représentez les profils de la couche limite aspirée asymptotique  $u_1(y)/U$  et de la couche limite standard  $u_2(x = 1 \text{ m}, y)/U$  considérées plus haut, sur le même graphe, avec  $u_i/U$  en abscisse, y en mm en ordonnée, en choisissant un intervalle de valeurs de y pertinent. Commentez cette figure a.

10 En prenant du recul, discutez d'un phénomène qui pourrait empêcher la réalisation expérimentale de ces écoulements, en étant précis sur l'un des deux cas étudiés.

## 11 Question bonus

En faisant une recherche bibliographique sur la couche limite aspirée asymptotique, trouvez une figure, basée sur des mesures expérimentales, présentant des profils avec u(x,y)/U en abscisse, y ou une version adimensionnelle de y en ordonnée, pour des valeurs de x croissantes montrant la transition d'une couche limite non aspirée standard vers la couche limite aspirée asymptotique lorsque x augmente en partant d'une valeur inférieure à  $x_a$  pour aller « largement » au delà. Positionnez la à côté de votre figure a, dans une **figure b**, et commentez.

# Chapitre 5

# Écoulements turbulents



« Nota il moto del vello dell'acqua, il quale fa uso de capelli, che hanno due moti, de quali l'uno attende al peso del vello, l'altro al liniamento delle sue volte; così l'acqua ha le sue volte vertiginose, delle quali una parte attende a l'impeto del corso principale, l'altra attende al moto incidente e refresso. »

'Observe the motion of the surface of the water, which resembles that of hair, which has two motions, of which one is caused by the weight of the hair, the other by the direction of the curls; thus the water has eddying motions, one part of which is due to the principal current, the other to random and reverse motion' Leonardo da Vinci<sup>1</sup> 'Turbulence is the last great unsolved problem of classical physics.'

**Richard Feynman** 

<sup>1.</sup> La citation en italien ancien est tirée de Pedretti & Cianchi (1998), sa traduction en anglais de Lumley (1992). Le dessin est bien sûr de Léonard de Vinci. Je remercie Pierluigi Arnelli, élève de la promotion 2020, pour avoir trouvé la citation italienne, suite à une « fouille bibliographique » poussée!

'We are faced with the necessity of developing computational programs that mimic the behavior of turbulence in restricted situations. The possible behavior of turbulence is much too complex and varied for any single parametrization to work in a broad range of situations. In our present state of understanding, these simple models will be based, in part on good physics, in part, on bad physics, and in part, on shameless phenomenology. This is basically engineering.'

John Lumley

'Essentially, all models are wrong, but some are useful.' George Box

## 5.1 Introduction

Un écoulement « *turbulent* »<sup>2</sup>, au contraire d'un écoulement laminaire, est tel qu'un « mélange » rapide<sup>3</sup> de lignes d'émission issues de différents points s'opère, à cause de l'existence de mouvements « erratiques » sur une large gamme d'échelles spatiales, jusqu'à des échelles très petites devant la taille du système. Ces mouvements sont typiquement « tourbillonnaires », comme le remarquait Léonard de Vinci au début du XVI<sup>ème</sup> siècle<sup>4</sup>; ils correspondent à des *fluctuations* rapides et apparemment « chaotiques » de vitesse et de pression. Pour être précis, je reproduis ci-après une liste des *caractéristiques de l'agitation turbulente* inspirée de celle donnée par Chassaing (2000*b*) :

- 1. Taille supra-moléculaire
- 2. Comportement aléatoire ou chaotique
- 3. Grande richesse spectrale : nombre de modes « infini »
- 4. Structure 3D
- 5. Dynamique tourbillonnaire
- 6. Dynamique non linéaire
- 7. Énergétique dissipative

La première caractéristique signifie de façon laconique que le modèle du milieu continu reste pertinent pour un fluide en écoulement turbulent. La seconde, sur le comportement aléatoire ou chaotique, est illustrée sur la figure 5.1, qui présente une « série temporelle » de vitesse dans un écoulement de jet. La troisième, sur la grande richesse spectrale, est illustrée sur la figure 5.3, qui présente justement des « densités spectrales d'énergie » dans un écoulement similaire. La quatrième, sur la structure 3D, est illustrée sur la figure 5.4 qui présente des écoulements turbulents en tuyau, simulés numériquement, ou la figure 5.10 qui présente une « turbulence de grille », observée expérimentalement...

<sup>2.</sup> Du latin « *turbare* » : troubler.

<sup>3.</sup> Par rapport aux effets de la diffusion seuls. On parle pour qualifier ce « mélange turbulent » de « diffusion turbulente » ou « dispersion turbulente ».

<sup>4.</sup> Cf. les premières figures et citation de ce chapitre; notez que 'eddy' signifie « tourbillon » en anglais.



**Fig. 5.1** – Mesures de vitesse axiale dans un *jet turbulent* d'air dans air, par fil chaud, avec une fréquence d'acquisition élevée : 8 kHz i.e., entre 2 mesures,  $\delta t = 0.25$  ms. Bien que la vitesse débitante V au niveau de la buse soit maintenue constante à 1% près, observez le caractère fluctuant et chaotique de la vitesse mesurée ici à une distance 125*d* de la buse, avec d = 8 mm le diamètre de celle-ci. Le nombre de Reynolds basé sur V et d est  $Re = 3 \ 10^4$ . Cette expérience a été menée par Renner et al. (2001), qui présentent aussi une analyse stochastique fine de ces données.

Comme décrit dans le chapitre 8 de Plaut (2021b), tous les écoulements deviennent turbulents à nombre de Reynolds suffisamment élevé. Ainsi dans la section 8.1 de Plaut (2021b) a été évoquée la transition vers la turbulence derrière un cylindre, pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 200, tandis que dans la section 8.2 a été évoquée la transition vers la turbulence dans un tuyau, pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 2000. Cette transition, d'ailleurs, est elle-même difficile à modéliser, et est encore l'objet d'intenses recherches<sup>5</sup>. On a vu que cette transition a un impact significatif sur les propriétés moyennes de l'écoulement, comme ses pertes de charge; voyez par exemple les figures 1.2 et 4.8 de ce document. Beaucoup des écoulements qui intéressent l'ingénieur sont à nombre de Reynolds élevé donc turbulents; comme leurs propriétés moyennes sont affectées par la turbulence, il convient d'essayer de développer des « modèles de turbulence ». Cette tâche est extrêmement ardue puisqu'il est clair qu'en écoulements turbulents la non-linéarité de l'équation de Navier-Stokes, qui rend sa résolution difficile, joue un rôle important<sup>6</sup>. Ce problème de la turbulence est de fait l'un des sujets de recherche les plus étudiés à l'heure actuelle, et malgré les efforts de générations de scientifiques depuis plus d'un siècle<sup>7</sup>, il est loin d'être bien résolu. Comme l'ingénieur, néanmoins, se doit d'être capable d'affronter des écoulements turbulents, nous allons donner ici quelques éléments sur la « modélisation de la turbulence », en avertissant bien que les modèles que nous allons introduire sont souvent phénoménologiques et parfois peu fiables... Le fluide considéré sera toujours newtonien incompressible.

<sup>5.</sup> Dans le cas de la transition vers la turbulence dans un tuyau par exemple, des publications dans des revues prestigieuses se succèdent, cf. par exemple Hof et al. (2003); Schneider et al. (2007); Willis & Kerswell (2007); Avila et al. (2011)... Une ouverture vers ces recherches est présentée dans mon cours de 3<sup>ème</sup> année Plaut (2022).

<sup>6.</sup> Rappelons que l'un des 7 « problèmes mathématiques du millénaire » à 1 million de dollars posés par le Clay Mathematics Institute est la preuve de l'existence et régularité des solutions de l'équation de Navier-Stokes incompressible, une condition initiale  $C^{\infty}$  étant donnée, cf. www.claymath.org/millennium-problems.

<sup>7.</sup> L'une des premières études scientifiques de ce problème, sommairement décrite dans la section 7.3 de Plaut (2021b), est sans doute celle de Reynolds (1883).

## 5.2 Décomposition en champs moyens et fluctuations

En turbulence, il est utile, à la fois d'un point de vue expérimental<sup>8</sup> et théorique d'adopter une approche « statistique ». Dans cette approche on définit, pour un champ spatio-temporel  $f = f(\bar{\mathbf{x}},t)$ , sa « moyenne d'ensemble » sur N réalisations de l'écoulement dans des conditions « identiques » <sup>9</sup>

$$\langle f(\overline{\mathbf{x}},t)\rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_n(\overline{\mathbf{x}},t) .$$
 (5.1)

On écrit ainsi en tout point la décomposition dite « de Reynolds »

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{v}}' , \quad p = P + p'$$
(5.2)

avec 
$$\overline{\mathbf{V}} = \langle \overline{\mathbf{v}} \rangle$$
 la moyenne de  $\overline{\mathbf{v}}$ ,  $P = \langle p \rangle$  la moyenne de  $p$ , (5.3)

les ' indiquant les « *fluctuations* ». Par définition, les fluctuations sont à valeur moyenne nulle,

$$\langle \overline{\mathbf{v}}' \rangle = \overline{\mathbf{0}} \quad \text{et} \quad \langle p' \rangle = 0 .$$
 (5.4)

Par contre l'écart-type des fluctuations est non nul. Dans le cas d'une turbulence « stationnaire » ou « permanente », la moyenne d'ensemble coïncide souvent avec la moyenne temporelle; il s'agit là d'une propriété d'« ergodicité ».

Dans le cas où un écoulement moyen dans la direction  $x_1$  existe, de valeur typique  $V_1$ , on définit l'*intensité de turbulence* dans la direction  $x_1$ ,

$$I_1(\overline{\mathbf{x}},t) = \frac{\sqrt{\langle [v_1'(\overline{\mathbf{x}},t)]^2 \rangle}}{V_1} .$$
(5.5)

De façon plus isotrope, en ne privilégiant aucune composante de vitesse, on définit l'énergie cinétique turbulente massique moyenne

$$k(\overline{\mathbf{x}},t) = \frac{1}{2} \left\langle \overline{\mathbf{v}}'(\overline{\mathbf{x}},t) \cdot \overline{\mathbf{v}}'(\overline{\mathbf{x}},t) \right\rangle \qquad (5.6)$$

Si V est l'ordre de grandeur de  $||\overline{\mathbf{V}}||$ , on définit l'*intensité en énergie de la turbulence* 

$$I_E(\overline{\mathbf{x}},t) = \frac{\sqrt{2k(\overline{\mathbf{x}},t)}}{V} .$$
(5.7)

Ces rapports <sup>10</sup> permettent de distinguer les champs turbulents faibles,  $I \simeq 1\%$ , moyens,  $I \simeq 10\%$ , et forts,  $I \simeq 20\%$  et au-delà.

<sup>8.</sup> Pour l'analyse de mesures expérimentales.

<sup>9.</sup> Bien entendu le nombre de réalisations  $N \gg 1$ . Dans le cas d'une turbulence « instationnaire » ou « non permanente » l'expérience est toujours redémarrée de la même manière à l'instant de départ t = 0. La moyenne utilisée ici est souvent appelée « moyenne de Reynolds ».

<sup>10.</sup> On les désigne parfois comme « niveaux de turbulence ».

## 5.3 Échelles caractéristiques de la turbulence et cascade de Kolmogorov

La turbulence est un phénomène physique où les fluctuations de vitesse, pression, concentration, etc... se font sur une large gamme d'échelles. Considérons un écoulement dont le champ de vitesse moyen a pour valeur typique V, et pour longueur typique L. Par exemple :

- un écoulement de vitesse débitante V dans un canal de diamètre L,
- l'écoulement derrière un objet de taille L se déplaçant à la vitesse V dans un fluide au repos,
- l'écoulement d'un jet de vitesse V par une embouchure de taille L,
- l'écoulement autour d'une turbine de rayon L tournant à la vitesse angulaire  $\omega = V/L$ , ...

Nous notons D le domaine fluide et m la masse de fluide qu'il contient. Le temps caractéristique de l'écoulement moyen est L/V. Les fluctuations sont caractérisées non pas par une échelle, mais par **toute une gamme d'échelles**. Cette idée a été proposée par un scientifique et météorologue anglais, dans le traité Richardson (1922), puis affinée par le mathématicien russe Kolmogorov (cf. Kolmogorov 1941). Nous présentons dans cette section une première partie de la théorie de Kolmogorov (1941); la section 5.4 complètera l'exposé de cette théorie et de ses hypothèses, avec un « bonus » incontournable sur l'hypothèse de Taylor.

Notons  $\ell$  et v les longueur et vitesse typiques des fluctuations turbulentes de plus grande taille;  $\ell$  est la « macro-échelle » ou « échelle intégrale » de l'écoulement. En supposant que les temps caractéristiques de l'écoulement moyen et des plus grandes fluctuations sont similaires, nous pouvons écrire que

$$\frac{L}{V} \sim \frac{\ell}{v} \,. \tag{5.8}$$

La puissance massique injectée à grande échelle est

$$\epsilon = \frac{1}{m} \frac{dE_c}{dt} \simeq \frac{de_c}{dt} \tag{5.9}$$

avec

 $e_c~=~{\rm densit\acute{e}}$  massique d'énergie cinétique à grande échelle  $~\simeq~v^2$  .

Une estimation purement « inertielle » du taux d'évolution de l'énergie consiste à poser qu'il est donné par un temps d'advection,

$$\frac{d}{dt} \sim \frac{1}{\ell/v}$$

En conséquence on obtient l'estimation « inertielle » aux macro-échelles

$$\epsilon \simeq \frac{v^3}{\ell}$$
 (5.10)

La validité de cette relation constitue une hypothèse importante que nous notons H1, et sur laquelle nous reviendrons en section 5.4.1.

Comme l'écoulement au niveau de la macro-échelle est turbulent, le « *nombre de Reynolds turbulent* »

$$Re_{\ell} = \frac{v\ell}{\nu} \gg 1 \quad . \tag{5.11}$$

Suivant Richardson et Kolmogorov on suppose l'existence d'une *cascade inertielle d'énergie vers les petites échelles*, ces fluctuations macroscopiques transférant de l'énergie vers des plus petites échelles, disons mésoscopiques, de taille  $\ell_m$  et vitesse  $v_m$ , qui elles mêmes transférent de l'énergie vers des plus petites échelles, etc... Cette idée peut par exemple être justifiée par une analyse en modes de Fourier spatiaux<sup>11</sup>. Cette cascade se termine à l'**«** échelle de Kolmogorov »  $\ell_K$  qui correspond aux fluctuations les plus fines permises par la viscosité, où le nombre de Reynolds est donc d'ordre 1. En notant  $v_K$  la vitesse typique correspondante, on a

$$Re_K = \frac{v_K \ell_K}{\nu} \simeq 1.$$
 (5.12)

La taille  $\ell_m$  des fluctuations du « *domaine inertiel* », dans lequel a lieu la cascade, est grande devant l'échelle de Kolmogorov  $\ell_K$  et petite devant la macro-échelle  $\ell$ ,

$$\ell \gg \ell_m \gg \ell_K$$
(5.13)

Cette cascade inertielle d'énergie des grandes vers les petites échelles se traduit par l'égalité entre la puissance massique injectée à grande échelle (5.10) et la puissance massique reçue à toutes les échelles jusqu'aux échelles « visqueuses » de Kolmogorov, où elle est dissipée du fait des frottements visqueux,

$$\epsilon \simeq \frac{de_c}{dt} \simeq \frac{v^3}{\ell} \simeq \dots \simeq \frac{v_m^3}{\ell_m} \simeq \dots \simeq \frac{v_K^3}{\ell_K} = taux \ de \ dissipation \ moyen$$
 (5.14)

Or, d'après le bilan de la section 1.8, ce taux de dissipation moyen, énergie dissipée par unité de temps et de masse dans le fluide, vaut

$$\epsilon = \frac{P_{\text{dissipée}}}{m} = \frac{2\eta}{m} \iiint_{D} \overline{\overline{\mathbf{D}}} : \overline{\overline{\mathbf{D}}} d^{3}x$$
(5.15)

avec  $m = \rho L^3$  la masse du fluide dans le domaine D, de taille L, considéré. Ainsi

$$\epsilon = \frac{2\nu}{L^3} \iiint_D \overline{\overline{\mathbf{D}}} : \overline{\overline{\mathbf{D}}} d^3x .$$
(5.16)

Comme les seules fluctuations de vitesse donnant une contribution non négligeable à cette intégrale sont les échelles de Kolmogorov, nous avons

$$\epsilon \simeq \frac{2\nu}{L^3} \iiint_{D_K} \overline{\overline{\mathbf{D}}}' : \overline{\overline{\mathbf{D}}}' d^3x$$

où  $D_K \subset D$  est le support des échelles de Kolmogorov, et on a noté  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}'$  au lieu de  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$  pour bien faire apparaître le fait que ce sont les fluctuations de vitesse qui dominent la dissipation. En estimant que

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}}' \simeq \frac{v_K}{\ell_K}$$

aux échelles de Kolmogorov, nous obtenons

$$\epsilon \simeq \nu \left(\frac{v_K}{\ell_K}\right)^2 \frac{1}{L^3} \iiint_{D_K} d^3 x = \nu \left(\frac{v_K}{\ell_K}\right)^2 \Phi$$

<sup>11.</sup> Si on considère une « fluctuation » dont le champ de vitesse  $\overline{\mathbf{v}}$  est en  $\cos(kx)$  avec  $k = 2\pi/\Lambda$ , il est clair que le terme non linéaire  $(\overline{\overline{\mathbf{v}}}) \cdot \overline{\mathbf{v}}$  de l'équation de Navier-Stokes va créer une nouvelle « fluctuation » en  $\cos(2kx)$ , donc d'échelle deux fois plus petite  $\lambda = \Lambda/2$ .

avec  $\Phi$  la fraction volumique des zones dissipatives. Dans le cadre de la théorie de Kolmogorov (1941), on suppose que ces structures remplissent tout le domaine fluide <sup>12</sup> de sorte que  $\Phi \simeq 1$ . On en déduit l'estimation « visqueuse », valable aux échelles de Kolmogorov,

$$\epsilon \simeq \nu \left(\frac{v_K}{\ell_K}\right)^2 \qquad (5.17)$$

En égalant les expressions inertielles de l'énergie injectée (5.14) à l'expression visqueuse de la dissipation (5.17), on obtient l'*ordre de grandeur des échelles de Kolmogorov*,

$$\ell_K \simeq \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} \simeq \ell \ Re_{\ell}^{-3/4} \ll \ell \qquad \text{et} \qquad v_K \simeq (\epsilon \nu)^{1/4} \simeq v \ Re_{\ell}^{-1/4} \ll v \qquad (5.18)$$

compte tenu aussi de la définition (5.11) du nombre de Reynolds  $Re_{\ell}$ . L'échelle de Kolmogorov ou « échelle dissipative »  $\ell_K$  peut être vue comme la dimension des « plus petits tourbillons » présents dans l'écoulement. L'existence d'aussi petites échelles implique que le calcul numérique d'un écoulement turbulent sera particulièrement difficile, puisqu'il nécessitera une très grande résolution spatio-temporelle... Trop grande par rapport aux capacités de calcul des ordinateurs actuels <sup>13</sup>, d'où la nécessité de développer des « modèles de turbulence »...

