

8<sup>ème</sup> séance de **Mécanique des fluides**

**1 Retour sur l'ex 4.1** *Écoulements de Couette diphasiques*

**2 Ondes interfaciales - Analyse de stabilité**

**2.1 Cours : ondes neutres, de gravité et capillaires**

**2.2 TD : pb 3.3 ondes amplifiées de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor**

**NB** : la page ARCHE du module

<http://arche.univ-lorraine.fr/course/view.php?id=14262>

vous est maintenant accessible, avec les bilans pédagogiques de l'an dernier...

# 1 Retour sur l'ex. 4.1 Écoulements de Couette diphasiques

Principe : deux fluides visqueux entre une plaque inférieure fixe et une plaque supérieure mobile de vitesse  $\bar{\mathbf{V}} = U\bar{\mathbf{e}}_x$  :



fluide 2, viscosité  $\eta_2$

fluide 1, viscosité  $\eta_1$

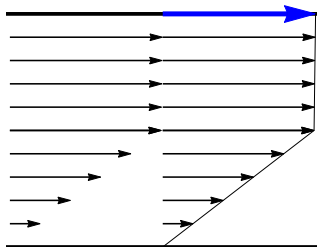
Condition dynamique à l'interface  $y = \ell$  :

$$\eta_1 u_1'(\ell) = \eta_2 u_2'(\ell)$$

# 1 Retour sur l'ex. 4.1 Écoulements de Couette diphasiques

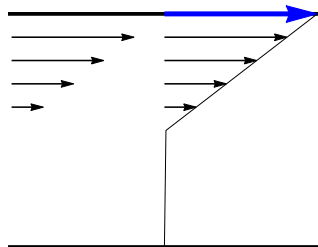
$$M = \eta_1/\eta_2 = 1/100$$

fluide le + visqueux « en haut » :



$$M = \eta_1/\eta_2 = 100$$

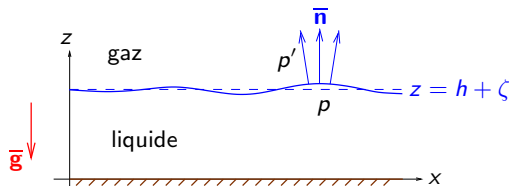
fluide le + visqueux « en bas » :



## 2 Ondes à l'interface entre deux fluides

### Buts :

- ▶ les ondes elles-mêmes...
- ▶ en tant que modes neutres d'instabilité  $\longleftrightarrow$  théorie des **instabilités**
- ▶ les conditions d'interface  $\longleftrightarrow$  théorie des écoulements **diphases**



Modes normaux « linéaires » de perturbation de l'interface :

$$\zeta = \zeta(x, t) = \text{Re}[A \exp(ikx + \sigma t)] \quad \text{avec} \quad A \ll \text{petite},$$

$k$  nombre d'onde,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  longueur d'onde.

## Analyse linéaire de stabilité en modes normaux

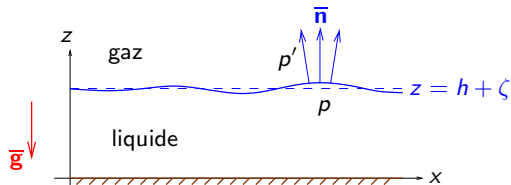
Pour simplifier,  $A \in \mathbb{R}$  ;  $\sigma = \sigma(k) = \sigma_r + i\sigma_i \Rightarrow \zeta = A \cos(kx + \sigma_i t) \exp(\sigma_r t)$

- ▷  $\sigma_r > 0 \leftrightarrow$  mode **amplifié** ; configuration de base **instable** ;  
 $\sigma_r$  taux de croissance ;
- ▷  $\sigma_r = 0 \leftrightarrow$  mode **neutre** ; configuration de base marginalement stable vis-à-vis de ce mode ;
- ▷  $\sigma_r < 0 \leftrightarrow$  mode **amorti** ; configuration de base stable vis-à-vis de ce mode ;  
 $-\sigma_r$  taux d'amortissement.
- ▷  $\sigma_i > 0, \sigma_i = \omega \leftrightarrow$  **onde gauche** de vitesse de phase  $-\omega/k$  ;
- ▷  $\sigma_i = 0 \leftrightarrow$  mode **stationnaire non propagatif** ;
- ▷  $\sigma_i < 0, \sigma_i = -\omega \leftrightarrow$  **onde droite** de vitesse de phase  $\omega/k$  ;  
 $|\omega|$  fréquence angulaire.