Avant d'aller plus loin, il convient d'introduire la « *micro-échelle de Taylor* » comme l'échelle  $\lambda$  de fluctuations dont la vitesse typique serait v la vitesse des macro-échelles et qui dissiperaient *par frottement* au taux  $\epsilon$ , c'est-à-dire

$$\epsilon \sim \nu \left(\frac{v}{\lambda}\right)^2$$
 (5.19)

On montre facilement que

$$\lambda \simeq \ell R e_{\ell}^{-1/2} \gg \ell_K \qquad (5.20)$$

On construit le nombre de Reynolds correspondant

$$Re_{\lambda} = \frac{v\lambda}{\nu} = Re_{\ell}^{1/2} \qquad (5.21)$$

## 5.4 Théorie de Kolmogorov : corrélations et spectres

La théorie de Kolmogorov (1941), théorie statistique des écoulements turbulents, permet non seulement d'aboutir à des estimations telles que (5.14) et (5.18), mais aussi de faire des prédictions concernant les moments statistiques des fluctuations de vitesse et les caractéristisques « spectrales » de ces fluctuations. Nous explosons ici quelques ingrédients et résultats de cette théorie, de façon succincte, en renvoyant le lecteur intéressé à Chassaing (2000b); Davidson (2004). Au passage nous expliquons l'hypothèse de Taylor, d'une grande importance pratique.

<sup>12.</sup> Cette hypothèse est très forte et il semble qu'en réalité les échelles fines n'occupent qu'une fraction du volume des plus grandes échelles. Le développement de cette idée a mené aux « théories fractales » de la turbulence.

<sup>13.</sup> Voir à ce sujet l'exercice 5.1.

#### 5.4.1 Principales hypothèses de la théorie de Kolmogorov

Cette théorie est basée sur deux hypothèses fondamentales.

• Hypothèse H1 : le taux de dissipation moyen  $\epsilon$  est, dans le cas d'écoulements fortement turbulents  $Re_{\ell} \to +\infty$ ,  $Re_{\lambda} \to +\infty$ , de la forme (5.14),

$$\epsilon = C_{\epsilon} \frac{v^3}{\ell} \tag{5.22}$$

avec  $C_{\epsilon}$  une constante ne dépendant que du type de l'écoulement.

Hypothèse H2 : les fluctuations de petite échelle sont homogènes et isotropes, leur statistique est indépendante des mouvements de grande échelle et stationnaire ; cette statistique est déterminée uniquement par ε et ν, seulement par ε dans le domaine inertiel défini par (5.13).

L'hypothèse H1 a été vérifiée expérimentalement par Sreenivasan (1984) dans des expériences de turbulence de grille<sup>14</sup>. Sreenivasan (1984) a observé qu'en augmentant les nombres de Reynolds, la puissance massique réduite  $c_{\epsilon} = \epsilon \ell / v^3$  décroît, puis se stabilise vers une valeur indépendante des nombres de Reynolds. Récemment une étude similaire a été faite par Pearson et al. (2002), et le même type de comportement a été observé dans la plupart des cas, comme le montre la figure 5.2. La lecture de l'article de Pearson et al. (2002) est recommandée aux lecteurs les plus intéressés, car il donne des informations intéressantes sur les méthodes de mesure utilisées. On peut notamment mentionner qu'il utilise l'hypothèse de Taylor, que nous décrirons en section 5.4.4.

Le fait que la turbulence dissipe à un taux indépendant de la viscosité lorsque  $Re_{\ell}$  et  $Re_{\lambda} \to +\infty$ , ou  $\nu \to 0$ , a des conséquences importantes en « turbulence développée » : convergence asymptotique de coefficients de traînée, de perte de charge, de puissance, etc...

L'hypothèse H2 permet de faire des prédictions pour diverses quantités statistiques, ainsi que pour certaines propriétés spectrales du champ de vitesse turbulent.

## 5.4.2 Corrélation et densité spectrale d'énergie 3D

En turbulence homogène et isotrope, la fonction de corrélation 3D à deux points de la vitesse fluctuante, qui caractérise la corrélation ou décorrélation des fluctuations de vitesse entre deux points distants de r, est définie par<sup>15</sup>

$$Corr_{3D}(r) = \frac{1}{2} \left\langle \overline{\mathbf{v}}'(\overline{\mathbf{x}}, t) \cdot \overline{\mathbf{v}}'(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{r}}, t) \right\rangle$$
(5.23)

quels que soients  $\overline{\mathbf{x}}$ , t et  $\overline{\mathbf{r}}$  de norme r. La **densité spectrale d'énergie 3D** est la fonction définie par une transformée intégrale à partir de ces corrélations, <sup>16</sup>

$$E_{3D}(q) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} Corr_{3D}(r) \ qr \ \sin(qr) \ dr \ , \tag{5.24}$$

avec q le nombre d'onde. Par transformée inverse, on peut montrer que

$$Corr_{3D}(r) = \int_0^{+\infty} E_{3D}(q) \frac{\sin(qr)}{qr} dq$$
 (5.25)

<sup>14.</sup> Rappelons que la figure 5.10 présente une telle expérience.

<sup>15.</sup> La fonction  $Corr_{3D}(r)$  est notée R(r) par Davidson (2004).

<sup>16.</sup> La fonction  $E_{3D}(k)$  est notée E(k) par Davidson (2004).



**Fig. 5.2** – Figure tirée de Pearson et al. (2002), présentant en abscisse le nombre de Reynolds  $Re_{\lambda}$  et en ordonnée la **puissance massique réduite**  $c_{\epsilon} = \epsilon \ell / v^3$  déterminée expérimentalement dans divers écoulements cisaillés : sillages de plaque plane perpendiculaire à l'écoulement, sillages de disque, sillages de grille, et... écoulements en tuyau. Dans ce dernier cas, les données représentées par les triangles inversés sont restreintes au domaine  $70 \leq Re_{\lambda} \leq 180$ , et une convergence vers une valeur constante n'est pas claire.

En particulier, pour r = 0, on obtient de façon remarquable, pour l'énergie cinétique turbulente massique,

$$k = k(\overline{\mathbf{0}}, 0) = k(\overline{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2} \left\langle \overline{\mathbf{v}}'(\overline{\mathbf{x}}, t) \cdot \overline{\mathbf{v}}'(\overline{\mathbf{x}}, t) \right\rangle = \int_0^{+\infty} E_{3\mathrm{D}}(q) \, dq \quad (5.26)$$

Ainsi  $E_{3D}(q)dq$  peut être vue comme la part d'énergie cinétique turbulente due aux « fluctuations » ou « tourbillons » de nombre d'onde compris entre q et q + dq.

### 5.4.3 Corrélations et densités spectrales d'énergie 1D

La détermination expérimentale de la fonction  $Corr_{3D}(r)$  est difficile, puisqu'elle nécessite la mesure des 3 composantes de la vitesse fluctuante en deux points distants. Une autre fonction de corrélation moins difficile à mesurer est la **fonction de corrélation 1D** à deux points **longitudinale** de la vitesse fluctuante, <sup>17</sup>

$$Corr_{1\text{DL}}(r) = \frac{1}{2} \left\langle v_1'(\overline{\mathbf{x}}, t) \ v_1'(\overline{\mathbf{x}} + r\overline{\mathbf{e}}_1, t) \right\rangle .$$
(5.27)

La *densité spectrale d'énergie* 1D *longitudinale* est la fonction définie par une transformée intégrale à partir de ces corrélations, <sup>18</sup>

$$E_{1\text{DL}}(q) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} Corr_{1\text{DL}}(r) \, \cos(qr) \, dr \, .$$
 (5.28)

Par transformée inverse, on peut montrer que

$$Corr_{1DL}(r) = 2 \int_0^{+\infty} E_{1DL}(q) \cos(qr) dk$$
. (5.29)

<sup>17.</sup> La fonction  $Corr_{1DL}(r)$  est notée  $u^2 f(r)$  par Davidson (2004).

<sup>18.</sup> La fonction  $E_{1DL}(q)$  est notée  $F_{11}(q)$  par Davidson (2004).

En particulier pour r = 0 on obtient

$$\frac{1}{2} \left\langle v_1'(\bar{\mathbf{x}},t) \; v_1'(\bar{\mathbf{x}},t) \right\rangle \; = \; \frac{1}{3} k \; = \; 2 \int_0^{+\infty} E_{1\text{DL}}(q) \; dq \; . \tag{5.30}$$

Ainsi  $\frac{2}{3}E_{1\text{DL}}(q)dq$  peut être vue comme la part d'énergie cinétique turbulente due aux « *fluctuations* » ou « *tourbillons* » de nombre d'onde compris entre q et q + dq. On peut montrer que les densités spectrales d'énergie 1D longitudinale et 3D sont liées par la relation

$$E_{3D}(q) = q^3 \frac{d}{dq} \left[ \frac{1}{q} E'_{1DL}(q) \right].$$
 (5.31)

De façon analogue on peut définir la *fonction de corrélation* 1D à deux points *transverse* de la vitesse fluctuante, <sup>19</sup>

$$Corr_{1DT}(r) = \frac{1}{2} \left\langle v_1'(\overline{\mathbf{x}}, t) \ v_1'(\overline{\mathbf{x}} + r\overline{\mathbf{e}}_2, t) \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle v_2'(\overline{\mathbf{x}}, t) \ v_2'(\overline{\mathbf{x}} + r\overline{\mathbf{e}}_1, t) \right\rangle$$
(5.32)

par isotropie. La *densité spectrale d'énergie* 1D *transverse* est définie par <sup>20</sup>

$$E_{1\text{DT}}(q) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} Corr_{1\text{DT}}(r) \, \cos(qr) \, dr \,, \qquad (5.33)$$

et vérifie

$$Corr_{1DT}(r) = 2 \int_0^{+\infty} E_{1DT}(q) \cos(qr) dk$$
. (5.34)

#### 5.4.4 Hypothèse de Taylor

La mesure en deux points distincts de vecteurs vitesses, ou même d'une seule composante de vitesse, en faisant varier la distance r entre ces points, reste difficile et lourde. Notamment, il faut veiller à ce que les deux systèmes de mesure ne se perturbent pas l'un l'autre. Heureusement le physicien britannique G. I. Taylor a montré que, dans des écoulements turbulents dans lesquels une **vitesse moyenne** V existe, stationnaire à la fois en norme et en direction, on peut souvent faire l'hypothèse d'une équivalence entre mesures temporelles à position fixée et mesures à différentes position spatiales, mais au même instant. Comme faire des mesures en fonction du temps à position fixée est relativement aisé, par exemple avec un « fil chaud »<sup>21</sup>, cette hypothèse est fort pratique. Plus précisément, comme expliqué dans l'article Taylor (1938), si  $\bar{\mathbf{e}}_1$  est la direction de la vitesse moyenne en O,  $Ox_1x_2x_3$  est un repère cartésien, alors, **par advection des fluctuations de vitesse par l'écoulement moyen**,

$$v_1'(r\overline{\mathbf{e}}_1, t) \simeq v_1'(\overline{\mathbf{0}}, t - \tau) \quad \text{avec} \quad V = \frac{r}{\tau} \quad \text{i.e.} \quad \tau = \frac{r}{V} .$$
 (5.35)

La fonction de corrélation 1D à deux points longitudinale (5.27) peut donc être vue comme la fonction d'*autocorrélation temporelle* 

$$Corr_{1D}(r) \simeq \frac{1}{2} \left\langle v_1'(\overline{\mathbf{0}}, t) \; v_1'(\overline{\mathbf{0}}, t - r/V) \right\rangle \simeq \frac{1}{2} \left\langle v_1'(\overline{\mathbf{0}}, t) \; v_1'(\overline{\mathbf{0}}, t - r/V) \right\rangle_t$$
(5.36)

<sup>19.</sup> La fonction  $Corr_{1DT}(r)$  est notée  $u^2g(r)$  par Davidson (2004).

<sup>20.</sup> La fonction  $E_{1DT}(q)$  est notée  $F_{22}(q)$  par Davidson (2004).

<sup>21.</sup> Recherchez anémomètre à fil chaud ou 'Hot-Wire Anemometer' sur Internet... ou voyez l'exercice correspondant de Jannot (2012)!

avec une hypothèse d'ergodicité. Cette fonction peut se déduire par traitement du signal de la mesure de « séries temporelles » de  $v'_1(\overline{\mathbf{0}}, t)$ , c'est-à-dire de séquences de valeurs de  $v'_1(\overline{\mathbf{0}}, t)$  pour t de la forme  $n \ \delta t$ , avec  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ , N le nombre de points de la série temporelle,  $\delta t$  le temps d'échantillonage. On peut aussi utiliser un théorème d'analyse de Fourier, dit théorème de l'autocorrélation ou théorème de Wiener-Khintchine, stipulant que la transformée de Fourier de cette fonction d'autocorrélation, soit  $E_{1\text{DL}}(q)$  d'après l'équation (5.29), est le module carré de la transformée de Fourier du signal de vitesse lui-même.

De même la fonction de corrélation 1D à deux points transverse (5.32) peut être vue comme une autre fonction d'autocorrélation temporelle, ce qui permet sa mesure expérimentale.

## 5.4.5 Spectre de Kolmogorov

Les hypothèses H1 et H2 mènent à l'existence, dans le domaine inertiel des nombres d'ondes,

$$1/\ell \ll q \ll 1/\ell_K$$
, (5.37)

d'une loi de la forme

$$E(q) = f(\epsilon, q) ,$$

à la fois pour les densités spectrales  $E_{1DL}$ ,  $E_{1DT}$  et  $E_{3D}(q)$ . D'après l'analyse dimensionnelle,

$$E(q) = \pi_0 \epsilon^{\alpha} q^{\beta} ,$$

les exposants  $\alpha$  et  $\beta$  se calculent immédiatement par condition d'homogénéité, sachant que

$$E(q) \equiv \ell^3 t^{-2} . (5.38)$$

On obtient ainsi la loi dite du -5/3 de Kolmogorov (1941),

$$E(q) = \pi_0 \ \epsilon^{2/3} \ q^{-5/3} \ . \tag{5.39}$$

Dans cette équation,  $\pi_0$  est une constante « universelle », dite « contante de Kolmogorov », qui dépend de la densité spectrale considérée,  $E_{1\text{DL}}$ ,  $E_{1\text{DT}}$  ou  $E_{3\text{D}}$ . Un exemple de spectres expérimentaux démontrant la loi d'échelle (5.39) est celui de la figure 5.3.

§

Cette théorie de Kolmogorov donne des informations sur les fluctuations turbulentes, mais elle renseigne très peu sur l'influence de ces fluctuations sur l'écoulement moyen. Or la turbulence modifie les grandeurs moyennes, comme le profil de vitesse ou la perte de pression motrice. L'approche classique pour modéliser cet effet consiste à utiliser la décomposition en champs moyens et fluctuations de la section 5.2, pour essayer d'aboutir à une équation d'évolution pour les champs moyens seuls. Nous verrons que, malheureusement, on aboutit de cette manière à des équations « ouvertes », et qu'il faut donc développer des « modèles de fermeture » pour certains termes apparaissant dans ces équations.



**Fig. 5.3** – **Densités spectrales d'énergie** déterminées expérimentalement dans un **jet** d'air turbulent, grâce à des mesures par fil chaud (Champagne 1978; Frisch 1995). Les mesures ont été menées à une distance 70*d* de la buse, avec d = 10 cm le diamètre de celle-ci. Le nombre de Reynolds construit sur la vitesse débitante et *d* est  $Re = 3,7 \ 10^5$ . Le nombre d'onde en abscisse est noté *k* plutôt que *q*. Disques vides : densité spectrale  $E_{1\text{DL}}$  des fluctuations de vitesse longitudinale, dans la direction de l'écoulement moyen. Disques pleins : densité spectrale  $E_{1\text{DT}}$  des fluctuations d'une composante de vitesse transverse, perpendiculairement à l'écoulement moyen. Notez l'accord avec la loi du -5/3 de Kolmogorov (1941) dans la gamme inertielle des nombres d'ondes. Remarquez aussi que pour les grands nombres d'ondes les densités spectrales décroissent plus rapidement, à cause d'un effet que vous nommerez...

## 5.5 Équations de Reynolds

Rappelons que la décomposition de Reynolds en champs moyens et fluctuations s'écrit

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{v}}' , \quad p = P + p'$$
(5.40)

avec

$$\overline{\mathbf{V}} = \langle \overline{\mathbf{v}} \rangle$$
 la moyenne de  $\overline{\mathbf{v}}$ ,  $P = \langle p \rangle$  la moyenne de  $p$ , (5.41)

 $\overline{\mathbf{v}}'$  et p' les fluctuations telles que

$$\langle \overline{\mathbf{v}}' \rangle = \overline{\mathbf{0}} \quad \text{et} \quad \langle p' \rangle = 0 .$$
 (5.42)

Par linéarité de la définition (5.1), il est clair que l'on peut faire commuter les opérateurs de prise de moyenne et de dérivation spatio-temporelle,

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} \,.$$
 (5.43)

D'autre part on peut supposer raisonnablement que, pour toutes grandeurs f et g,

$$\langle\langle f \rangle \rangle = \langle f \rangle , \quad \langle\langle f \rangle g \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle , \quad \langle\langle f \rangle \langle g \rangle \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle .$$
 (5.44)

Par contre

$$\langle fg \rangle \neq \langle f \rangle \langle g \rangle$$
,

comme on peut s'en convaincre en considérant le cas particulier où  $f = g = v'_x$ . Commençons par moyenner l'équation de conservation de la masse en fluide incompressible, soit (1.26),

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{v}} = 0. \tag{5.45}$$

Il vient immédiatement

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{V}} = 0 \quad , \tag{5.46}$$

i.e. l'écoulement moyen est incompressible. En soustrayant l'équation (5.46) à l'équation (5.45), on obtient au passage que l'écoulement fluctuant est aussi incompressible,

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{v}}' = 0. (5.47)$$

D'autre part on considère l'équation de Navier-Stokes (1.46), le terme non linéaire étant écrit sous la forme de la divergence du tenseur  $\overline{\mathbf{v}} \otimes \overline{\mathbf{v}}$ , selon ce que l'on a vu dans l'exercice 2.6 de Plaut (2021*a*),

$$\rho \left[ \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{div}} (\overline{\mathbf{v}} \otimes \overline{\mathbf{v}}) \right] = \rho \overline{\mathbf{g}} - \overline{\mathbf{\nabla}} p + \eta \overline{\mathbf{\Delta}} \overline{\mathbf{v}} .$$
 (5.48)

Lorsque l'on effectue une prise de moyenne de cette équation, le terme non linéaire s'écrit

$$\langle \overline{\mathbf{v}} \otimes \overline{\mathbf{v}} \rangle = \langle \overline{\mathbf{V}} \otimes \overline{\mathbf{V}} \rangle + \langle \overline{\mathbf{V}} \otimes \overline{\mathbf{v}}' \rangle + \langle \overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{V}} \rangle + \langle \overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{v}}' \rangle = \overline{\mathbf{V}} \otimes \overline{\mathbf{V}} + \langle \overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{v}}' \rangle$$
(5.49)

compte tenu des propriétés (5.42) et (5.44). On peut donc écrire pour le champ moyen une équation de Navier-Stokes mais avec un terme supplémentaire dû au dernier terme de (5.49). C'est l'« équation de Reynolds »

$$\rho \left[ \frac{\partial \overline{\mathbf{V}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{div}} (\overline{\mathbf{V}} \otimes \overline{\mathbf{V}}) \right] = \rho \left[ \frac{\partial \overline{\mathbf{V}}}{\partial t} + \left( \overline{\overline{\mathbf{\nabla}}} \overline{\mathbf{V}} \right) \cdot \overline{\mathbf{V}} \right] = \rho \overline{\mathbf{g}} - \overline{\mathbf{\nabla}} P + \eta \overline{\mathbf{\Delta}} \overline{\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{div}} (\overline{\overline{\tau}}^t)$$
(5.50)

avec le « tenseur des contraintes turbulentes de Reynolds » ou « tenseur de Reynolds »

$$\overline{\overline{\tau}}^t = -\rho \left\langle \overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{v}}' \right\rangle$$
(5.51)

Il décrit l'effet des fluctuations de vitesse sur l'écoulement moyen, par « advection ». De façon cruciale, dans l'équation d'évolution (5.50) des « moments d'ordre 1 »  $\overline{\mathbf{V}}$  apparaissent des « moments d'ordre 2 »  $\langle \overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{v}}' \rangle$ .

Avant d'en dire plus sur  $\overline{\tau}^t$ , mentionnons que l'on parle souvent d'« équations de Reynolds » au pluriel, la première étant l'équation scalaire (5.46), la seconde étant l'équation vectorielle (5.50). En anglais, on désigne ces équations comme les 'Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations', et on qualifie les modèles qui prennent pour point de départ la décomposition (5.40) et ces équations avec l'abréviation correspondante : on parle de 'RANS models'.

Le tenseur de Reynolds (5.51) est **symétrique**, mais, contrairement au tenseur des contraintes visqueuses<sup>22</sup>

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\eta \overline{\mathbf{D}}(\overline{\mathbf{v}}) , \qquad (5.52)$$

<sup>22.</sup> Dans l'équation (5.52), on rappelle quel est le champ de vitesse utilisé pour définir les taux de déformation, afin d'éviter toute ambiguité.

il n'est pas de trace nulle. Exactement

$$\operatorname{tr}\overline{\overline{\tau}}^{t} = -\rho \left\langle \overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{v}}' \right\rangle = -2\rho k \tag{5.53}$$

où k est l'énergie cinétique turbulente massique définie par l'équation (5.6).

Avant d'étudier diverses modélisations possibles de  $\overline{\overline{\tau}}^t$ , donnons l'équation de Reynolds (5.50) en composantes cartésiennes :

$$\rho \left[ \frac{\partial V_i}{\partial t} + \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) V_j \right] = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^t}{\partial x_j}$$
(5.54)

avec

$$\tau_{ij}^t = -\rho \left\langle v_i' \, v_j' \right\rangle \tag{5.55}$$

Par exemple

$$\tau_{xx}^{t} = -\rho \operatorname{Var}(v_{x}) \quad \text{avec} \quad \operatorname{Var}(v_{x}) = \left\langle v_{x}' \ v_{x}' \right\rangle \text{ la variance de } v_{x} ,$$
  
$$\tau_{xy}^{t} = -\rho \operatorname{Covar}(v_{x}, v_{y}) \quad \text{avec} \quad \operatorname{Covar}(v_{x}, v_{y}) = \left\langle v_{x}' \ v_{y}' \right\rangle \text{ la covariance de } v_{x} \text{ et } v_{y} ,$$
  
(5.56)

quantités qui ont une signification physique claire. Mentionnons enfin que l'on regroupe souvent le terme de pression et de pesanteur, en utilisant la pression motrice au lieu de la pression.

## 5.6 Modèle de Boussinesq - Viscosité turbulente

Clairement, le système des équations (5.46) et (5.50), soient 4 équations en composantes pour les champs inconnus  $P, \overline{\mathbf{V}}$  et  $\overline{\overline{\tau}}^t$ , soient 10 champs en composantes, n'est pas « fermé ». Il y a donc nécessité de définir des « équations de fermeture » pour « fermer » le problème. Le **modèle de Boussinesq** consiste à supposer que le tenseur des contraintes turbulentes est la superposition d'un **terme d'énergie cinétique**, **isotrope**, qui permet de respecter la condition (5.53), soit

$$\overline{\overline{\tau}}_{iso}^{t} = \alpha \overline{\mathbf{I}} \quad \text{avec} \quad -2\rho k = 3\alpha \quad \text{i.e.} \quad \alpha = -\frac{2}{3}\rho k ,$$
$$\overline{\overline{\tau}}_{iso}^{t} = -\frac{2}{3}\rho k \overline{\overline{\mathbf{I}}} , \qquad (5.57)$$

et d'un terme de « *diffusion turbulente* », de trace nulle, proportionnel au tenseur des taux de déformation de l'écoulement moyen, vu comme la « source » de cette turbulence,

$$\overline{\overline{\tau}}_{\text{defmoy}}^t = 2\eta^t \,\overline{\overline{\mathbf{D}}}(\overline{\mathbf{V}}) \,. \tag{5.58}$$

Cette « loi de comportement (phénoménologique !) de la turbulence » est écrite par analogie avec la loi de comportement visqueuse (5.52), mais, malheureusement, elle est beaucoup moins « sûre » ! Cette formule (5.58) introduit la « viscosité dynamique turbulente »  $\eta^t$ , en général grande devant la viscosité dynamique intrinsèque  $\eta$  du fluide. On appelle aussi parfois  $\eta^t$  « viscosité tourbillonnaire », en faisant allusion au fait qu'elle modélise les phénomènes de « dispersion » par les tourbillons de la turbulence <sup>23</sup>. Bien entendu la « viscosité cinématique turbulente »

$$\nu^t = \frac{\eta^t}{\rho}$$
 (5.59)

<sup>23.</sup> En anglais on désigne ainsi  $\eta^t$  comme the 'eddy viscosity', sachant qu'un 'eddy' est un tourbillon. Pour insister sur la différence entre diffusion physique visqueuse et « diffusion turbulente », certains auteurs parlent plutôt à ce sujet de « dispersion turbulente ».

Au bilan

$$\overline{\overline{\tau}}^t = \overline{\overline{\tau}}^t_{\text{iso}} + \overline{\overline{\tau}}^t_{\text{défmoy}} = -\frac{2}{3}\rho k\overline{\overline{\mathbf{1}}} + 2\eta^t \overline{\overline{\mathbf{D}}}(\overline{\mathbf{V}}) \qquad (5.60)$$

soit, en composantes en coordonnées cartésiennes,

$$\tau_{ij}^{t} = -\rho \left\langle v_{i}^{\prime} v_{j}^{\prime} \right\rangle = -\frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} + \eta^{t} \left( \frac{\partial V_{i}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial V_{j}}{\partial x_{i}} \right).$$
(5.61)

Lorsque l'on injecte, dans l'équation de Reynolds (5.50) pour la vitesse moyenne, ce modèle de Boussinesq (5.60), on obtient, de façon intrinsèque, l'« équation de Reynolds - Boussinesq »

$$\rho \left[ \frac{\partial \overline{\mathbf{V}}}{\partial t} + \left( \overline{\overline{\mathbf{\nabla}}} \overline{\mathbf{V}} \right) \cdot \overline{\mathbf{V}} \right] = \rho \overline{\mathbf{g}} - \overline{\mathbf{\nabla}} \left( P + \frac{2}{3} \rho k \right) + 2 \overline{\operatorname{div}} \left[ (\eta + \eta^t) \overline{\overline{\mathbf{D}}} (\overline{\mathbf{V}}) \right] , \qquad (5.62)$$

ou, en composantes cartésiennes,

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) = \rho g_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(P + \frac{2}{3}\rho k\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\eta + \eta^t)\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\right]$$
(5.63)

- Le terme d'énergie cinétique turbulente corrige la pression; on peut à juste titre parler d'« effet Bernoulli turbulent ».
- La viscosité turbulente « augmente » la viscosité physique ou « microscopique », ce qui est cohérent avec l'idée que le « mélange turbulent » améliore ou accélère la diffusion.

## 5.7 Modèle de longueur de mélange de Prandtl

Ce modèle, valable dans des cas où l'*écoulement moyen* est *fortement cisaillé*, avec par exemple une composante dominante dans le tenseur gradient de vitesse moyenne

$$rac{\partial V_1}{\partial x_2} \overline{\mathbf{e}}_1 \otimes \overline{\mathbf{e}}_2$$

pose une formule simple pour la viscosité turbulente, basée sur son analyse dimensionnelle, et sur l'idée que le cisaillement crée la turbulence,

$$\eta^t \equiv \rho \ \ell \ v \equiv \rho \ \ell^2 \ \frac{dv}{d\ell} \ . \tag{5.64}$$

Prandtl a proposé d'introduire une « longueur de mélange » <sup>24</sup>  $\ell_m$ , échelle caractéristique de la zone cisaillée, et d'écrire que

$$\eta^t = \rho \,\ell_m^2 \,\left| \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right| \,, \tag{5.65}$$

ce qui a beaucoup de sens physique. Bien entendu, il faut pour fermer le modèle spécifier cette longueur de mélange  $\ell_m$ . On pourrait s'inquiéter du fait que l'énergie cinétique turbulente massique k reste inconnue. Cependant elle n'introduit dans l'équation de Reynolds (5.50) qu'une correction à la pression ou pression motrice moyenne, qui est souvent peu pertinente. Nous verrons des applications de cette approche dans les problèmes 5.1 et 5.4.

<sup>24. &#</sup>x27;Mixing length' en anglais; on dit ainsi, lorsque l'on écrit l'équation (5.65), que l'on pose une « hypothèse de longueur de mélange », 'Mixing Length Hypothesis'.

## 5.8 Équations d'évolutions supplémentaires

## 5.8.1 Motivation : mise en place du modèle $k - \varepsilon$ . Dissipations

Nous allons mettre en place un modèle plus sophistiqué et général que le modèle de longueur de mélange de Prandtl, à savoir, le modèle  $k - \varepsilon$  introduit par Launder & Spalding (1974). On reste au départ sur la même approche avec la décomposition de Reynolds (5.40), l'équation de Reynolds associée, et l'hypothèse de Boussinesq, qui conduisent à l'équation (5.62). On est donc toujours dans l'approche des modèles avec « moyenne de Reynolds » ou **'RANS Models'** en anglais. L'idée du modèle  $k - \varepsilon$  est de faire dépendre la viscosité turbulente de deux fonctions qui caractérisent naturellement la turbulence locale, et qui ont donc un intérêt en soi. Ces fonctions vont être calculées localement à partir d'équations aux dérivées partielles les plus physiques possibles. La première de ces fonctions est l'énergie cinétique turbulente massique  $k(\bar{\mathbf{x}},t)$  déjà introduite équation (5.6). La deuxième de ces fonctions ressemble fortement au taux de dissipation moyen  $\epsilon$ introduit dans la section 5.3, mais considéré localement. Nous notons dorénavant la dissipation turbulente massique locale

$$\epsilon(\overline{\mathbf{x}},t) = 2\nu \left\langle \overline{\overline{\mathbf{D}}}'(\overline{\mathbf{x}},t) : \overline{\overline{\mathbf{D}}}'(\overline{\mathbf{x}},t) \right\rangle = 2\nu \left\langle D'_{ij}(\overline{\mathbf{x}},t)D'_{ij}(\overline{\mathbf{x}},t) \right\rangle$$
(5.66)

avec

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}}' = \overline{\overline{\mathbf{D}}}(\overline{\mathbf{v}}') , \qquad (5.67)$$

et la *pseudo-dissipation turbulente massique* locale

$$\varepsilon(\overline{\mathbf{x}},t) = \nu \left\langle \overline{\overline{\mathbf{\nabla}}} \overline{\mathbf{v}}'(\overline{\mathbf{x}},t) : \overline{\overline{\mathbf{\nabla}}} \overline{\mathbf{v}}'(\overline{\mathbf{x}},t)^T \right\rangle = \nu \left\langle \frac{\partial v_i'(\overline{\mathbf{x}},t)}{\partial x_j} \frac{\partial v_i'(\overline{\mathbf{x}},t)}{\partial x_j} \right\rangle \,, \tag{5.68}$$

la dernière formule étant valable en coordonnées cartésiennes, comme tous les calculs en composante qui suivent. La terminologie « dissipation » pour  $\epsilon$ , « pseudo-dissipation » pour  $\varepsilon$ , est empruntée à Chassaing (2000*b*), mais plusieurs auteurs appellent aussi « dissipation »  $\varepsilon$ , voire, confondent ces deux quantités, qui sont de fait souvent proches, et apparaissent toutes deux comme un taux de disparition de l'énergie turbulente *k*, cf. les équations (5.79) et (5.80) ci-dessous. En toute rigueur, cependant, c'est  $\varepsilon$  et non  $\epsilon$  qui est utilisé dans le modèle de Launder et coopérateurs.

De manière générale, on peut montrer par du calcul tensoriel <sup>25</sup> les relations suivantes, où l'on omet de rappeler la dépendance en  $(\bar{\mathbf{x}},t)$  pour alléger les notations,

$$\epsilon - \varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right\rangle = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle v'_i \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right\rangle = \nu \operatorname{div} \left\langle \overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\overline{\mathbf{\nabla}}} \overline{\mathbf{v}}'^T \right\rangle , \qquad (5.69)$$

et

$$2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle D'_{ij} v'_i \right\rangle - \epsilon = \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - \varepsilon , \qquad (5.70)$$

soit, intrinsèquement,

$$2\nu \operatorname{div}\left\langle \overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}' \right\rangle - \epsilon = \nu \Delta k - \varepsilon .$$
 (5.71)

On en déduit que, si la turbulence est spatialement homogène,

$$\epsilon = \varepsilon$$
 . (5.72)

<sup>25.</sup> C'est l'objet de l'exercice 5.2; on utilise la propriété d'incompressibilité.

Comme on s'approche de cette situation en *turbulence développée à grand nombre de Reynolds*, on retiendra que dans ce cas

$$\epsilon \simeq \varepsilon$$
. (5.73)

Notons aussi que, si on écrit des bilans globaux en intégrant sur le volume, la différence  $\epsilon - \varepsilon$  une fois intégrée revient à un terme de bord souvent nul ou négligeable.

Suivant une démarche physique, il nous faut donc, pour mettre en place le modèle  $k - \varepsilon$ , tout d'abord, établir les équations d'évolution de la vitesse fluctuante, puis de l'énergie cinétique fluctuante ou « turbulente » moyenne, et au moins mentionner l'existence d'une équation d'évolution de la pseudo-dissipation.

## 5.8.2 Équation d'évolution de la vitesse fluctuante

En soustrayant l'équation (5.50) à l'équation (5.48), il vient l'équation d'évolution de la vitesse fluctuante

$$\rho \left[ \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}'}{\partial t} + \overline{\mathbf{div}} (\overline{\mathbf{V}} \otimes \overline{\mathbf{v}}' + \overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{v}}') \right] = -\overline{\mathbf{\nabla}} p' + \eta \overline{\Delta} \overline{\mathbf{v}}' - \overline{\mathbf{div}} (\overline{\overline{\tau}}^t) .$$
(5.74)

## 5.8.3 Équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente

Prenons le produit scalaire de l'équation précédente avec  $\overline{\mathbf{v}}'$ . Il vient

$$\rho\left[\overline{\mathbf{v}}'\cdot\frac{\partial\overline{\mathbf{v}}'}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}}'\cdot\overline{\mathbf{div}}(\overline{\mathbf{V}}\otimes\overline{\mathbf{v}}'+\overline{\mathbf{v}}'\otimes\overline{\mathbf{V}}+\overline{\mathbf{v}}'\otimes\overline{\mathbf{v}}')\right] = -\overline{\mathbf{v}}'\cdot\overline{\mathbf{\nabla}}p' + \eta\overline{\mathbf{v}}'\cdot\overline{\mathbf{\Delta}}\overline{\mathbf{v}}' - \overline{\mathbf{v}}'\cdot\overline{\mathbf{div}}(\overline{\overline{\tau}}^t).$$

Prenons maintenant la moyenne d'ensemble de cette équation. Il vient

$$\rho \left[ \frac{\partial k}{\partial t} + \left\langle \overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{div}} (\overline{\mathbf{V}} \otimes \overline{\mathbf{v}}' + \overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{v}}') \right\rangle \right] = -\left\langle \overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{\nabla}} p' \right\rangle + \eta \left\langle \overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{\Delta}} \overline{\mathbf{v}}' \right\rangle .$$
(5.75)

On observe que dans cette équation d'évolution du « moment d'ordre 2 » k apparaissent des « moments d'ordre 3 »  $\langle \overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{div}}(\overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{v}}') \rangle$ . On rappelle <sup>26</sup> que, pour des champs à divergence nulle,

$$\overline{\operatorname{div}}(\overline{\mathbf{V}}\otimes\overline{\mathbf{v}}') \ = \ \left(\overline{\overline{\mathbf{\nabla}}}\overline{\mathbf{V}}\right)\cdot\overline{\mathbf{v}}' \ , \quad \overline{\operatorname{div}}(\overline{\mathbf{v}}'\otimes\overline{\mathbf{V}}) \ = \ \left(\overline{\overline{\mathbf{\nabla}}}\overline{\mathbf{v}}'\right)\cdot\overline{\mathbf{V}} \ , \quad \overline{\operatorname{div}}(\overline{\mathbf{v}}'\otimes\overline{\mathbf{v}}') \ = \ \left(\overline{\overline{\mathbf{\nabla}}}\overline{\mathbf{v}}'\right)\cdot\overline{\mathbf{v}}' \ .$$

En coordonnées cartésiennes on a donc

$$\begin{split} \overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{div}} (\overline{\mathbf{V}} \otimes \overline{\mathbf{v}}' + \overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{v}}') &= v'_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j} v'_j + v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} V_j + v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} v'_j \\ &= \frac{\partial V_i}{\partial x_j} v'_i v'_j + \frac{1}{2} V_j \frac{\partial (v'_i v'_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{2} v'_j \frac{\partial (v'_i v'_i)}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial V_i}{\partial x_j} v'_i v'_j + \frac{1}{2} V_j \frac{\partial (v'_i v'_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial (v'_i v'_i v'_j)}{\partial x_j} \end{split}$$

soit, après prise de moyenne,

$$\left\langle \overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{div}} (\overline{\mathbf{V}} \otimes \overline{\mathbf{v}}' + \overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{v}}' \otimes \overline{\mathbf{v}}') \right\rangle = -\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\tau_{ij}^t}{\rho} + V_j \frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2} \left\langle v_i' v_i' v_j' \right\rangle .$$
(5.76)

<sup>26.</sup> Cf. le formulaire de calcul tensoriel de Plaut (2021b).