Modes normaux qui permettent d'écrire aux temps courts la réponse (linéaire) du système à n'importe quelles « perturbations initiales » :

$$\zeta_c(x, t = 0) = \sum_k A(k) \exp(ikx) \implies \zeta_c(x, t > 0) = \sum_k A(k) \exp(ikx + \sigma(k)t).$$

## Ondes d'interface en fluide parfait : calcul du potentiel des vitesses d'un mode normal



Mode normal « linéaire » de perturbation de l'interface :

$$\zeta = \zeta(x,t) = \text{Re}[A \exp(ikx + \sigma t)] \quad \text{avec} \quad A \ll \text{petite}.$$

Forme de mode normal du potentiel :  $\phi = \text{Re}[f(z) \exp(ikx + \sigma t)]$ .

Incompressibilité :

$$\Delta \phi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -k^2 f + f'' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = a_+ e^{kz} + a_- e^{-kz}.$$

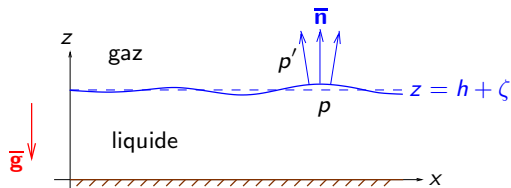
CL fond imperméable :  $v_z(z=0) = 0 \implies f(z) = a \cosh(kz)$ .

**Cond. d'interface cinématique** : 1 part fluide qui s'y trouve y reste tjrs :

$$z = h + \zeta \implies \frac{d}{dt}[z - (h + \zeta)] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_z = \frac{d\zeta}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{\sigma A}{k \sinh(kh)}.$$

## Ondes d'interface en fluide parfait : condition dynamique

⇒ équation caractéristique



Mode normal de perturbation :  $\zeta = \text{Re}[A \exp(ikx + \sigma t)]$  avec  $A \ll \text{petite}$ .

Mode normal de potentiel :

$$\phi = \text{Re}[a \cosh(kz) \exp(ikx + \sigma t)] \quad \text{avec} \quad a = \frac{\sigma A}{k \sinh(kh)}.$$

Condition dynamique à l'interface = condition de Laplace

$$p - p' = \gamma \text{div}(\vec{n}) \quad \text{avec} \quad \vec{n} = \frac{\vec{\nabla}[z - (h + \zeta)]}{\|\vec{\nabla}[z - (h + \zeta)]\|} \simeq \vec{e}_z - (\partial_x \zeta) \vec{e}_x,$$

$p$  et  $p'$  calculées par le 2<sup>d</sup> théorème de Bernoulli

$$\Rightarrow \frac{\rho \sigma^2 A}{k \tanh(kh)} + \rho g A = -\gamma k^2 A.$$

## Ondes d'interface en fluide parfait : équation caractéristique

Indépendante de  $A$ , normal pour des modes « linéaires » !..

$$\rho\sigma^2 = -\rho g k \tanh(kh) - \gamma k^3 \tanh(kh)$$

$\Rightarrow \sigma \in i\mathbb{R}$ ,  $\sigma = -i\omega$  avec  $\omega \in \mathbb{R}$   $\longleftrightarrow$  **ondes neutres**.

**Vitesse de phase**  $c = \omega/k$  donnée par la relation

$$c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \underbrace{\frac{g}{k} \tanh(kh)}_{\text{terme de gravité}} + \underbrace{\frac{\gamma k}{\rho} \tanh(kh)}_{\text{terme capillaire}} \quad (*)$$

Vitesse de phase **dépend de**  $k$  donc ces ondes sont **dispersives** [ cf. annexe B ],  
la relation (\*) est une « **relation de dispersion** ».