Toujours d'après le calcul tensoriel<sup>26</sup>,

Le deuxième terme de droite

$$\overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{\nabla}} p' = \operatorname{div}(p' \overline{\mathbf{v}}') . \tag{5.77}$$

D'autre part

$$\operatorname{div}\left(\overline{\mathbf{v}}'\cdot\overline{\mathbf{D}}'\right) = \overline{\mathbf{v}}'\cdot\overline{\mathbf{div}}\left(\overline{\overline{\mathbf{D}}}'\right) + \overline{\overline{\mathbf{D}}}':\overline{\overline{\mathbf{v}}}\overline{\mathbf{v}}' = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{v}}'\cdot\overline{\mathbf{\Delta}}\overline{\mathbf{v}}' + \overline{\overline{\mathbf{D}}}':\overline{\overline{\mathbf{D}}}'$$

i.e.

$$\overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{\Delta}} \overline{\mathbf{v}}' = 2 \operatorname{div} \left( \overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}' \right) - 2 \overline{\overline{\mathbf{D}}}' : \overline{\overline{\mathbf{D}}}' .$$

Si on effectue la multiplication par  $\nu = \eta/\rho$  et la prise de moyenne, on obtient

$$\nu \langle \overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\mathbf{\Delta}} \overline{\mathbf{v}}' \rangle = 2\nu \operatorname{div} \left\langle \overline{\mathbf{v}}' \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}' \right\rangle - 2\nu \left\langle \overline{\overline{\mathbf{D}}}' : \overline{\overline{\mathbf{D}}}' \right\rangle .$$
 (5.78)

Cette dernière quantité n'est autre que l'opposé de la dissipation turbulente massique (5.66). En divisant l'équation (5.75) par  $\rho$  et en utilisant (5.76), (5.77) et (5.78), on obtient

$$\frac{\partial k}{\partial t} + V_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \left\langle p' v_j' \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle v_i' v_i' v_j' \right\rangle \right) + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\tau_{ij}^t}{\rho} + 2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle D_{ij}' v_i' \right\rangle - \epsilon .$$
(5.79)

L'égalité (5.70) permet de récrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\partial k}{\partial t} + V_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\rho} \left\langle p' v_j' \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle v_i' v_i' v_j' \right\rangle \right) + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\tau_{ij}^t}{\rho} - \varepsilon .$$
(5.80)

Cette équation montre que  $\varepsilon$  est bien une « dissipation », au moins aussi pertinente que  $\epsilon$ , et, en tout cas, plus « pratique », puisque l'équation (5.80) comporte un terme de moins à modéliser que l'équation (5.79).

Les termes de gauche de l'équation (5.80) se regroupent, classiquement, en

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + V_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial k}{\partial t} + (\overline{\nabla}k) \cdot \overline{\nabla}$$
(5.81)

comprenant un terme de dérivée temporelle à position fixée et un terme d'advection par l'écoulement moyen. Le premier terme de droite de l'équation (5.80) est un terme de diffusion visqueuse de k,

$$\operatorname{div}\left(\nu\overline{\nabla}k\right) = \nu\Delta k .$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_{j}}\left\langle p'v_{j}'\right\rangle$$
(5.82)

peut être vu comme la moyenne de la puissance des forces de pression fluctuantes dans le mouvement turbulent. Le troisième terme

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\langle v_i'v_i'v_j'\right\rangle \tag{5.83}$$

décrit la « diffusion turbulente », et correspond à un effet fortement non linéaire, puisqu'il s'agit de « moments d'ordre 3 ». Suit - avant le dernier terme de dissipation - un terme qui n'est pas une divergence,

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\tau_{ij}^t}{\rho} = \overline{\overline{\nabla}} \overline{V} : \frac{\overline{\overline{\tau}}^t}{\rho} , \qquad (5.84)$$

et exprime l'influence de l'écoulement moyen sur l'énergie des fluctuations.

## 5.8.4 Équation d'évolution de la pseudo-dissipation turbulente

L'établissement d'une équation d'évolution pour la pseudo-dissipation turbulente requiert un calcul tensoriel lourd. Pour ce que nous en ferons, il n'est pas indispensable de l'expliciter ici; le lecteur passionné pourra consulter le chapitre 3 de Chassaing (2000b)... On mentionne juste que, contrairement à l'équation de l'énergie cinétique turbulente (5.80), qui comprend 5 termes connus et « seulement » 2 termes à modéliser, cette équation ne contient que 3 termes connus et 7 termes à modéliser, prenant ainsi la forme

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + (\overline{\boldsymbol{\nabla}}\varepsilon) \cdot \overline{\boldsymbol{V}} = \operatorname{div}(\nu \overline{\boldsymbol{\nabla}}\varepsilon) + TM , \qquad (5.85)$$

avec TM l'ensemble des termes inconnus. On en explicite 3 ci-dessous :

$$TM = -2\nu \left\langle v'_k \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right\rangle \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j \partial x_k} - 2\nu \left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \varepsilon v'_k \right\rangle + \dots$$

## **5.9** Modèle $k - \varepsilon$

## 5.9.1 Équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente modélisée

Dans le modèle  $k - \varepsilon$  on adopte tout d'abord la modélisation de Boussinesq (5.60) du tenseur de Reynolds. En conséquence le terme de couplage (5.84) s'écrit

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\tau_{ij}^t}{\rho} = -\frac{2}{3} k \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + 2\nu^t \frac{\partial V_i}{\partial x_j} D_{ij}(\overline{\mathbf{V}}) = 2\nu^t \frac{\partial V_i}{\partial x_j} D_{ij}(\overline{\mathbf{V}}) , \qquad (5.86)$$

compte tenu aussi de l'hypothèse d'incompressibilité et de la conservation de la masse. En utilisant la décomposition du gradient de vitesse moyenne en partie symétrique et antisymétrique, vue en calcul tensoriel,

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = D_{ij}(\overline{\mathbf{V}}) + \omega_{ij}(\overline{\mathbf{V}}) ,$$

comme la double contraction d'un tenseur d'ordre deux antisymétrique, ici,  $\overline{\overline{\omega}}(\overline{\mathbf{V}})$ , avec un tenseur d'ordre deux symétrique, ici,  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}(\overline{\mathbf{V}})$ , est nulle, il vient que le terme de couplage

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\tau_{ij}^t}{\rho} = 2\nu^t \frac{\partial V_i}{\partial x_j} D_{ij}(\overline{\mathbf{V}}) = 2\nu^t D_{ij}(\overline{\mathbf{V}}) D_{ij}(\overline{\mathbf{V}}) .$$
(5.87)

Ce terme est une puissance massique toujours positive : le modèle de Boussinesq pose que les gradients de l'écoulement moyen créent la turbulence. On appelle aussi pour cette raison le terme de couplage (5.87) « terme de production ».

Afin d'obtenir pour k une équation « simple », on modélise les termes inconnus dans (5.80) par analogie avec le premier terme, de diffusion moléculaire, en les écrivant comme un terme de diffusion turbulente :

$$-\frac{1}{\rho} \left\langle p' v'_j \right\rangle \ - \ \frac{1}{2} \left\langle v'_i v'_i v'_j \right\rangle \ = \ \frac{\nu^t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \ .$$

où  $\sigma_k$  est une constante du modèle, prise en général égale à 1,

$$\sigma_k \simeq 1. \tag{5.88}$$

L'équation modèle pour l'évolution de k s'écrit donc

$$\frac{\partial k}{\partial t} + V_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu^t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + 2\nu^t \frac{\partial V_i}{\partial x_j} D_{ij}(\overline{\mathbf{V}}) - \varepsilon \quad (5.89)$$

soit, intrinsèquement,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \left(\overline{\mathbf{\nabla}}k\right) \cdot \overline{\mathbf{V}} = \operatorname{div}\left[\left(\nu + \frac{\nu^t}{\sigma_k}\right) \overline{\mathbf{\nabla}}k\right] + 2\nu^t \overline{\overline{\mathbf{\nabla}}}\overline{\mathbf{V}} : \overline{\overline{\mathbf{D}}}(\overline{\mathbf{V}}) - \varepsilon \quad (5.90)$$

#### 5.9.2 Équation d'évolution de la pseudo-dissipation turbulente modélisée

La complexité de l'équation d'évolution de la pseudo-dissipation turbulente « exacte » (5.85) rend sa modélisation très difficile<sup>27</sup>. De façon très phénoménologique, on fait apparaître dans l'équation modélisée un terme de diffusion turbulente

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nu^t}{\sigma_\epsilon} \overline{\boldsymbol{\nabla}} \varepsilon\right) \,,$$

et des termes de « production » et « dissipation » directement déduits de ceux de l'équation pour k (5.90), en les multipliant par  $\varepsilon/k$  pour assurer l'homogénéité dimensionnelle, et en introduisant des constantes  $C_1$  et  $C_2$  pour se donner un peu de latitude. On écrit donc, de façon intrinsèque,

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \left(\overline{\boldsymbol{\nabla}}\varepsilon\right) \cdot \overline{\boldsymbol{V}} = \operatorname{div}\left[\left(\nu + \frac{\nu^t}{\sigma_{\varepsilon}}\right)\overline{\boldsymbol{\nabla}}\varepsilon\right] + 2C_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu^t \overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\overline{\boldsymbol{V}} : \overline{\overline{\mathbf{D}}}(\overline{\mathbf{V}}) - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}\right], \quad (5.91)$$

soit, en composantes,

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + V_j \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu^t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j} \right] + 2C_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu^t \frac{\partial V_i}{\partial x_j} D_{ij}(\overline{\mathbf{V}}) - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \right], \quad (5.92)$$

Les constantes du modèle, ajustées par comparaison à certaines expériences, cf. par exemple la fin du problème 5.1, ainsi que l'exercice 5.4, sont prises en général comme suit :

 $\sigma_{\varepsilon} \simeq 1.3$ ,  $C_1 \simeq 1.44$ ,  $C_2 \simeq 1.92$ . (5.93)

## 5.9.3 Modèle $k - \varepsilon$ de la viscosité turbulente

Le système formé de l'équation de la quantité de mouvement (5.62) pour  $\overline{\mathbf{V}}$  et des équations scalaires (5.90) pour k, (5.91) pour  $\varepsilon$ , n'est pas fermé, puisque le champ  $\nu^t$  est encore inconnu. Comme déjà écrit, le principe du modèle  $k - \varepsilon$  est que les scalaires k et  $\varepsilon$  contrôlent la viscosité turbulente. Par analyse dimensionnelle on aboutit alors immédiatement à

$$\nu^t = C_{\nu} \frac{k^2}{\varepsilon} \,, \tag{5.94}$$

<sup>27.</sup> Ce qui fait dire d'ailleurs à Davidson (2004), quand il en arrive à ce stade de l'histoire du modèle  $k - \varepsilon$ : 'The  $\varepsilon$  equation, on the other hand, is almost pure invention' !...

qui a en plus une bonne signification physique : plus l'énergie cinétique turbulente est élevée, plus la viscosité turbulente l'est; au contraire une grande dissipation turbulente diminue la viscosité turbulente. Par comparaison à certaines expériences, Launder & Spalding (1974) recommandent d'utiliser

$$C_{\nu} \simeq 0.09$$
 . (5.95)

## 5.10 Diffusion turbulente d'un champ scalaire

Considérons un *champ scalaire*  $\rho_s$  qui peut être la concentration d'un polluant, d'un produit, la température, etc... Il satisfait en général une équation d'évolution de la forme

$$\frac{d\rho_s}{dt} = \frac{\partial\rho_s}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{\nabla}} \rho_s = -\text{div} \,\overline{\mathbf{j}}_s \tag{5.96}$$

où le flux diffusif  $\overline{\mathbf{j}}_s$  suit une *loi de Fick* ou *Fourier*,

$$\overline{\mathbf{j}}_s = -D \,\overline{\mathbf{\nabla}}\rho_s \tag{5.97}$$

avec *D* le *coefficient de diffusion* ou *diffusivité* du scalaire. Celui-ci évolue donc suivant l'équation d'*advection-diffusion* 

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{\nabla}} \rho_s = \operatorname{div} \left( D \ \overline{\mathbf{\nabla}} \rho_s \right) = D \ \Delta \rho_s \tag{5.98}$$

dans les cas usuels où le coefficient D est uniforme. Cette équation montre aussi que

$$D \equiv \ell^2 t^{-1} . (5.99)$$

Comme le champ de vitesse est à divergence nulle, on peut aussi écrire l'équation (5.98) sous la forme générale

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_s \overline{\mathbf{v}}) = \operatorname{div}(D \ \overline{\mathbf{\nabla}} \rho_s)$$
(5.100)

En présence de *turbulence*, on observe que la diffusion est accélérée; on parle d'effets de « *diffusion turbulente* » ou encore « *dispersion turbulente* ». Afin de modéliser ces effets, on peut utiliser une décomposition en valeur moyenne et fluctuations identique à celle introduite en section 5.2, à savoir

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{v}}', \quad \rho_s = R + r' \tag{5.101}$$

avec

$$\overline{\mathbf{V}} = \langle \overline{\mathbf{v}} \rangle , \quad R = \langle \rho_s \rangle .$$
 (5.102)

Si on introduit cette décomposition dans l'équation (5.100) on obtient, après prise de moyenne,

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \operatorname{div}(R\overline{\mathbf{V}}) + \operatorname{div}\langle r'\overline{\mathbf{v}}'\rangle = \operatorname{div}(D\ \overline{\mathbf{\nabla}}R) \qquad (5.103)$$

Le moment d'ordre 2  $\langle r' \overline{\mathbf{v}}' \rangle$  est souvent modélisé en introduisant une « diffusivité turbulente »  $D^t$  en posant

$$\langle r' \overline{\mathbf{v}}' \rangle = -D^t \overline{\mathbf{\nabla}} R$$
 (5.104)

Cette diffusivité a la même dimension que D. On obtient au final

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \operatorname{div}(R\overline{\mathbf{V}}) = \operatorname{div}[(D+D^t)\overline{\mathbf{\nabla}}R] \quad .$$
 (5.105)

Ainsi, dans ce modèle, l'effet de la turbulence est d'augmenter le coefficient de diffusion intrinsèque D de la diffusivité turbulente  $D^t$ .

Pour modéliser  $D^t$ , dans un écoulement fortement cisaillé on pourra utiliser un modèle de type « longueur de mélange », analogue au modèle (5.65),

$$D^{t} = \ell_{m}^{2} \left| \frac{\partial V_{1}}{\partial x_{2}} \right|$$
(5.106)

Dans un écoulement peu cisaillé, ou à cisaillement variable, de façon analogue à ce qui est utilisé dans le modèle  $k - \varepsilon$ , cf. (5.94), on écrira plutôt

$$D^t = C_{\rho_s} \frac{k^2}{\varepsilon} \qquad (5.107)$$

## 5.11 Discussion de conclusion et ouvertures

Les **modèles** '**RANS**', basés au départ sur la décomposition de Reynolds et l'équation (5.50), reposent, pour les plus simples et anciens, imaginés par Prandtl et von Karman<sup>28</sup> au début du XX<sup>ème</sup> siècle, sur une prescription « algébrique » (à l'instar de l'équation 5.118) de la longueur de mélange qui définit la viscosité turbulente (5.65). Ils aboutissent à des résultats intéressants dans des géométries simples, comme l'illustreront les problèmes 5.1 et 5.4 : comparez par exemple les « lois d'échelle » des équations (1.74) et (5.155)... On note cependant que ces modèles n'offrent des prédictions que pour l'écoulement moyen : la turbulence en elle-même n'est pas caractérisée.

Dans la seconde moitié du XX<sup>ème</sup> siècle, de nombreux chercheurs ont essayé d'aller au delà en proposant des modèles, toujours dans l'approche 'RANS', qui sont censés pouvoir s'appliquer dans des géométries complexes et donner de meilleurs résultats, tout en offrant une caractérisation de la turbulence, par exemple un calcul de l'énergie cinétique turbulente massique moyenne k. Nous avons insisté sur le modèle  $k - \varepsilon$ , mais ce n'est qu'un modèle parmi d'autres dans la famille 'RANS'. Il existe d'ailleurs quelques variantes du modèle  $k - \varepsilon$ , notamment, concernant la façon de prendre en compte l'existence de parois solides. On propose une stratégie simple (stratégie « haut Reynolds ») dans le problème 5.1, qui remet à l'honneur les idées de Prandtl et von Karman déjà évoquées, pour mettre en évidence des **« lois de paroi »** non seulement pour la vitesse moyenne, mais aussi pour les champs k et  $\varepsilon$ . En sus existent des modèles « concurrents » comme le modèle  $k - \omega$ , où  $\omega$  correspond grosso modo à  $\varepsilon/k$ , les modèles avec équations de transport pour les contraintes de Reynolds <sup>29</sup>, etc... cf. par exemple Chassaing (2000*b*); Wilcox (2006). Tous ces modèles 'RANS', malheureusement, ne fonctionnent pas très bien en général : il ne faut pas s'attendre à décrire des propriétés fines de la turbulence, comme le champ k, avec une grande précision. Lorsque des gros tourbillons ou structures *instationnaires* existent, la situation empire :

<sup>28.</sup> Physicien et ingénieur hongrois puis américain.

<sup>29. &#</sup>x27;Reynolds stress models' en anglais.

il est recommandé de n'utiliser les modèles 'RANS' que dans des situations « *stationnaires* » en termes de champs moyens (au sens de Reynolds).

Une approche concurrente, qui vise à résoudre ce type de problème, est celle de la *simulation numérique des grandes échelles* - *'Large eddy simulation'*, abréviation *'LES'* en anglais dans laquelle on veut justement calculer les plus grosses structures instationnaires. Après *filtrage spatial des petites échelles*, l'équation de la quantité de mouvement implique un *tenseur des contraintes turbulentes de sous-maille* analogue au tenseur de Reynolds. Une fois celui-ci modélisé, on obtient (dans les variantes les plus simples de cette approche) une équation analogue à celle de Reynolds-Boussinesq, sauf qu'elle doit être résolue en *instationnaire*...

Ces méthodes coûtent « cher », cependant, en terme de calcul numérique, d'où le développement de *méthodes hybrides* : selon les régions de l'espace et les types d'écoulements qui y ont lieu, on calcule soit en approche RANS soit en approche LES... cf. par exemple Mokhtarpoor et al. (2016).

Le prix à payer pour l'absence d'une théorie globale des écoulements turbulents est ainsi un vrai foisonnement des modèles de turbulence. Aucun modèle, malheureusement, n'est très satisfaisant. De ce fait - et d'autres aussi<sup>30</sup> -, les *chercheurs en mécanique des fluides*, qu'ils soient expérimentateurs, théoriciens ou numériciens, voire, un peu des trois, ont encore du pain sur la planche...

Certains *expérimentateurs* auront à cœur de faire des *expériences à très haut nombre de Reynolds*, pour tenter de mettre en évidence et caractériser des régimes « ultimes » avec des lois d'échelle <sup>31</sup> qui ne concernent pas seulement la vitesse moyenne ou des quantités très globales, et que l'on aimerait universelles... Ceci représente de nombreux défis sur le plan des installations et de la métrologie.

Les *théoriciens* voudront décrire la turbulence d'une manière toujours plus fine, et pour cela, par exemple, ils pourront faire appel à des *modèles stochastiques*, cf. Plaut et al. (2021)...

Les « numériciens », quant à eux, s'attacheront par exemple à mener des « simulations numériques directes »  $^{32}$  d'écoulements turbulents. Elles ont de l'intérêt puisqu'elles donnent accès de façon fine à tous les champs (en numérique, on n'a plus de problème de métrologie !) et peuvent servir de référence. Dans ces simulations on résoud numériquement l'équation de Navier-Stokes en essayant de capturer toutes les échelles, jusqu'aux plus petites échelles « dissipatives ». Ceci demande de faire du « calcul haute performance » <sup>33</sup>. La course est actuellement aux « hauts Reynolds » et « géométries réalistes », comme l'illustre la figure 5.4... Signalons pour terminer un partage d'information remarquable par certains « numériciens », qui mettent en ligne de nombreuses données et visualisations tirées de leurs simulations, cf. la table 5.1... que nous exploiterons, pour la ligne « KTH », dans les problèmes 5.1 et 5.2 !...

<sup>30.</sup> On se focalise pour conclure ce document sur quelques défis liés à la turbulence, mais il existe d'autres secteurs dynamiques en recherche en mécanique des fluides, par exemple, celui des écoulements multiphasiques, ou celui des fluides non newtoniens...

<sup>31.</sup> Bellot (2016) présente des exemples de lois d'échelle dans le contexte plus général des phénomènes de transport.

<sup>32. &#</sup>x27;Direct numerical simulations'; en français, on parle aussi parfois d'« expériences numériques ».

<sup>33. &#</sup>x27;*High Performance Computing*', sur cluster, avec « parallélisation » efficace des calculs pour les accélérer... et beaucoup de mémoire vive convenablement distribuée et partagée pour stocker tous les champs discrétisés...

Université	Auteurs principaux	Site web
Johns Hopkins U.	Meneveau	$\rm http://turbulence.pha.jhu.edu$
KTH	Örlü & Schlatter	https://www.flow.kth.se/flow-database
UPM	Jiménez	https://torroja.dmt.upm.es/turbdata
U. Texas	Lee & Moser	http://turbulence.ices.utexas.edu

Tab. 5.1 – Quelques *bases de données numériques issues de simulations d'écoulements turbulents* sur le web; suivez ces liens, sachant que ces bases proposent aussi des visualisations et des films !

## 5.12 Exercices et problèmes

### Exercice 5.1 Estimation d'ordres de grandeur en écoulement turbulent

On considère l'écoulement dans le sillage d'un objet, de dimension typique L = 1 m, se déplaçant à la vitesse V = 10 m/s dans de l'eau.

1 Justifiez le caractère a priori turbulent de cet écoulement.

2 On estime que la macro-échelle de la turbulence, dans une zone située dans le sillage de l'objet, est de l'ordre de 10% de la taille de l'objet. Évaluez la *taille des plus petits tourbillons turbulents*,  $\ell_K$ , dans cette zone.

3 Estimez la *dissipation massique* dans cette zone. Commentez.

4 On veut effectuer une *simulation numérique directe* de cet écoulement par discrétisation des équations de Navier-Stokes avec une méthode de type « différences finies ».

En admettant qu'il faut 7 points de grille sur un segment de longueur  $\ell_K$  pour pouvoir calculer correctement les plus petites structures, combien de points de grille seraient nécessaires sur un cube de volume  $L^3$  seulement? Quelle mémoire vive devrait être utilisée pour stocker les champs fluides aux points de grille?

Comparez cette mémoire vive à celle d'un grand cluster « public » dédié au calcul scientifique, le supercalculateur OCCIGEN du CINES (Centre Informatique National de l'Enseignement Supérieur), en visitant la page www.cines.fr/publications-recentes, et concluez.

#### Exercice 5.2 Calcul tensoriel de relations entre les dissipations turbulentes

1 Soit  $\overline{\mathbf{v}}$  un champ de vitesse à divergence nulle,  $\overline{\mathbf{D}}(\overline{\mathbf{v}})$  le tenseur des taux de déformations associé. Montrez que, en coordonnées cartésiennes,

$$2\frac{\partial(D_{ij}v_i)}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(v_iv_i)}{\partial x_j\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} .$$
(5.108)

2 Démontrez les relations (5.69) puis (5.70) entre les dissipations turbulentes  $\epsilon$  et  $\varepsilon$ .

#### Exercice 5.3 Dissipations en turbulence homogène et isotrope

On s'intéresse à l'évaluation des *dissipations turbulentes*  $\epsilon$  (5.66) et  $\varepsilon$  (5.68) en *turbulence homogène et isotrope*<sup>34</sup>. Rappelez pourquoi, dans ce cas,

$$\epsilon = \varepsilon = \nu \left\langle \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right\rangle . \tag{5.109}$$

<sup>34.</sup> Dans une optique expérimentale par exemple, afin de vérifier la formule utilisée par Pearson et al. (2002).



**Fig. 5.4** – Champs de vitesse axiale instantanée obtenus dans El Khoury et al. (2013) par *simulation numérique directe* d'*écoulements en tuyau* pour différentes valeurs du nombre de Reynolds *Re* construit sur la vitesse débitante et le diamètre, (a) Re = 5300, (b) 11700, (c) 19000, (d) 37700. Dans une section droite, les niveaux de gris indiquent la vitesse; noir : vitesse nulle - blanc : vitesse maximale. Observez la création d'échelles de plus en plus petites lorsque le nombre de Reynolds augmente.

Admettant d'autre part la relation de *théorie statistique de la turbulence* due à Karman et Howarth<sup>35</sup>,

$$\left\langle \left(\frac{\partial v_1'}{\partial x_2}\right)^2 \right\rangle = 2 \left\langle \left(\frac{\partial v_1'}{\partial x_1}\right)^2 \right\rangle , \qquad (5.110)$$

montrez que

$$\epsilon = \varepsilon = n\nu \left\langle \left(\frac{\partial v_1'}{\partial x_1}\right)^2 \right\rangle$$
 avec *n* nombre entier que vous calculerez. (5.111)

#### Problème 5.1 Modèle simplifié de turbulence en proche paroi - Lois de paroi

On considère un écoulement à grand nombre de Reynolds près d'une paroi localement plane, définie, dans un repère cartésien Oxyz, par y = 0. On s'intéresse à la « couche limite » au voisinage de cette paroi, et à l'influence de la turbulence sur celle-ci. Dans la zone de l'étude locale effectuée ici, on suppose que la vitesse moyenne est purement longitudinale, de la forme

$$\overline{\mathbf{V}} = U(y) \,\overline{\mathbf{e}}_x \, , \qquad (5.112)$$

et que toutes les quantités moyennes, y compris la pression motrice moyenne P, ne dépendent que de la coordonnée normale y. La structure de cette zone, en trois couches, sous couche visqueuse, zone tampon puis couche externe turbulente, est représentée sur la figure 5.5.

#### 1 Étude analytique de l'écoulement dans les trois couches

1.1 Dans l'ensemble de la zone étudiée, sans essayer de distinguer les trois couches, ce qui sera fait ultérieurement, explicitez les équations de Reynolds de façon intrinsèque, puis en composantes. Vous travaillerez avec le tenseur de Reynolds tel quel non modélisé.

Montrez que, dans la direction x, on a un équilibre entre les effets visqueux et les effets de turbulence.

Montrez aussi que, lorsque l'on s'éloigne de la paroi, la pression motrice moyenne a tendance à diminuer à cause des fluctuations turbulentes.

Montrez enfin que la composante zy du tenseur de Reynolds est contrainte, et esquissez une interprétation physique de cette contrainte.

<sup>35.</sup> Relation démontrée dans le chapitre 4 Analyse corrélatoire en deux points de Chassaing (2000b).

1.2 Intégrez une première fois par rapport à y l'équation de Reynolds portant sur U. Montrez que la constante d'intégration qui apparaît peut s'exprimer simplement en fonction de la *contrainte pariétale de frottement moyenne* 

$$\tau_p = \left\langle \overline{\mathbf{e}}_x \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \overline{\mathbf{e}}_y \right\rangle = \left\langle \tau_{xy} \right\rangle, \qquad (5.113)$$

où  $\overline{\overline{\tau}}$  est le tenseur des contraintes visqueuses dans le fluide, évalué au niveau de la paroi.

**1.3.1** Construisez par analyse dimensionnelle une vitesse  $u_{\tau}$ , dite « *vitesse de frottement* »<sup>36</sup>, et une longueur  $\ell_{\tau}$  à partir de  $\rho$ , masse volumique,  $\nu$ , viscosité cinématique du fluide, et  $\tau_p$ ,

$$u_{\tau} = , \ell_{\tau} = . \tag{5.114}$$

On indique que  $\ell_{\tau}$  est liée à  $\nu$  et  $u_{\tau}$  par une relation simple,

$$\ell_{\tau} = \qquad (5.115)$$

**1.3.2** Adimensionnez l'équation différentielle sur U(y) établie en question 1.2 en faisant le changement de variables

$$y^+ = \frac{y}{\ell_{\tau}} =$$
,  $U^+ = \frac{U(y)}{u_{\tau}} = U^+(y^+)$ . (5.116)

Vous donnerez une interprétation physique simple de  $y^+$ , et noterez

$$\tau_{xy}^+ = \frac{\tau_{xy}^t}{\tau_p}$$

la contrainte de Reynolds turbulente d'intérêt, adimensionnée.

1.4 Justifiez physiquement l'existence d'une « *sous couche visqueuse* » en très proche paroi dans laquelle la contrainte de Reynolds est négligeable, donc le profil de vitesse est linéaire,

$$U^+ = y^+ (5.117)$$

Expliquez bien l'équilibre qui a lieu dans cette couche, et donnez aussi la forme dimensionnelle de cette loi.

**1.5.1** Au contraire, quel est l'équilibre que l'on peut attendre en « *couche externe* »<sup>37</sup>, là où l'influence de la paroi existe encore, mais la turbulence joue un rôle dominant?

<sup>36. &#</sup>x27;Wall friction velocity' en anglais.

<sup>37.</sup> On dit aussi « sous couche inertielle », ou encore « région de recouvrement », puisque l'écoulement extérieur se fait sentir à la limite de cette région. En anglais on dit d'ailleurs 'overlap layer'.



Fig. 5.5 – En couleurs dans la version PDF. (a) : Schéma de principe de la couche limite turbulente étudiée dans le problème 5.1. Cette couche est stricto sensu la seule « couche externe » située à une distance finie de la paroi. Les fluctuations turbulentes y sont dominantes, comme symbolisé par les tourbillons associés, les flèches courbes à droite de la figure, de plus en plus vigoureux et de grande taille lorsque l'on s'éloigne de la paroi. En se rapprochant de la paroi, « sous » la couche externe se trouvent une « zone tampon » puis la « sous couche visqueuse », où, au contraire, les effets des fluctuations turbulentes sont négligeables. Au delà de la couche externe, dans une zone « supérieure » non représentée, l'écoulement moyen n'est pas forcément purement longitudinal, surtout si la géométrie globale du système est complexe (3D, etc...). (b) : The same in english.

**1.5.2** On adopte le *modèle de Boussinesq*. Justifiez qu'il est raisonnable d'estimer la *viscosité turbulente* avec le *modèle de longueur de mélange de Prandtl*. Suivant von Karman, on suppose que la longueur de mélange  $\ell_m$  ne dépend que de la distance à la paroi y. Montrez, par analyse dimensionnelle, que l'on a forcément

$$\ell_m = \chi y \tag{5.118}$$

avec  $\chi$  une constante adimensionnelle dite « constante de von Karman ».

**1.5.3** À partir de l'équation de Reynolds d'intérêt, montrez que, dans la couche externe, le profil de vitesse obéit à la « *loi de paroi* », dite aussi « *loi logarithmique* »,

$$U^{+} = \frac{1}{\chi} \ln y^{+} + C , \qquad (5.119)$$

où C est une « *constante additive* » inconnue pour l'instant. Donnez aussi, en le commentant, le profil de viscosité turbulente dans la couche externe

$$\nu^t = \qquad (5.120)$$

Pour préciser les valeurs de  $\chi$  et C, ainsi que les ordres de grandeur des valeurs de  $y^+$ qui délimitent les différentes couches, nous faisons maintenant appel à une base de données de simulations numériques. 2 Test du modèle, extraction des valeurs de  $\chi$  et C et détermination des positions des couches par étude, avec Matlab, d'une base de données de simulations numériques de KTH

La base de données utilisée

ftp://ftp.mech.kth.se/pub/pschlatt/DATA/TBL/SIM/RE8000, (5.121)

sous-partie de la base « KTH » de la table 5.1, correspond aux visualisations présentées sur

www.mech.kth.se/~pschlatt/DATA/README.html.

Les données ont été obtenues par simulation numérique des grandes échelles d'une couche limite turbulente au dessus d'une plaque plane sans gradient de pression, par déstabilisation de la couche laminaire... à savoir la couche limite de Blasius étudiée au chapitre 4. Pour éviter un conflit de notations, on note maintenant  $U_{\infty}$  la vitesse à l'« infini » au « dessus » de cette couche limite. L'écoulement moyen U dépend faiblement de x, mais cette dépendance ne sera pas rappelée par la suite pour ne pas alourdir les notations. Comme expliqué en section 5.11, une telle simulation requiert une modélisation des petites échelles ; la modélisation utilisée a été validée par comparaison à des simulations numériques directes et à des expériences, comme décrit dans Eitel-Amor et al. (2014)... article dont on recommande la lecture aux élèves les plus intéressés, et dont est extraite la figure 5.6. Nous pouvons donc faire confiance à cette base de données !..

**2.1.1** Connectez vous au site (5.121), et téléchargez le fichier  $vel_11000.prof$  correspondant aux données disponibles <sup>38</sup> dans la zone située à la valeur maximale de x, donc aux valeurs maximales des nombres de Reynolds. Enregistrez ce fichier dans un dossier, en prenant garde au fait, pour ceux qui utilisent Windows, que celui-ci conserve bien son extension .prof.

Notez au passage que plusieurs épaisseurs de couche limite peuvent être définies :

• l'« épaisseur physique de couche limite »  $\delta_{99}$ , définie comme dans le problème 4.1, mais en terme de condition sur l'écoulement moyen

$$U(y = \delta_{99}) = 0.99 \ U_{\infty} ; \qquad (5.122)$$

- l'« épaisseur de déplacement »  $\delta^*$ ;
- l'« épaisseur de quantité de mouvement »  $\theta$  ...

cf. par exemple Guyon et al. (2001). Comme, d'autre part, deux vitesses caractéristiques existent,  $U_{\infty}$  et  $u_{\tau}$ , on peut construire a priori six nombres de Reynolds différents; observez qu'en tête du fichier vel\_11000.prof trois nombres de Reynolds différents sont donnés.

Ce qui nous intéresse ici, dans un premier temps, sont les 3 premières colonnes de vel\_11000.prof, qui donnent les valeurs de y avec 2 normalisations différentes, puis celles de  $U^+$ , obtenue par calcul de  $U = \langle v_x \rangle$  par moyenne sur z et t, puis normalisation par  $u_{\tau}$  - cf. Eitel-Amor et al. (2014) : 'The simulation was run for sufficiently long time to ascertain statistical convergence of statistics'.

<sup>38.</sup> Alternativement, le fichier vel\_11000.prof est disponible sur la page web du module http://emmanuelplaut. perso.univ-lorraine.fr/mf.



**Fig. 5.6** – **En couleurs dans la version PDF.** Dans le plan xOy, champ de vitesse longitudinale instantané à un moment de la simulation de Eitel-Amor et al. (2014) d'une *couche limite turbulente se développant spatialement*. Toute la zone d'intérêt du domaine de calcul est montrée, avec une dilatation de l'axe des y d'un facteur 4.

Afin d'analyser ces données, téléchargez sur la page web du module, ou sur le pad de votre groupe de TD, accessible via la page ARCHE du module, le programme couchelimturb.m dont le listing suit :

```
data= load("vel_11000.prof");
% Extraction de la 1ere colonne : valeurs tabulées de y/delta99
ysd= data(:,1);
% Extraction de la 3eme colonne : valeurs tabulées de U+
Up= data(:,3);
plot( ysd, Up, "k","LineWidth",2); xlabel("y/delta99"); ylabel("U+");
```

Exécutez ce programme, i.e. réalisez la figure 5.7. Commentez physiquement cette courbe.

**2.1.2** Interprétez la valeur obtenue à l'« infini » pour  $U^+$ , soit  $U^+_{\infty}$ , en fonction du **coefficient** de frottement pariétal local  $C_f$  déjà introduit dans le problème 4.1,

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2} = \qquad \iff U_{\infty}^+ = \qquad (5.123)$$

Vérifiez cette interprétation en comparant la valeur que vous pouvez ainsi calculer pour  $C_f$  avec celle indiquée ligne 9 du fichier vel\_11000.prof.

**2.1.3** Vérifiez, en considérant les colonnes  $y/\delta_{99}$  et  $U^+$  de 2 lignes particulières dans le fichier vel\_11000.prof, pour  $y \simeq \delta_{99}$  et y maximum, que la définition (5.122) a bien été utilisée pour calculer  $\delta_{99}$ .

**2.1.4** Vérifiez enfin, en considérant le quotient des colonnes  $y^+$  et  $y/\delta_{99}$  du fichier vel\_11000.prof, que la valeur  $\delta_{99}^+$  correspond au *nombre de Reynolds construit sur la vitesse de frottement* et l'épaisseur physique de couche limite, aussi indiqué ligne 7 du fichier,

$$Re_{\tau} = \frac{u_{\tau}\delta_{99}}{\nu} = \delta_{99}^{+} = 2480 \qquad (5.124)$$

Fig. 5.7 – À faire soi-même! Tracé du profil d'écoulement moyen  $U^+(y/\delta_{99})$  dans la couche limite au niveau de l'extrémité droite du domaine de calcul de Eitel-Amor et al. (2014) - cf. la figure 5.6.

Fig. 5.8 – À faire soi-même! Pour la couche limite déjà représentée en figure 5.7, profil d'écoulement moyen  $U^+(y^+)$  au voisinage de l'origine, avec la loi en sous couche visqueuse superposée.

2.2 Modifiez votre programme pour extraire non plus les valeurs de  $y/\delta_{99}$  et  $U^+$ , mais celles de  $y^+$  et  $U^+$ . Tracez alors la courbe  $U^+(y^+)$ , au voisinage de l'origine, et superposez lui la courbe modèle  $U_v^+(y^+) = y^+$  en sous couche visqueuse, i.e. réalisez la figure 5.8. Confirmez ainsi l'existence de la **sous couche visqueuse**. On définit un critère de positionnement dans la sous couche visqueuse en disant que cela est tant que

$$|U_v^+(y^+) - U^+(y^+)| = U_v^+(y^+) - U^+(y^+) \le 0.1.$$
(5.125)

En évaluant les valeurs tabulées de cette différence, calculer la valeur  $y_0^+$  de sortie de la sous couche visqueuse, avec ce critère, et avec un seul chiffre significatif :

$$y_0^+ \simeq \qquad (5.126)$$

Indications :

Pour superposer deux graphes, utilisez la commande hold on.

Représenter la différence  $U_v^+(y^+) - U^+(y^+)$  et la fonction constante égale à 0,1 sera indispensable

**2.3** En remarquant que la dérivée  $dU^+/dy^+$  est donnée dans l'avant-dernière colonne du fichier vel\_11000.prof, construisez un programme qui calcule les valeurs tabulées de la fonction indicatrice de la loi logarithmique (5.119),

$$\alpha(y^{+}) = y^{+} \frac{dU^{+}}{dy^{+}} . \qquad (5.127)$$

Tracez cette fonction pour  $y^+ < \delta_{99}^+$ . Observez en zoomant <sup>39</sup> que la fonction est « constante » au voisinage d'un minimum local  $\alpha_{\min}$  situé en dehors de la sous couche visqueuse, que vous extrairez par exemple avec les commandes find, pour définir des vecteurs de taille réduite, puis min. Déduisez en une estimation de la *constante de von Karman* avec un seul chiffre significatif

$$\chi \simeq \qquad (5.128)$$

Pour définir avec la fonction indicatrice  $\alpha(y^+)$  un premier critère de positionnement dans la **couche** externe, sélectionnez, par exemple avec la commande find, les valeurs de  $y^+$  pour lesquelles

$$|\alpha(y^{+}) - \chi^{-1}| \leq 0.1 \ \chi^{-1} \ . \tag{5.129}$$

Reportez la définition de cet intervalle dans cette inéquation,

$$\lesssim y^+ \lesssim$$
 , (5.130)

en arrondissant les valeurs limites à des entiers.