## Relation de dispersion

$$c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \underbrace{\frac{g}{k} \tanh(kh)}_{\text{terme de gravité}} + \underbrace{\frac{\gamma k}{\rho} \tanh(kh)}_{\text{terme capillaire}} \quad (*)$$

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) \left(1 + \frac{k^2}{k_c^2}\right) = \frac{g}{k} \tanh(kh) \left(1 + 4\pi^2 \frac{\ell_c^2}{\lambda^2}\right) \quad (*)$$

avec  $k_c = 1/\ell_c$

$\ell_c = \text{longueur capillaire} = \sqrt{\gamma/(\rho g)} = 2,7 \text{ mm}$  si interface **eau-air**

Si  $k \ll k_c$  i.e.  $\lambda \gg \ell_c$  : **ondes de gravité**

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh)$$

Si  $k \gg k_c$  i.e.  $\lambda \ll \ell_c$  : **ondes capillaires**

$$c^2 = \frac{\gamma k}{\rho} \tanh(kh)$$

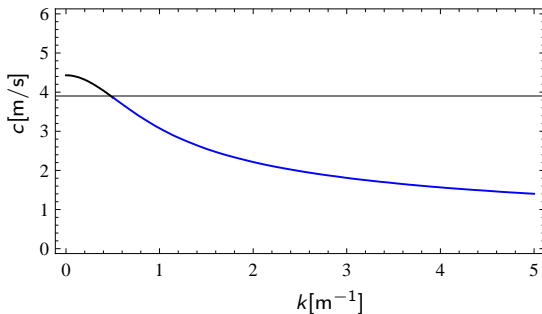
## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = g \frac{\tanh(kh)}{k} \simeq gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$

$$\simeq \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas d'un bassin ou près de la plage :  $h = 2$  m :

$$\sqrt{gh} = 4,4 \text{ m/s} :$$



Fréquences correspondantes ?

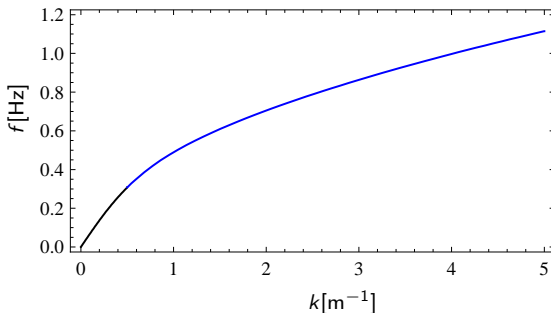
## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = g \frac{\tanh(kh)}{k} \simeq gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$

$$\simeq \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas d'un bassin ou près de la plage :  $h = 2$  m :

$$f = ck/(2\pi) = \sqrt{gk \tanh(kh)}/(2\pi) :$$



$f(k)$  strictement croissante est **bijective** : 1 fréquence  $\leftrightarrow$  1 longueur d'onde.

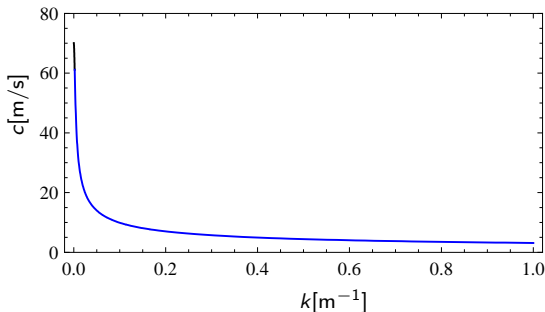
## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = g \frac{\tanh(kh)}{k} \simeq gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$

$$\simeq \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas de la mer ou de l'océan :  $h = 500$  m :

$$\sqrt{gh} = 70 \text{ m/s} :$$



Quid de grandes ondes excitées par un mvt de terrain de grande échelle ?..

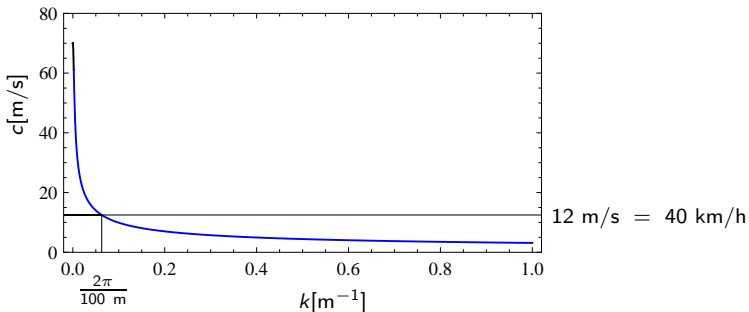
## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = g \frac{\tanh(kh)}{k} \simeq gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$

$$\simeq \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas de la mer ou de l'océan :  $h = 500$  m :

$$\sqrt{gh} = 70 \text{ m/s} :$$



Regardons plutôt ici la « houle » !..