**2.4** Construisez un programme qui calcule les valeurs tabulées de la deuxième fonction indicatrice de la loi logarithmique (5.119),

$$\gamma(y^{+}) = U^{+}(y^{+}) - \chi^{-1} \ln y^{+} . \qquad (5.131)$$

Montrez, en la traçant dans le même intervalle que  $\alpha(y^+)$ , que cette fonction est aussi relativement « constante ». Déduisez en une estimation de la **constante additive** dans la loi log avec un seul chiffre significatif

$$\boxed{C} \simeq \qquad (5.132)$$

Pour définir avec la fonction indicatrice  $\gamma(y^+)$  un deuxième critère de positionnement dans la couche externe, sélectionnez, par exemple avec la commande find, les valeurs de  $y^+$  pour lesquelles

$$|\gamma(y^+) - C| \le 0.1C . \tag{5.133}$$

Reportez la définition de cet intervalle dans cette inéquation,

$$\lesssim y^+ \lesssim$$
, (5.134)

en arrondissant les valeurs limites à des entiers. Observez que l'intervalle du premier critère (5.130) est contenu dans le second (5.134), donc que l'on peut afficher la condition (5.130) comme donnant approximativement le positionnement de la couche externe.

<sup>39.</sup> Par exemple avec la commande axis.
Fig. 5.9 – À faire soi-même! Pour la couche limite calculée numériquement, déjà représentée sur les figures 5.7 et 5.8, profil d'écoulement moyen  $U^+(y^+)$  avec les lois théoriques en sous couche visqueuse et couche externe superposées, dans des intervalles où elles présentent une certaine pertinence.

**2.5** Tracez finalement sur la même courbe, en fonction de  $y^+ \in [0, \delta_{99}^+]$ , les données  $U^+(y^+)$  de vel\_11000.prof, et, dans des intervalles bien choisis, les lois théoriques de la sous couche visqueuse  $U_v^+(y^+) = y^+$  et de la couche externe  $U_e^+(y^+) = \chi^{-1} \ln y^+ + C$ . Placez ce graphe dans la figure 5.9 et concluez.

#### 3 Étude analytique avec le modèle $k - \varepsilon$ de la couche externe

**3.1** Dans la *couche externe*, on suppose que le *modèle*  $k - \varepsilon$  est aussi pertinent que le modèle de Prandtl. On suppose que les termes de diffusion microscopique et turbulente dans l'équation de k sont négligeables devant les termes de production et dissipation. Déduisez-en les expressions de k et  $\varepsilon$ , i.e., établissez des « *lois de paroi* »

Commentez la physique qu'elles expriment.

**3.2** Montrez que, d'après le modèle  $k - \varepsilon$ , dans la couche externe

$$-\frac{\langle v'_x v'_y \rangle}{k} = constante =$$
(5.136)

qui dépend simplement de l'une des constantes du modèle  $k - \varepsilon$  .

**3.3** Montrez que l'équation d'évolution de la dissipation turbulente dans la couche externe est satisfaite à condition de respecter une relation entre la constante de von Karman  $\chi$  et les constantes  $\sigma_{\varepsilon}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_{\nu}$  du modèle  $k - \varepsilon$ :



Vous garderez ici le terme de diffusion turbulente. Vérifiez que la relation (5.137) est approximativement satisfaite par les constantes données dans le cours.

## Problème 5.2 *Réanalyse de la simulation de couche limite turbulente de KTH pour caractérisation fine des zones « locale », « visqueuse » et « logarithmique »*

On revient, avec une approche différente, sur la *simulation numérique de la base de KTH* décrite dans l'énoncé de la partie 2 du problème 5.1, dont on reprend les notations. On s'intéresse au cas à nombre de Reynolds élevé du fichier vel\_11000.prof.

#### 1 Caractérisation des zones « locale », « visqueuse » et « logarithmique » par étude des contraintes 1.1 Théorie en proche paroi ou « modèle local »

On rappelle l'équation de Reynolds dans la direction x, intégrée par rapport à y, avec les hypothèses de l'étude locale ou « modèle local » en proche paroi posées au début du problème 5.1 :

$$\tau_{xy} + \tau_{xy}^t = \tau_p \tag{RANS}x$$

où

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \eta \frac{dU}{dy} \text{ la contrainte visqueuse,} \\ \tau_{xy}^t &= -\rho \left\langle v'_x v'_y \right\rangle \text{ la contrainte turbulente,} \\ \tau_p &= \eta \frac{dU}{dy} \Big|_{y=0} \text{ la contrainte pariétale.} \end{aligned}$$

On rappelle aussi la forme adimensionnelle de (RANSx) en unités +, établie dans le problème :

$$\frac{dU^+}{dy^+} + \tau^+_{xy} = \tau^+ \tag{RANS}x^+)$$

avec  $\tau^+$  la « *contrainte totale* », dont la valeur serait  $\tau_0^+$  entière connue selon le *modèle local*<sup>40</sup>. Précisez justement la valeur de  $\tau_0^+$ .

#### 1.2 Étude Matlab de la simulation de KTH

1.2.1 Avec les notations de KTH, la contrainte turbulente adimensionnelle

$$\tau_{xy}^+ = -\langle uv \rangle^+$$

puisque les composantes de la vitesse fluctuante sont notées (u,v,w) au lieu de  $(v'_x,v'_y,v'_z)$ . En considérant la ligne 12 du fichier vel\_11000.prof, donnez les numéros des colonnes qui contiennent, à partir de la ligne 13, les valeurs tabulées de

- la coordonnée  $y^+$ ; la contrainte visqueuse adimensionnelle  $dU^+/dy^+$ ;
- l'opposé de la contrainte turbulente adimensionnelle  $\tau_{xy}^+$ .

**1.2.2** Créez un premier script produisant une **figure 1** représentant en abscisse  $y^+ \in [0,2500]$ , en ordonnée en bleu la contrainte visqueuse adimensionnelle, en rouge la contrainte turbulente adimensionnelle, en noir la somme  $\tau^+$  de ces deux contraintes. Utilisez

- la commande hold on pour superposer les 3 courbes demandées,
- la commande axis pour zoomer sur la zone d'intérêt,
- la commande pbaspect([2.5 1 1]) pour modifier le rapport d'aspect et mieux visualiser les courbes, l'intervalle des valeurs d'abscisse étant grand.

<sup>40.</sup> Dans les *simulations* qui sont *globales*, puisqu'elles prennent en compte un développement spatial, en fonction de x, de la couche limite, la valeur de  $\tau^+$  n'est pas constante!

**1.2.3** Décrivez et expliquez physiquement le comportement des contraintes  $dU^+/dy^+$ ,  $\tau_{xy}^+$  et  $\tau^+$  lorsque  $y^+$  augmente à partir de 0 puis devient très grand.

1.2.4 On pose comme critère de validité du modèle local que la contrainte totale  $\tau^+$  vérifie

$$0.9 \tau_0^+ < \tau^+ < 1.1 \tau_0^+ . \tag{5.138}$$

Quelle inégalité est contraignante?

Augmentez votre premier script d'une section dans laquelle vous calculez  $y_g^+$ , la première valeur de  $y^+$  dans la liste de la base, pour laquelle l'inégalité contraignante n'est plus vérifiée. Donnez sur votre copie la valeur  $y_g^+$  arrondie à l'entier le plus proche.

*Indication* : cette section pourrait ressembler à ce qui suit, les noms de variable sont peut-être à adapter, tandis que les ... demandent à être corrigés :

```
I= find(taup...)
indg= I(1)
ypg= yp(indg)
ypg= round(ypg)
```

**1.2.5** Augmentez enfin votre premier script d'une section dans laquelle vous produisez une **figure 2** avec les mêmes courbes que **figure 1** mais dans la zone « locale »  $y^+ \in [0, y_g^+]$ , et en rajoutant une ligne horizontale pointillée au niveau  $\tau^+ = \tau_{\lim}^+$  qui a déterminé  $y_g^+$ ; utilisez pour cela la commande yline.

Pour revenir à un rapport d'aspect carré, commencez votre section par delete(gca), ce qui efface toutes les options graphiques.

1.2.6 Commentez physiquement la figure 2, en évoquant notamment certaines des approximations qui ont conduit au modèle de la *sous couche visqueuse* puis à celui de la *sous couche logarithmique*, rendues « visualisables ». En particulier, où pourrait-on d'après cette figure estimer précisément (donnez une valeur de  $y^+$ ) que l'on est au cœur de la sous couche ou zone logarithmique?

§

#### 2 Caractérisation fine de la zone « logarithmique » par étude de la viscosité turbulente

#### 2.1 Théorie

**2.1.1** Rappelez l'expression de la *viscosité cinématique turbulente*  $\nu^t$  dans la *zone logarithmique*, posée dans le problème 5.1. Elle dépend non seulement de la constante de Von Karman  $\chi$ , mais aussi d'une vitesse caractéristique que vous définirez précisément en la reliant à l'une des contraintes introduites dans la question 1.1 du présent problème.

Déduisez en l'expression de la viscosité turbulente adimensionnée

$$\nu^+ = \frac{\nu^t}{\nu} = \frac{\eta^t}{\eta}$$

dans la zone logarithmique.

**2.1.2** En revenant d'autre part aux définitions du modèle de Boussinesq, explicitées ici dans le cas où le champ de vitesse moyen a pour seule composante non nulle  $V_x = U(y)$ , en dimensionnel puis adimensionnel, montrez que l'on peut « extraire » la viscosité turbulente  $\nu^+$  de données de la base de KTH déjà étudiées dans la partie 1.

*Indications* : focalisez vous sur les composantes non diagonales du tenseur des contraintes turbulentes ; pour l'adimensionnement, utilisez les vitesse et longueur caractéristiques introduites dans le problème : la même vitesse qu'en question 2.1.1, plus une longueur que vous définirez précisément.

#### 2.2 Étude Matlab de la simulation de KTH

**2.2.1** Créez un second script produisant une **figure 3** représentant en abscisse  $y^+ \in [0,2500]$ , en ordonnée en noir la viscosité turbulente adimensionnelle.

2.2.2 Commentez physiquement la figure 3.

**2.2.3** Augmentez votre second script d'une section dans laquelle vous produisez une **figure 4** représentant en abscisse  $y^+ \in [0, y_g^+]$ , en ordonnée en noir la viscosité turbulente adimensionnelle  $\nu^+$  divisée par  $y^+$ .

#### Indication:

pour calculer le quotient terme à terme de  $\nu^+$  par  $y^+$ , utilisez l'opérateur **Matlab** « ./ ».

**2.2.4** À partir de la position du maximum local de la courbe de la **figure 4**, qui correspond donc à un plateau, estimez

- une valeur entière de  $y^+$ , soit  $y^+_{\log}$ , qui serait au centre de la zone logarithmique;
- une valeur de la constante de Von Karman  $\chi$ , avec un seul chiffre significatif.

Commentez succinctement.



**Fig. 5.10** – Visualisation de lignes d'émission par fumée dans des expériences de *turbulence derrière une grille* placée dans une soufflerie, par H. M. Nagib de l'Illinois Institute of Technology (cf. sa page web indexée sur Google).

#### Exercice 5.4 Modèle $k - \varepsilon$ de turbulence de grille et mesure du coefficient $C_2$

On considère une turbulence de grille, comme représenté sur la figure 5.10. Dans le plan x = 0 est disposée une grille étendue dans les directions y et z. L'écoulement moyen est dans la zone d'intérêt, derrière la grille, uniforme,

$$\overline{\mathbf{V}} = U\overline{\mathbf{e}}_x$$

La turbulence se met en place sur une courte distance, après la grille, puis, à partir d'une certaine distance  $\delta$ , elle décroît de façon algébrique, avec une énergie cinétique turbulente

$$k = k_0 (x/\delta)^{-n}$$
 avec  $n = 1.09$ . (5.139)

L'expérience montre aussi que la turbulence est stationnaire, et que son intensité maximale, au sens de la définition (5.7), est de l'ordre de 5%. On modélise la turbulence, dans la région où (5.139) est valable, à l'aide du modèle  $k - \varepsilon$ , en supposant que les termes de diffusion visqueuse et turbulente sont négligeables.

1 Explicitez les équations d'évolution de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation. Montrez que la loi (5.139) est compatible avec le modèle  $k - \varepsilon$ , et que cela permet une « mesure » du coefficient  $C_2$  du modèle.

2 Justifiez a posteriori que les termes de diffusion sont négligeables dans les équations de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation.

#### Problème 5.3 Écoulements laminaires et turbulents en canal

On étudie des *écoulements établis* d'un *fluide newtonien incompressible* de masse volumique  $\rho$ , viscosité dynamique (resp. cinématique)  $\eta$  (resp.  $\nu$ ). Ces écoulements ont lieu dans un *canal plan* contenant une zone d'intérêt de demi-épaisseur h, longueur  $L_x \gg h$ , largeur  $L_z \gg h$ , comme représenté ci-dessous :



Dans le repère cartésien  $Ox_1x_2x_3 = OXYZ$ , l'entrée (resp. sortie) du fluide se fait « loin » en amont (resp. aval) de X = 0 (resp.  $L_x$ ), tandis que des parois fixes sont situées sur les frontières  $Y = \pm h, Z = \pm L_z/2$ . Dans le domaine

$$\Omega = \{ (X,Y,Z) \in ]0, L_x[\times] - h, h[\times] - L'_z/2, L'_z/2[ \}, \qquad (5.140)$$

avec  $L'_z \simeq 0.8 L_z$ , l'écoulement est établi : le champ de vitesse laminaire complet ou turbulent moyen est de la forme

$$\overline{\mathbf{V}} = U(Y) \,\overline{\mathbf{e}}_X \,, \tag{5.141}$$

avec, par symétrie, U fonction paire de Y. Dans tout le problème on étudie les écoulements dans ce domaine  $\Omega$ .

On montrera par la suite, et on l'admet pour traiter la question 1, que la *pression motrice* dans le cas d'écoulements laminaires, *pression motrice moyenne* dans le cas d'écoulements turbulents, est de la forme

$$\hat{p} = \hat{p}(X,Y) = -GX + \pi(Y)$$
 (5.142)

avec G une constante qui ne dépend que de l'écoulement mais pas de la position,  $\pi$  une fonction à préciser.

1 On rappelle que l'équation (1.65) du cours donnant les **pertes de charge**  $\delta H$  entre l'entrée et la sortie de  $\Omega$  est valable en moyenne dans le cas turbulent, et donne bien la puissance dissipée dans l'écoulement, en moyenne dans le cas turbulent. On rappelle aussi que  $\rho g \ \delta H = \delta \hat{p}$  évalué aux parois soit  $\hat{p}(0,h) - \hat{p}(L_x,h)$  ou  $\hat{p}(0,-h) - \hat{p}(L_x,-h)$ , avec g l'accélération de la pesanteur.

1.1 Expliquez pourquoi la connaissance de  $\delta H$  importe, en imaginant par exemple, en terme d'application, que ce système est un modèle isotherme et très simplifié d'un élément d'un échangeur à plaques.

**1.2** On définit le *coefficient de perte de charge*  $\lambda$  par analogie avec le cas du tuyau, suivant la formule

$$\delta H = \frac{V^2}{2g} \frac{L_x}{h} \lambda \tag{5.143}$$

avec V la *vitesse débitante* à travers la section d'entrée de  $\Omega$ , soit l'intersection de  $\partial\Omega$  avec le plan X = 0. Établissez les expressions de G fonction de  $\lambda$ , h,  $\rho$  et V;  $\lambda$  fonction de G, h,  $\rho$  et V.

**2.1** Dans le cas d'un *écoulement laminaire établi*, explicitez les composantes de l'équation de Navier-Stokes, en travaillant en pression motrice, supposée maintenant de forme générale,  $\hat{p} = \hat{p}(X,Y,Z)$ . Démontrez que  $\hat{p}$  est bien de la forme (5.142) avec  $\pi$  une constante.

**2.2** Calculez U(Y), en faisant le lien entre la vitesse au centre  $U_0 = U(0) > 0$  et la constante G. Montrez que  $U_0$  est une fonction de G, h et  $\eta$ , et interprétez physiquement l'influence de chacun des paramètres. Représentez enfin le champ de vitesse dans le plan XOY.

**2.3** Calculez la *vitesse débitante* V à travers la section d'entrée de  $\Omega$ ,

$$S = \{ (Y,Z) \in ] - h, h[\times] - L'_z/2, L'_z/2[ \} .$$
(5.144)

Commentez l'expression de V fonction de  $U_0$ .

2.4 Calculez le coefficient de perte de charge  $\lambda$  en fonction du nombre de Reynolds

$$Re = Vh/\nu \qquad (5.145)$$

Commentez.

On étudie maintenant des écoulements turbulents établis avec l'approche de Reynolds-Boussinesq. On note maintenant  $\hat{p}$  la pression motrice moyenne, supposée au départ de la forme  $\hat{p} = \hat{p}(X,Y,Z)$ . On suppose par symétrie que l'énergie cinétique turbulente moyenne et la viscosité dynamique turbulente sont des fonctions paires de Y seulement,

$$k = k(Y), \quad \eta^t = \eta^t(Y).$$
 (5.146)

**3.1** Explicitez les composantes de l'équation de Reynolds-Boussinesq en introduisant une *pression motrice modifiée* P, somme de  $\hat{p}$  et d'un terme proportionnel à k, de façon à faire disparaître k.

**3.2** Montrez que  $\hat{p}$  est de la forme donnée dans l'équation (5.142) avec  $\pi$  une fonction bien définie. Interprétez physiquement la forme complète de l'expression de  $\hat{p}$ .

**3.3** Établissez une équation liant  $\eta$ ,  $\eta^t$ , U'(Y), Y et G à une constante d'intégration  $T_0$ . En utilisant une propriété de symétrie, montrez que cette constante d'intégration est nulle.

**3.4** Que vaut  $\eta^t$  sur les parois situées en  $Y = \pm h$ ? Notant  $\overline{\overline{\tau}}(\overline{\mathbf{V}})$  le tenseur des contraintes visqueuses moyen, établissez par un calcul l'expression de la **contrainte pariétale de frottement moyenne**  $\tau_p > 0$  exercée par le fluide sur la paroi « inférieure » Y = -h ou « supérieure » Y = h. Montrez que  $\tau_p$  est la même en ces deux parois, proportionnelle au produit Gh. Cette relation serait-elle aussi valable en écoulement laminaire ? Proposez-en, au moins dans un cas particulier, une interprétation physique.

**3.5** Déduisez de cela une expression de la *vitesse de frottement*  $u_{\tau} = \sqrt{\tau_p/\rho}$  faisant intervenir *G*. En utilisant l'expression générale de *G* en fonction de  $\lambda$ , *h*,  $\rho$  et *V* établie en question 1.2, établissez l'expression de  $u_{\tau}$  en fonction de  $\lambda$  et *V*. Commentez cette relation.

**4.1** Justifiez que dans la *couche externe* proche de la paroi « inférieure » Y = -h, où l'influence de la paroi existe encore, mais la turbulence joue un rôle dominant, on a

$$\eta^t U'(Y) = \tau_p . (5.147)$$

**4.2** On utilise comme variable d'espace la distance à la paroi y = h + Y, i.e.

on fait le changement de variable  $W(y) = U(y-h) \iff U(Y) = W(h+Y)$ .