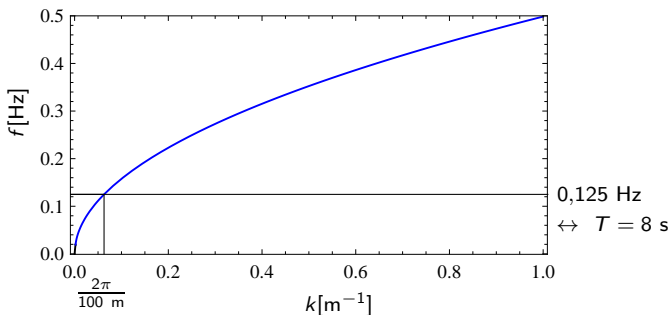
## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = g \frac{\tanh(kh)}{k} \simeq gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$

$$\simeq \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas de la mer ou de l'océan :  $h = 500$  m :

$$f = ck/(2\pi) = \sqrt{gk \tanh(kh)}/(2\pi) :$$



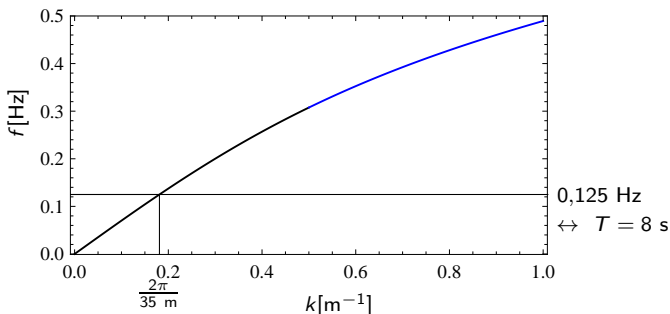
## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) \simeq gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$

$$\simeq \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas d'un bassin ou près de la plage :  $h = 2$  m :

$$f = ck/(2\pi) = \sqrt{gk \tanh(kh)}/(2\pi) :$$



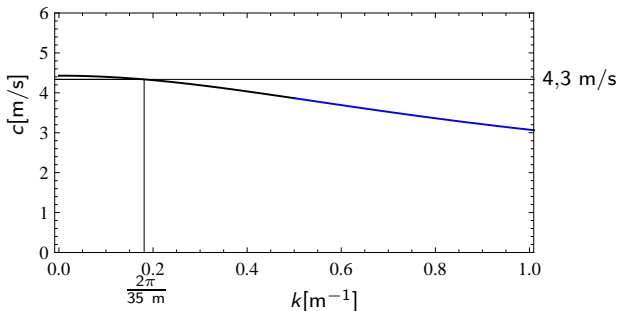
## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) \simeq gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$

$$\simeq \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas d'un bassin ou près de la plage :  $h = 2$  m :

$$\sqrt{gh} = 4,4 \text{ m/s} :$$



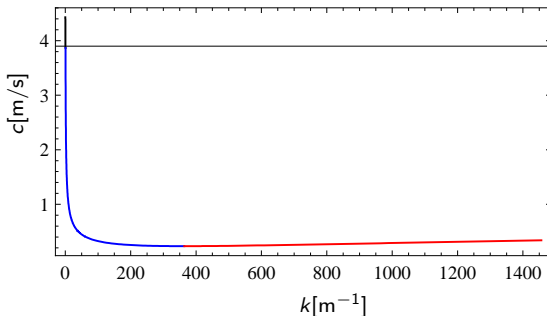


## Vers les ondes capillaires

$$c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \underbrace{\frac{g}{k} \tanh(kh)}_{\text{terme de gravité}} + \underbrace{\frac{\gamma k}{\rho} \tanh(kh)}_{\text{terme capillaire}}$$

Pour les voir il faut aller très haut en  $k$ ,

toujours dans le cas d'un bassin ou près de la plage :  $h = 2$  m :  $\sqrt{gh} = 4,4$  m/s :