D'autre part on utilise le modèle de longueur de mélange de Prandtl pour estimer la viscosité turbulente, avec  $\ell_m = \chi y$  où  $\chi$  est la constante de Von Karman. Calculez W(y) en faisant apparaître la vitesse réduite  $W^+ = W/u_{\tau}$  et la distance à la paroi réduite  $y^+ = yu_{\tau}/\nu$ . Montrez que l'on obtient une **loi de paroi** identique à celle trouvée en couche limite; vous l'écrirez sous la même forme en faisant apparaître la même constante additive C.

5.1 Suivant Prandtl, on suppose que la *loi turbulente* trouvée précédemment pour  $W^+$  est valable à haut nombre de Reynolds dans la quasi-totalité de la moitié « inférieure » du canal, définie par  $y \in$ [0,h], en dehors d'une très fine couche visqueuse, puisqu'alors la couche externe s'« étend ». Donnez l'expression approximative correspondante de la *vitesse réduite*  $U^+ = U/u_{\tau}$  en fonction de ypuis  $\tilde{y} = y/h$ . Vous ferez apparaître le nombre de Reynolds construit sur la vitesse de frottement et la demi-hauteur

$$Re_{\tau} = h^+ = hu_{\tau}/\nu$$
 (5.148)

**5.2** Calculez d'après ce modèle, étendu par symétrie miroir sous  $Y \mapsto -Y$ , la vitesse débitante V de l'écoulement à travers la surface S (5.144), réduite en unités de  $u_{\tau}$ , soit  $V^+ = V/u_{\tau}$ .

 $Indications: \text{par symétrie, travaillez sur } S' = \{(y,Z) \in \left]0,h\right[\times\right] - L'_z/2, L'_z/2[\}; \text{ faites apparaître } L'_z/2, L'_z/2[\}; \text{ faites apparaître } L'_z/2, L'_z/2[]\};$ 

$$\int_0^1 \ln \widetilde{y} \ d\widetilde{y} = -1 ;$$

établissez une expression de la forme  $V^+ = V^+(h^+, \chi, C)$ .

**6.1** Déduisez d'autre part des résultats de la question 3.5 l'expression de  $V^+$  en fonction de  $\lambda$ , puis celle de  $Re_{\tau} = h^+$  en fonction de  $\lambda$  et du nombre de Reynolds  $Re = Vh/\nu$ ,

$$V^+ = ext{et} ext{Re}_{\tau} = h^+ = ext{.} ag{5.149}$$

Établissez enfin une relation de type Karman - Prandtl

$$1/\sqrt{\lambda} = \alpha \ln\left(Re\sqrt{\lambda}\right) + \beta \quad , \qquad (5.150)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres fonctions des paramètres de la loi de paroi  $\chi$  et C.

**6.2** En utilisant les valeurs mesurées dans l'*étude numérique* de Eitel-Amor et al. (2014) en TD,  $\chi = 0.4$  et C = 5, donnez les valeurs numériques prévues pour  $\alpha$  et  $\beta$ .

7 À partir de la loi trouvée question 5.1, calculez analytiquement la vitesse normalisée  $\widetilde{U} = U(y)/U_0$  en terme de  $\widetilde{y} = y/h$ , dans la moitié « inférieure »  $y \in [0,h]$  du canal; on note toujours ici  $U_0$  la valeur maximale de la vitesse, atteinte au centre du canal, en y = h.

Indication :  $\widetilde{U}(\widetilde{y})$  fait aussi intervenir les paramètres  $\chi$  et C, ainsi que le nombre de Reynolds  $h^+$ .

8.1 Décrivez succinctement une *méthode de mesure expérimentale* précise de  $\lambda$ .

Schultz & Flack (2013) donnent justement, pour un écoulement à  $Re = 1,43 \ 10^5$ , la valeur mesurée expérimentalement  $\lambda = 0,00339$ . Comparez cette valeur à celle que l'on aurait en écoulement laminaire et commentez.

Calculez, par exemple avec **Matlab**, pour cet écoulement, le coefficient de perte de charge  $\lambda$  prédit par la relation de Karman - Prandtl (5.150), comparez et commentez.

8.2 Prédisez en conséquence la valeur du nombre de Reynolds  $Re_{\tau}$ .

**9** Dans le plan  $(\widetilde{U}, \widetilde{y})$ , pour  $\widetilde{y} \in [0, 2]$  correspondant à toute la largeur du canal, représentez sur un même graphe

- le profil de vitesse normalisé  $\widetilde{U}(\widetilde{y})$  de l'écoulement laminaire;
- le profil de vitesse normalisé  $\tilde{U}(\tilde{y})$  de l'écoulement turbulent étudié en question 8, prédit par la théorie de Karman Prandtl.

Commentez ce graphe.

#### Esquisse du programme Matlab de solution des questions 8 et 9

```
%% Constantes de la loi de paroi
chi= 0.4; C= 5;
%% Coefficients de la loi de KP
alpha= ...
beta= ...
%% Q 8.1
Re= 1.43*10^5; lambdaex= 0.00339;
% Pour afficher plus de digits
format long
%% Coeff. de frottement laminaire
lambdalam= ...
. . .
%% Coeff. de frottement turbulent
lambdath= fzero(@(x) loiKP(x, Re, alpha, beta), [...])
. . .
%% Q 8.2
Retau= ...
```

Tournez la page s'il-vous-plaît...

```
%% Q 9
% Valeur de depart de ytilde proche de O
ymin= ...
% Valeurs tabulees de ytilde dans la moitie inferieure
y= linspace(ymin,1,100);
% Ecoulement laminaire dans la moitie inferieure
Ulam= ...
hold on;
plot(Ulam,y, "k","LineWidth",2)
% Valeurs de ytilde dans la moitie superieure
ysup= y+1;
% Ecoulement laminaire dans la moitie superieure par parite
Ulamsup= flip(...);
plot(Ulamsup,ysup, "k","LineWidth",2)
. . .
%% Loi de Karman - Prandtl
function res= loiKP( lambda, Re, alpha, beta)
res= 1/sqrt(lambda) - alpha * log(Re * sqrt(lambda)) - beta;
```

#### Problème 5.4 Modèle de Karman - Prandtl d'écoulements turbulents en tuyau

On veut modéliser des écoulements turbulents établis, dans un tuyau cylindrique à section circulaire de rayon a et longueur  $L \gg a$ , d'un fluide newtonien incompressible de masse volumique  $\rho$ , viscosité dynamique (resp. cinématique)  $\eta$  ( $\nu$ ). Ce tuyau est à **parois lisses**. En négligeant les effets d'entrée-sortie, en coordonnées cylindriques ( $r, \theta, z$ ) d'axe Oz l'axe de révolution du tuyau, dans tout le domaine fluide le **champ de vitesse moyen** 

$$\overline{\mathbf{V}} = U(r) \ \overline{\mathbf{e}}_z \ . \tag{5.151}$$

On adopte l'approche de Reynolds - Boussinesq et on admet que l'énergie cinétique turbulente massique moyenne, la pression motrice moyenne et la viscosité dynamique turbulente sont de la forme

$$k = k(r), \quad P = P(r,z), \quad \eta^t = \eta^t(r).$$
 (5.152)

1 Donnez les expressions intrinsèques des tenseurs  $\overline{\overline{\nabla}V}$  et  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}(\overline{\mathbf{V}})$ , partie symétrique du précédent <sup>41</sup>.

**2.a** Écrivez de façon intrinsèque l'équation de Reynolds sous l'hypothèse de Boussinesq. Montrez que le terme de diffusion moléculaire et turbulente, en  $\overline{\operatorname{div}} \overline{\overline{T}}$  pour  $\overline{\overline{T}}$  bien choisi, peut s'écrire sous la forme d'un seul terme proportionnel à  $\overline{\mathbf{e}}_z$ .

<sup>41.</sup> Vous notere<br/>z $U^\prime(r)$  la dérivée dU(r)/dr, l'usage du<br/>  $^\prime$  pour ce champ étant sans ambiguïté.

**2.b** À l'aide des composantes radiale et azimutale de cette équation, montrez que P est la somme d'une fonction de r, ne dépendant que de k(r), et d'une fonction  $\Pi(z)$ . Interprétez physiquement la contribution proportionnelle à k(r).

**2.c** À l'aide de la composante axiale de l'équation de Reynolds, montrez que  $\Pi(z)$  est de la forme  $p_0 - Gz$  avec G constant. Donnez l'expression complète de P. Quelle est la signification physique précise de G, supposé strictement positif? Comment pourrait-on mesurer G?

**2.d** Toujours à partir de la composante axiale de l'équation de Reynolds, établissez une équation différentielle ordinaire liant  $\eta$ ,  $\eta^t$ , U(r), r et G.

2.e Que vaut, à la paroi du tuyau, en r = a,  $\eta^t$ ? Déduisez-en la contrainte pariétale de frottement moyenne

$$\tau_p = -\tau_{rz}(\overline{\mathbf{V}}) > 0 ,$$

 $\overline{\overline{\tau}}(\overline{\mathbf{V}})$  étant le tenseur des contraintes visqueuses moyen, en fonction de G et a. Commentez et interprétez physiquement cette relation.

**3.a** Justifiez que dans la *couche externe* située a priori en proche paroi, où la turbulence joue un rôle dominant, on a en première approximation

$$\eta^t U'(r) = -\tau_p . (5.153)$$

**3.b** On utilise comme variable d'espace la distance à la paroi y = a - r, i.e., on fait le changement de variable

$$W(y) = U(a-y) .$$

D'autre part on utilise le modèle de longueur de mélange de Prandtl pour estimer la viscosité turbulente, avec  $\ell_m = \chi y$ , où  $\chi$  est la constante de Von Karman. Explicitez alors l'équation (5.153) et calculez W(y). Vous ferez apparaître la **vitesse de frottement**  $u_{\tau}$ , la vitesse réduite  $W^+ = W/u_{\tau}$ , et la distance à la paroi réduite  $y^+ = yu_{\tau}/\nu$ . Montrez que l'on obtient une **loi de paroi** identique à celle trouvée au-dessus d'une paroi plane; vous l'écrirez sous la même forme en faisant apparaître la même constante additive C.

**4.a** De façon audacieuse, suivant Prandtl, on suppose que la loi trouvée précédemment pour  $W^+$  est valable en turbulence forte dans la quasi-totalité du tuyau, en dehors d'une très fine couche visqueuse, puisqu'alors la couche externe s'« étend ». Donnez l'expression approximative correspondante de la vitesse réduite  $U^+ = U/u_{\tau}$ , d'abord en terme de r puis en terme de  $\tilde{r} = r/a$ . Vous ferez apparaître le nombre de Reynolds construit sur la vitesse de frottement et le rayon du tuyau

$$Re_{\tau} = a^+ = \frac{u_{\tau}a}{\nu}$$
 (5.154)

**4.b** Calculez d'après ce modèle la vitesse débitante V de l'écoulement, réduite en unités de  $u_{\tau}$ , soit  $V^+ = V/u_{\tau}$ .

*Indications* : on donne

$$\int_0^1 \widetilde{r} \ln(1-\widetilde{r}) \ d\widetilde{r} = -\frac{3}{4} ;$$

vous établirez une expression de la forme  $V^+ = V^+(a^+, \chi, C)$ .

5.a Rappelez d'après le cours l'expression des **pertes de charge** dans le tuyau en fonction du coefficient de perte de charge  $\lambda$ . Déduisez-en une relation entre  $G, V, \rho, a$  et  $\lambda$ , puis la vitesse de frottement  $u_{\tau}$  en fonction de V et  $\lambda$ . Expliquez la physique de cette relation.

**5.b** Exprimez  $Re_{\tau} = a^+$  en fonction de  $\lambda$  et du nombre de Reynolds Re construit sur la vitesse débitante et le diamètre du tuyau. Commentez succinctement.

6.a Déduisez de tout ce qui précède la relation de Karman - Prandtl

$$1/\sqrt{\lambda} = \alpha \log\left(Re\sqrt{\lambda}\right) + \beta \qquad (5.155)$$

où log désigne le logarithme en base 10, log =  $\ln / \ln 10$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres fonctions des paramètres de la loi de paroi  $\chi$  et C.

**6.b** En utilisant les valeurs retenues (sur la base d'expériences et de simulations numériques directes) pour la loi de paroi en tuyau  $\chi = 0,41$  et C = 5,2 donnez les valeurs numériques prévues pour  $\alpha$  et  $\beta$  avec 2 chiffres significatifs. Comparez à la formule de Karman-Nikuradze-Prandtl donnée dans le cours, sachant que Karman a légèrement corrigé les valeurs numériques issues de son calcul en ajustant directement les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  pour reproduire une étude expérimentale détaillée de Nikuradze. Commentez succinctement.

7 À partir de la loi trouvée question 4.a, établissez une loi pour le profil de vitesse normalisé  $\widetilde{U} = U(r)/U(0)$  en terme de  $\widetilde{r} = r/a$ .

Indication :  $\widetilde{U}(\widetilde{r})$  fait naturellement intervenir les paramètres de la loi de paroi  $\chi$  et C, ainsi que le nombre de Reynolds  $a^+$ .

**8.a** Dans El Khoury et al. (2013), qui présentent des simulations numériques directes d'écoulements en tuyau, on étudie deux écoulements ainsi caractérisés :

Numéro d'écoulement	Nombre de Reynolds $Re$	Coefficient de perte de charge $\lambda$
1	19000	0,0268
2	37700	0,0225

Calculez pour ces deux écoulements le coefficient de perte de charge  $\lambda$  prédit par la relation de Karman - Prandtl (5.155) établie en question 6, comparez et commentez.

*Indication* : si vous faites le calcul avec Matlab, votre programme pourrait avoir la structure suivante :

alpha= ... ; beta= ... ; Rey= ... ; % Tests pour choisir les valeurs de l'intervalle où chercher le zéro loiKP( ... , Rey, alpha, beta) loiKP( ... , Rey, alpha, beta) % Recherche de lambda par vérification de la loi de KP lambda= fzero(@(x) loiKP(x, Rey, alpha, beta), [... ...]) % Loi de KP function res= loiKP(lambda, Rey, alpha, beta) res= 1/sqrt(lambda) - alpha\*log10(Rey\*sqrt(lambda)) - beta; end **8.b** Calculez en conséquence le nombre de Reynolds  $Re_{\tau} = a^+$  prédit par la théorie de Karman - Prandtl, pour ces deux écoulements. Commentez succinctement.

- **9** Dans le plan  $(\tilde{r}, \tilde{U})$ , représentez sur un même graphe
  - le profil  $\widetilde{U}(\widetilde{r})$  de l'écoulement laminaire, dont vous rappelerez l'expression analytique;
  - le profil  $\widetilde{U}(\widetilde{r})$  de l'écoulement 1 prédit par la théorie de Karman Prandtl;
  - le profil  $\widetilde{U}(\widetilde{r})$  de l'écoulement 2 prédit par la théorie de Karman Prandtl.

Comparez ces graphes et commentez les physiquement.

10 En revenant sur les calculs de la question 3.b, établissez l'expression de la viscosité turbulente réduite  $\nu^+ = \eta^t / \eta$  en fonction de  $\tilde{r}$ , puis représentez les profils correspondants pour les écoulements turbulents 1 et 2 dans le plan  $(\tilde{r}, \nu^+)$  sur un même graphe. Reproduisez ce graphe sur votre copie, et commentez physiquement.

## Bibliographie

- AVILA, K., MOXEY, D., DE LOZAR, A., AVILA, M., BARKLEY, D. & HOF, B. 2011 The onset of turbulence in pipe flow. *Science* **333**, 192–196.
- BATCHELOR, G. K. 1967 An introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press.

BELLOT, J. P. 2016 Couches limites et rayonnement. Cours de Mines Nancy (2A).

- BELLOT, J. P. 2017 Phénomènes de transport. Cours de Mines Nancy (2A).
- BONNIN, J. 1983 Écoulement des fluides dans les tuyauteries. Techniques de l'Ingénieur, traité Génie mécanique A738.
- CHAMPAGNE, F. H. 1978 The fine-scale structure of the turbulent velocity field. J. Fluid Mech. 86, 67-108.
- CHASSAING, P. 2000a Mécanique des fluides Éléments d'un premier parcours. CÉPADUÈS Éditions.
- CHASSAING, P. 2000b Turbulence en mécanique des fluides. CÉPADUÈS Éditions.
- COMBEAU, H. 2019 Mécanique des fluides 1. Cours de Mines Nancy (2A).
- CORCOS, G. M. & SHERMAN, F. S. 1984 The mixing layer : deterministic model of a turbulent flow. Part 1. Introduction and the two-dimensional flow. J. Fluid Mech. 139, 29–65.
- COUSTEIX, J. 1988 Aérodynamique Couche limite laminaire. CÉPADUÈS Éditions.
- DAVIDSON, P. A. 2004 Turbulence. An introduction for scientists and engineers. Oxford University Press.
- DRAZIN, P. D. 2002 Introduction to hydrodynamic stability. Cambridge University Press.
- EITEL-AMOR, G., ÖRLÜ, R. & SCHLATTER, P. 2014 Simulation and validation of a spatially evolving turbulent boundary layer up to  $Re_{\theta} = 8300$ . Int. J. Heat Fluid Flow 47, 57 69, lien UL.
- EL KHOURY, G. K., SCHLATTER, P., NOORANI, A., FISCHER, P. F., BRETHOUWER, G. & JOHANSSON, A. V. 2013 Direct numerical simulation of Turbulent Pipe Flow at moderately high Reynolds numbers. *Flow, Turb. Comb.* **91**, 475–495.
- FAISST, H. & ECKHARDT, B. 2003 Traveling waves in pipe flow. Phys. Rev. Lett. 91, 224502.
- FER, F. 1971 Thermodynamique macroscopique. Tome II Systèmes ouverts. Gordon & Breach.
- FERMIGIER, M. 1999 Hydrodynamique physique. Problèmes résolus avec rappels de cours. Dunod.
- FRISCH, U. 1995 Turbulence. The legacy of Kolmogorov. Cambridge University Press.
- GAUDRY, E. 2019 Physique statistique. Cours de Mines Nancy (1A).
- GUYON, E., HULIN, J. P. & PETIT, L. 2001 Hydrodynamique physique. EDP Sciences.

GUYON, E., HULIN, J. P. & PETIT, L. 2012 Hydrodynamique physique. EDP Sciences.