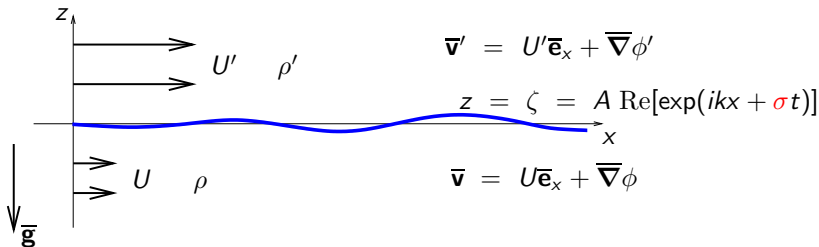


## TD : Pb 3.3 Instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor

Configuration avec « gradients » de vitesse et de masse volumique

⇒ dans certains cas, certaines ondes sont *amplifiées*

⇔ configuration de base est *instable*

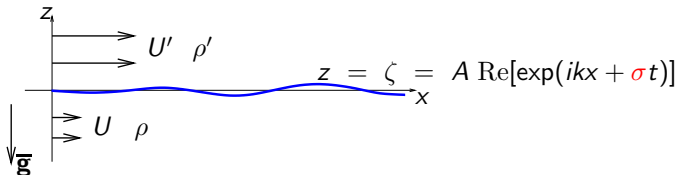


**contrairement** à la configuration du **cours** sans gradient de vitesse,  
avec 1 masse volumique négligeable dans le fluide supérieur

⇒ ondes sont *neutres*

⇔ configuration de base est *marginale stable*

## Pb 3.3 Instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor



$$a\sigma^2 + 2b\sigma + c = 0$$

Discriminant réduit

$$\Delta = \underbrace{\rho\rho'k^2(U - U')^2}_{\text{terme de KH déstabilisant}} + \underbrace{(\rho + \rho')(\rho' - \rho)gk}_{\text{terme de RT dést. ou stab.}} - \underbrace{(\rho + \rho')\gamma k^3}_{\text{terme de tension de surface stabilisant}}$$

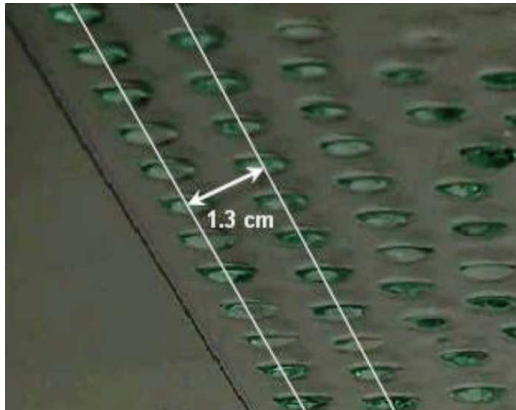
donc

$$\sigma_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{a} = -ik \frac{\rho U + \rho' U'}{\rho + \rho'} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho + \rho'}$$

présente une **partie réelle positive**, dénotant une **instabilité**, si  $\Delta > 0$ .

## Instabilité d'« interface » de Rayleigh-Taylor

dans une expérience élémentaire utilisant de l'huile :

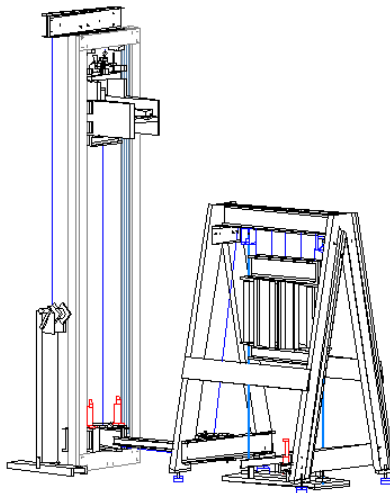


[ Clanet, Fermigier & Quéré.

DVD *Multimedia Fluid Mechanics*, Homsy et al. 2004 CUP ]

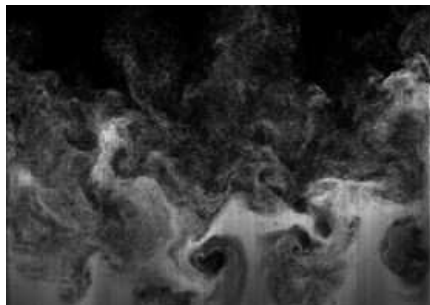
## L'instabilité d'« interface » de Rayleigh-Taylor

peut conduire à de la **turbulence**, comme dans cette expérience de l'université de l'Arizona :



## L'instabilité d'« interface » de Rayleigh-Taylor

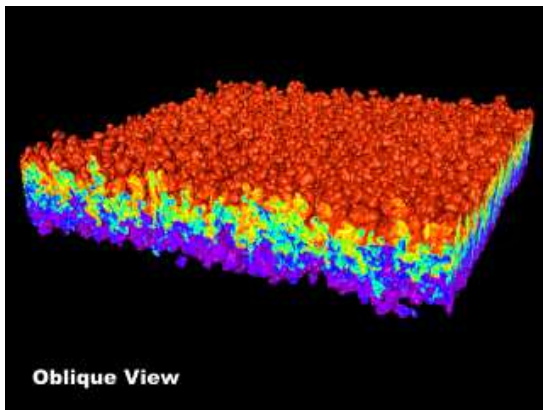
peut conduire à de la **turbulence**, comme dans cette expérience de l'université de l'Arizona :



[ Experimental Fluid Mechanics & Instability Laboratory, U. Arizona ]

## L'instabilité d'« interface » de Rayleigh-Taylor

peut aussi exister dans un **fluide stratifié sans interface**, comme dans cette simulation numérique où la couleur désigne la densité, et qui mène aussi à de la **turbulence** :

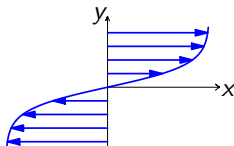


[ Cook & Cabot. Lawrence Livermore Nat. Lab.

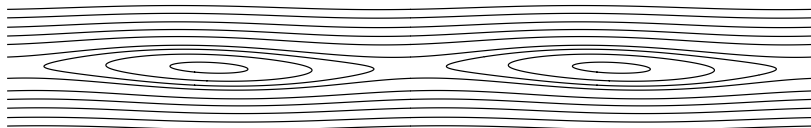
DVD *Multimedia Fluid Mechanics*, Homsy et al. 2004 CUP ]

## Instabilités d'« interface » de Kelvin-Helmholtz

Elles peuvent se produire (aussi) en absence d'interface matérielle, du moment que l'on a une **couche de cisaillement**, par exemple (en fluide parfait) :



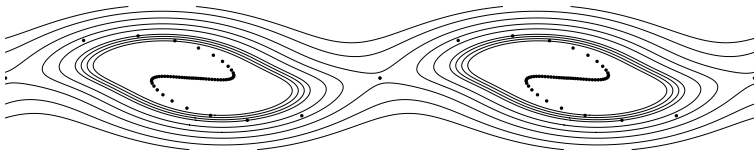
On montre par une **analyse linéaire de stabilité** (numérique) que l'instabilité conduit au développement d'une **allée de vortex** :





## Instabilités d'« interface » de Kelvin-Helmholtz

Développement temporel  $\longleftrightarrow$  « enroulement » de l'« interface » (●) :



parfois visible grâce à des nuages :

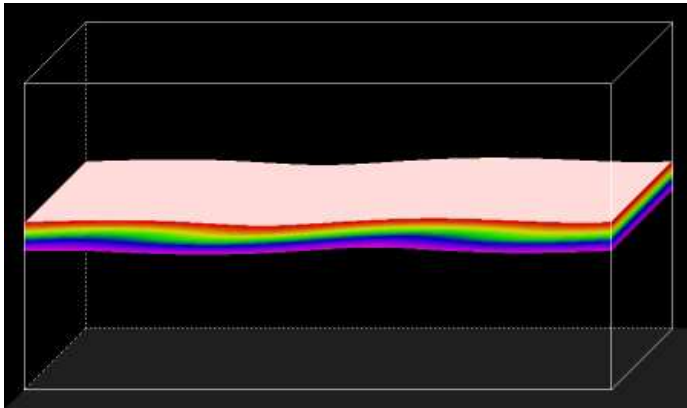


[ Martner 2001 ]

## Instabilité d'« interface » de Kelvin-Helmholtz

Simulation numérique de Smyth :

instabilité dans un fluide stratifié, couleur désigne la densité :



[ Smyth. Oregon State University.

DVD *Multimedia Fluid Mechanics*, Homsy et al. 2004 CUP ]

## Instabilité d'« interface » de Kelvin-Helmholtz

Expérience de Brown & Roshko :

injection dans le canal supérieur d'azote à  $U' = 10$  m/s,

dans le canal inférieur d'hélium-argon à  $U = 3,8$  m/s,  $\rho \simeq \rho'$  ;

visualisations par « ombroscopie » :



[ Brown & Roshko. Caltech. DVD *MFM* 2004 CUP ]