- HAALAND, S. E. 1983 Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow. J. Fluids Eng. 105, 89–90.
- HOF, B., JUEL, A. & MULLIN, T. 2003 Scaling of the turbulence transition threshold in a pipe. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 244502,1–4.
- HUANG, K. 1988 Statistical mechanics. Wiley.
- HUERRE, P. 1998 Mécanique des fluides. Cours de l'école polytechnique.
- JANNOT, Y. 2012 Transferts thermiques. Cours de Mines Nancy (2A), www.thermique55.com.
- JANNOT, Y. & MOYNE, C. 2016 Transferts thermiques Cours et 55 exercices corrigés. Edilivre.
- KOLMOGOROV, A. N. 1941 Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. C. R. Acad. Sci. U.R.S.S. 30, 31 and 32.
- LAUNDER, B. E. & SPALDING, D. B. 1974 The numerical computation of turbulent flows. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 3, 269–289.
- LIDE, D. R. 2001 Handbook of Chemistry and Physics. CRC Press.
- LUMLEY, J. L. 1992 Some comments on turbulence. Phys. Fluids A 4, 203-211.
- MCKEON, B. J., ZAGAROLA, M. V. & SMITS, A. J. 2005 A new friction factor relationship for fully developed pipe flow. J. Fluid Mech. 538, 429–443.
- MOKHTARPOOR, R., HEINZ, S. & STOELLINGER, M. 2016 Dynamic unified RANS-LES simulations of high Reynolds number separated flows. *Phys. Fluids* 28, 095101, 1–36.
- PEARSON, B. R., KROGSTAD, P.-A. & VAN DE WATER, W. 2002 Measurements of the turbulent energy dissipation rate. *Phys. Fluids* 14, 1288–1290, lien UL.
- PEDRETTI, C. & CIANCHI, M. 1998 Leonardo, I codici. Giunti Editore.
- PEIXINHO, J. & MULLIN, T. 2006 Decay of Turbulence in pipe flow. Phys. Rev. Lett. 96, 094501, 1-4.
- PLAUT, E. 2008 Modélisation d'instabilités : méthodes non linéaires. Cours du Master 2 recherche de mécanique-énergétique de Nancy, http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisp.
- PLAUT, E. 2021 a Le calcul tensoriel et différentiel : outil mathématique pour la physique des milieux continus. Cours de Mines Nancy (1A), http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisp.
- PLAUT, E. 2021b Mécanique des milieux continus solides et fluides. Cours de Mines Nancy (1A), http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisp.
- PLAUT, E. 2022 Transition to turbulence in thermoconvection and aerodynamics. Cours de Mines Nancy (3A), http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisp.
- PLAUT, E., LEBRANCHU, Y., SIMITEV, R. & BUSSE, F. H. 2008 Reynolds stresses and mean fields generated by pure waves : applications to shear flows and convection in a rotating shell. J. Fluid Mech. 602, 303–326.
- PLAUT, E., PEINKE, J. & HÖLLING, M. 2021 *Turbulence & Wind Energy*. Cours de Mines Nancy (3A), http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/publisp.

- RENNER, C., PEINKE, J. & FRIEDRICH, R. 2001 Experimental indications for Markov properties of smallscale turbulence. J. Fluid Mech. 433, 383–409.
- REYNOLDS, O. 1883 An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **174**, 935–982.
- RICHARDSON, L. F. 1922 Weather prediction by numerical process. Cambridge University Press.
- SCHLICHTING, H. 1979 Boundary-layer theory. Mac Graw-Hill.
- SCHLICHTING, H. & GERSTEN, K. 2000 Boundary layer theory. Springer-Verlag.
- SCHNEIDER, T. M., ECKHARDT, B. & YORKE, J. A. 2007 Turbulence Transition and the Edge of Chaos in Pipe Flow. *Phys. Rev. Lett.* 99, 034502,1–4.
- SCHULTZ, M. P. & FLACK, K. A. 2013 Reynolds-number scaling of turbulent channel flow. *Phys. Fluids* 25, 025104,1–13.
- SREENIVASAN, K. R. 1984 On the scaling of the turbulent dissipation rate. Phys. Fluids 27, 1048–1051.
- STOKES, G. G. 1845 On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Camb. Phil. Soc.* 8, 287–341, disponible dans Stokes' Mathematical and Physical Papers, vol. I, Cambridge University Press 1880, et sur Internet.
- STROGATZ, S. H. 1994 Nonlinear dynamics and chaos. Perseus Publishing.
- TAYLOR, G. I. 1938 The spectrum of turbulence. Proc. R. Soc. Lond. A 164, 476–490, DOI: 10.1098/rspa.1938.0032 - Open access.
- WILCOX, D. C. 2006 Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries.
- WILLIS, A. P. & KERSWELL, R. R. 2007 Critical behavior in the relaminarization of localized turbulence in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 014501,1–4.

### Annexe A

# Éléments de correction de problèmes

Problème 3.3 Étude détaillée d'ondes de surface en eau profonde

#### Script Matlab de réponse à la question 6 :

```
%% Paramètres physiques
g= 9.81; gamma= 0.074; rho= 1000; nu= 1.31*10^-6;
%% Nombre d'onde
lambda= 40; k= 2*pi/lambda
%% Domination du terme de gravité / terme de tension sup dans rdd
R= (g/k)/(gamma*k/rho)
%% Onde de gravité parce que k est petit !
c= sqrt(g/k)
omega= c*k
T= 2*pi/omega
%% Domination du terme de gravité / terme visqueux dans la cond. d'interf.
R= nu*k*omega/g
%% Interface : définition et tracé
% Valeurs tabulées de x puis z
x= linspace(0, 40, 30); A= 0.5; z= A * cos(k*x);
% Tracé
plot(x,z,'k','LineWidth',2)
%% Lignes de courant
% Grille = valeurs tabulées de x et z
[x,z] = meshgrid(linspace(0, 40, 30), linspace(-10, 0, 20));
% Valeurs tabulées de psi à un facteur près
psi= exp(k*z) .* cos(k*x);
% Lignes de courant : isocontours de la fonction courant psi
hold on; contour( x, z, psi, 'k')
% Imposer les intervalles voulus et un rapport d'aspect physique
axis([0 40 -10 0.5]); axis equal;
```

```
%% Champ de vitesse
% Nouvelle grille moins fine
[x,z] = meshgrid(linspace(0, 40, 18),linspace(-10, -2, 4));
% Valeurs tabulées de la vitesse à un facteur près
vx= exp(k*z) .* cos(k*x); vz= exp(k*z) .* sin(k*x);
% Tracé de ce champ de vecteurs
quiver(x,z,vx,vz)
% On n'oublie pas de labelliser les axes
xlabel('x en m'); ylabel('z en m');
Script Matlab de réponse à la question 8.1 :
%% Nombre d'onde
lambda= 40; k= 2*pi/lambda
g= 9.81; c= sqrt(g/k)
omega= c*k
T= 2*pi/omega
A= 0.5; V= A*omega
%% Intervalle temporel avec 200 points
tint= linspace(0, 6*T, 200);
%% Trajectoire 1
[t1, F1]= ode45(@(t,F) G(t, F, k, omega, V), tint, [ 0 ; -1 ]);
x1= F1(:,1); z1= F1(:,2);
hold on; axis equal;
plot(x1,z1,'LineWidth',1.3)
% Statistiques pour la caractérisation quantitative
% Valeur min de z
z1min= min(z1)
% Valeur moy de z
z1moy= mean(z1)
% Valeur max de z
z1max = max(z1)
% Rayon des cercles
R1= (z1max-z1min)/2
% Dérive dans la direction x
delx1= x1(end)
%% Trajectoire 2
[t2, F2]= ode45(@(t,F) G(t, F, k, omega, V), tint, [ 0 ; -5 ]);
x2= F2(:,1); z2= F2(:,2);
plot(x2,z2,'LineWidth',1.3)
axis([-0.5 1.5 -6 0]);
xlabel('x en m'); ylabel('z en m');
```

```
127
```

```
% Statistiques pour la caractérisation quantitative
% Valeur min de z
z2min= min(z2)
% Valeur moy de z
z2moy= mean(z2)
% Valeur max de z
z2max= max(z2)
% Rayon des cercles
R2= (z2max-z2min)/2
% Dérive dans la direction x
delx2= x2(end)
%% Fonction qui définit l'équation différentielle
function res= G( t, F, k, omega, V)
res= V*[ exp(k*F(2)) * cos(k*F(1)-omega*t); exp(k*F(2)) * sin(k*F(1)-omega*t) ];
```

Problème 5.2 Réanalyse de la simulation de couche limite turbulente de KTH pour caractérisation fine des zones « locale », « visqueuse » et « logarithmique »

```
Script Matlab correspondant à la partie 1 :
```

```
%% Lecture des données et affectation à des listes
data= load("vel_11000.prof");
% Extraction de la colonne 2 : valeurs tabulées de y+
yp= data(:,2);
% Extraction de la colonne 13 : valeurs tabulées de S+= dU+/dy+
Sp= data(:,13);
% Extraction de la colonne 7 : valeurs tabulées de -tauxy+
% Ne pas oublier le signe - !
tauxyp= -data(:,7);
% Contrainte totale
taup= Sp + tauxyp;
%% Q1.2.2 Figure1
figure(1)
hold on
plot( yp, Sp, "b","LineWidth",1);
plot( yp, tauxyp, "r","LineWidth",1);
plot( yp, taup, "k","LineWidth",1);
axis([0 2500 0 1])
xlabel("y+"); ylabel("tau+");
legend("dU+/dy+","tauxy+","tau+");
pbaspect([2.5 1 1])
nfig = "fig1.eps";
print('-depsc',nfig); system("epstopdf " + nfig);
```

```
%% Q1.2.4 Figure2 version0 pour voir
delete(gca)
figure(2)
hold on
plot( yp, Sp, "b", "LineWidth",2);
plot( yp, tauxyp, "r","LineWidth",2);
plot( yp, taup, "k","LineWidth",2);
yline(0.9, "k-","LineWidth",2)
axis([0 1000 0 1])
xlabel("y+"); ylabel("tau+");
legend("dU+/dy+","tauxy+","tau+");
%% Q1.2.4 Calcul de ypg= 1ère valeur de yp pour laquelle taup < 0,9</pre>
% I= liste des valeurs d'indice-position dans la liste des taup pour
% lesquelles taup < 0,9
I= find(taup<0.9);</pre>
\% indg= 1ère valeur dans I = 1er indice-position pour lequel le critère
% n'est plus vérifié
indg= I(1)
% Valeur de y+ correspondante, exacte puis arrondie à l'entier le + proche
ypg= yp(indg)
ypg= round(ypg)
% Verification : on passe bien en dessous de 0,9 au point d'indice indg
taupavant= taup(indg-1)
taupapres= taup(indg)
%% Q1.2.5 Figure2 avec le ypg calculé
delete(gca)
figure(2)
hold on
plot( yp, Sp, "b","LineWidth",2);
plot( yp, tauxyp, "r","LineWidth",2);
plot( yp, taup, "k","LineWidth",2);
yline(0.9, "k--","LineWidth",2)
axis([0 ypg 0 1])
ax = gca; ax.FontSize = 13;
xlabel("y+", "FontSize",15); ylabel("tau+", "FontSize",15);
legend("dU+/dy+","tauxy+","tau+", "Location","southeast", "FontSize",15);
nfig = "fig2.eps";
print('-depsc',nfig); system("epstopdf " + nfig);
```

#### Script Matlab correspondant à la partie 2 :

```
%% Lecture des données et affectation à des listes
data= load("vel_11000.prof");
% Extraction de la colonne 2 : valeurs tabulées de y+
yp= data(:,2);
% Extraction de la colonne 13 : valeurs tabulées de S+= dU+/dy+
Sp= data(:,13);
% Extraction de la colonne 7 : valeurs tabulées de -tauxy+
% Ne pas oublier le signe - !
tauxyp= -data(:,7);
% Viscosité turbulente adimensionnelle
nup= tauxyp./Sp
%% Q2.2.1 Figure3
figure(3)
hold on
plot( yp, nup, "k","LineWidth",1);
axis([0 2500 0 190])
xlabel("y+"); ylabel("nu+");
pbaspect([2.5 1 1])
nfig = "fig3.eps";
print('-depsc',nfig); system("epstopdf " + nfig);
%% Q2.2.3 Figure4
delete(gca)
chiest= nup ./ yp;
figure(4)
hold on
plot( yp, chiest, "k","LineWidth",2);
axis([0 641 0 0.5])
ax = gca; ax.FontSize = 13;
xlabel("y+", "FontSize",15); ylabel("nu+/y+", "FontSize",15);
nfig = "fig4.eps";
print('-depsc',nfig); system("epstopdf " + nfig);
```

#### Problème 5.3 Écoulements laminaires et turbulents en canal

Script Matlab de solution de la fin du problème :

```
%% Q 6.2
chi= 0.4; C= 5;
alpha= 1/(sqrt(2)*chi)
beta= C/sqrt(2) - (2+log(2))/(2*sqrt(2)*chi)
%% Q 8.1
Re= 1.43*10^5; lambdaex= 0.00339;
format long
%% Coeff. de frottement laminaire
lambdalam= 6/Re
lambdaex/lambdalam
%% Coeff. de frottement turbulent
lambdath= fzero(@(x) loiKP(x, Re, alpha, beta), [0.8*lambdaex,1.2*lambdaex])
err= 100*(lambdath/lambdaex-1)
%% Q 8.2
Retau= Re * sqrt(lambdath/2)
Retauex= Re * sqrt(lambdaex/2)
%% Q 9
% Valeur de depart de ytilde proche de O
ymin= exp(-(log(Retau)+chi*C))
% Valeurs tabulees de ytilde dans la moitie inferieure
y= linspace(ymin,1,100);
% Ecoulement laminaire dans la moitie inferieure
Ulam= 1-(y-1).^2;
hold on;
plot(Ulam,y, "k","LineWidth",2)
% Valeurs de ytilde dans la moitie superieure
ysup= y+1;
% Ecoulement laminaire dans la moitie superieure par parite
Ulamsup= flip(Ulam);
plot(Ulamsup,ysup, "k","LineWidth",2)
% Ecoulement turbulent dans la moitie inferieure
Uturb= 1 + log(y)/(log(Retau)+chi*C);
plot(Uturb,y, "r","LineWidth",2)
```

```
% Ecoulement turbulent dans la moitie superieure par parite
Uturbsup= flip(Uturb);
plot(Uturbsup,ysup, "r","LineWidth",2)
axis([-0.05 1.05 -0.05 2.05])
xlabel("U/Umax"); ylabel("y/h");
nfig = "figUy.eps";
print("-depsc",nfig); system("epstopdf " + nfig);
%% Loi de Karman - Prandtl
function res= loiKP( lambda, Re, alpha, beta)
res= 1/sqrt(lambda) - alpha * log(Re * sqrt(lambda)) - beta;
```

Problème 5.4 Modèle de Karman - Prandtl d'écoulements turbulents en tuyau

$$1 \ \overline{\overline{\mathbf{D}}}(\overline{\mathbf{V}}) = \frac{1}{2}U'(r) \ (\overline{\mathbf{e}}_z \otimes \overline{\mathbf{e}}_r + \overline{\mathbf{e}}_r \otimes \overline{\mathbf{e}}_z) \ .$$
  
$$2.a \ \overline{\overline{\mathbf{T}}} = 2(\eta + \eta^t)\overline{\overline{\mathbf{D}}}(\overline{\mathbf{V}}) \ \text{convient.}$$
  
$$2.b \ P(r,z) = \Pi(z) \ - \frac{2}{3}\rho k(r).$$

2.c Perte de pression motrice moyenne...

2.d 
$$(\eta + \eta^{t}) U'(r) = -\frac{1}{2}Gr$$
.  
2.e  $\tau_{p} = \frac{1}{2}Ga$ .  
3.b  $W^{+}(y) = \frac{1}{\chi}\ln y^{+} + C$ .  
4.a  $U^{+} = \frac{1}{\chi}\ln[a^{+}(1-\tilde{r})] + C$ .  
4.b  $V^{+} = \frac{1}{\chi}\ln a^{+} - \frac{3}{2\chi} + C$ .  
5.a  $G = \frac{\rho V^{2}}{4a}\lambda \implies u_{\tau} = V\sqrt{\frac{\lambda}{8}}$ .  
5.b  $Re_{\tau} = Re\sqrt{\frac{\lambda}{32}}$ .  
6.a  $\alpha = \frac{\ln 10}{\sqrt{8\chi}}$  et  $\beta = \frac{C}{\sqrt{8}} - \frac{3 + \ln 32}{2\sqrt{8\chi}}$ 

**6.b** 
$$\alpha = 2,0$$
 et  $\beta = -0.95$ .  
**7**  $\widetilde{U} = \frac{\ln[a^+(1-\widetilde{r})] + \chi C}{\ln a^+ + \chi C}$ .

8.<br/>a $\,\&\, {\bf b}$ Pour le 1<sup>er</sup> écoulement on trouve avec Matlab

\_\_\_\_\_

 $\lambda ~=~ 0,0274 ~\simeq~ 1,02 \lambda_{\rm expe} ~~ {\rm et} ~~ Re_\tau ~=~ 556 ~\ldots$ 

**10** 
$$\nu^+ = \chi a^+ (1 - \tilde{r})$$
.

### Annexe B

## Analyse dimensionnelle

On présente ci-après un tableau destiné notamment à faciliter les *tests d'homogénéité dimensionnelle des formules*, prenant en compte des grandeurs de nature thermique...

Grandeur	Notation - Définition	Fonction de dimensions	Unité SI, symbole
Masse	m	$m^1$	kilogramme, kg
Longueur	l	$\ell^1$	mètre, m
Temps	t	$t^1$	seconde, s
Masse volumique	$\rho = d^3m/d^3x$	$m^1 \ell^{-3}$	$ m kg/m^3$
Vitesse	v = dx/dt	$\ell^1 t^{-1}$	m/s
Accélération	g = dv/dt	$\ell^1 t^{-2}$	$m/s^2$
Force	F = mg	$m^1 \ \ell^1 \ t^{-2}$	Newton, N = kg m/s <sup>2</sup>
Couple	$\Gamma = F\ell$	$m^1 \ \ell^2 \ t^{-2}$	$N~m~=~kg~m^2/s^2$
Pression, Contrainte	$p, \sigma = F/S$	$m^1 \ \ell^{-1} \ t^{-2}$	Pascal, Pa = $kg/(m s^2)$
Énergie	$E = \frac{1}{2}mv^2$	$m^1 \ \ell^2 \ t^{-2}$	$Joule, J = kg m^2/s^2$
Puissance	P = dE/dt	$m^1 \ \ell^2 \ t^{-3}$	Watt, W = $J/s$
Coefficient de tension superficielle	$\gamma = F/\ell$	$m^1 t^{-2}$	$\rm N/m~=~kg/s^2$
Déformation	$\epsilon = \partial x / \partial X$	1	
Taux de déformation	$D = \partial v / \partial x$	$t^{-1}$	$s^{-1}$
Viscosité dynamique	$\eta=\sigma/D$	$m^1 \ \ell^{-1} \ t^{-1}$	kg/(m s) = Pa s
Viscosité cinématique	$ u = \eta /  ho$	$\ell^2 t^{-1} \equiv v \ell \equiv v^2 t$	$m^2/s$
Débit volumique	q = vS	$\ell^3 t^{-1}$	$m^3/s$
Débit massique	$\dot{m} = \rho q$	$m^1 t^{-1}$	kg/s
Température	T ou $ heta$	$ heta^1$	Kelvin, K
Capacité calorifique	$c = e_i/T$	$\ell^2 t^{-2} \theta^{-1}$	J/(kg K)
Densité de flux de chaleur	$\Phi_{\rm chal} = \dot{Q}/S$	$m t^{-3}$	$W/m^2$
Conductivité thermique	$\lambda = \Phi_{\rm chal} / (\nabla T)$	$m \ \ell \ t^{-3} \ \theta^{-1}$	W/(m K)
Débit calorifique	$q_c = \dot{m} \ c = \dot{Q}/\delta T$	$m \ \ell^2 \ t^{-3} \ \theta^{-1}$	W/K

**Tab. B.1** – *Fonctions de dimensions* et *unités dans le système international* (SI) des principales grandeurs rencontrées en *thermomécanique des fluides*. Les noms des grandeurs et unités fondamentales sont donnés en caractères gras.