

4^{ème} séance de **Mécanique des fluides**

1 Retour sur les bilans d'énergies cinétique et interne, la dissipation

Applications

- ▶ en écoulement ouvert, autour d'une éolienne ou dans une centrale nucléaire...
- ▶ en écoulement fermé, l'écoulement de Couette cylindrique...
à l'occasion : éléments sur la **transition vers la turbulence**.

2 Bilan d'énergie cinétique en écoulement ouvert : pertes de charge

nécessitant dans le cas d'un écoulement en tuyau l'approche de l'**analyse dimensionnelle**...

à l'occasion : éléments sur la **transition vers la turbulence** et la **turbulence**.

3 TD : fin du pb. 1.1 de MF, ex. 8.3 de MMCSF

4 Mini TP : expérience du début du pb. 7.5 de MMCSF

Rappel : Bilan global d'énergie cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{volumiques}} + P_{\text{surfiques}} - P_{\text{dissipée}}$$

$$E_c = \iiint_{D_t} \rho e_c d^3x, \quad \frac{dE_c}{dt} = \iiint_{D_t} \frac{\partial(\rho e_c)}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial D_t} \rho e_c \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S,$$

$$P_{\text{volumiques}} = \iiint_{D_t} d^3\bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{v}}, \quad P_{\text{surfiques}} = \iint_{\partial D_t} d^2\bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{v}},$$

$$P_{\text{dissipée}} = 2\eta \iiint_{D_t} \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}} d^3x \geq 0$$

Applicat° : estimat° de la puissance disponible en éolien (syst. ouvert)



$$-\rho e_c VS \simeq 0 + P_{\text{fluide}} \rightarrow \text{éolienne} - 0$$

$$\Rightarrow P_{\text{éolienne}} \simeq \frac{1}{2} \rho V^3 S$$

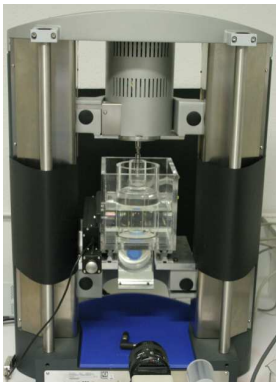
$$\Leftrightarrow P_{\text{éolienne}}/S \simeq \frac{1}{2} \rho V^3 \simeq 1 \text{ kW/m}^2$$

pour une vitesse de vent $V = 12 \text{ m/s} = 43 \text{ km/h}$.

Rappel : Bilan global d'énergie cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{volumiques}} + P_{\text{surfaciques}} - P_{\text{dissipée}}$$

Applicat° : Pb. 1.1 : Écoulem^t de Couette cylindrique (syst. fermé)



$$0 = 0 + P_{\text{cylindre} \rightarrow \text{liquide}} - P_{\text{dissipée}}$$

$$\Leftrightarrow P_{\text{moteur}} = \Gamma_{\text{moteur}} \Omega = P_{\text{dissipée}}$$

Applicat° num. :

$$a = 2 \text{ cm}, b = 4 \text{ cm}, h = 20 \text{ cm}, \Omega = 5 \text{ rad/s},$$

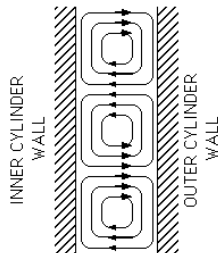
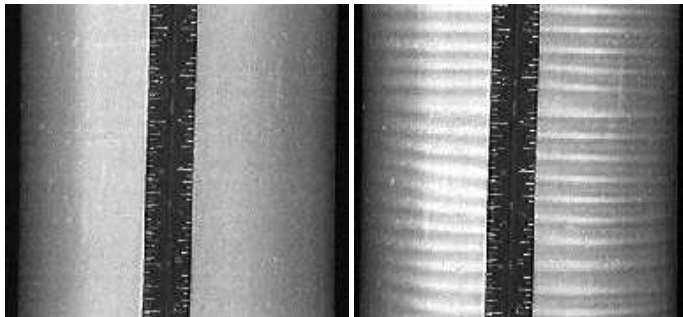
$$\eta \simeq 1000 \eta_{\text{eau}} \simeq 1 \text{ Pa s}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\text{moteur}} = 6,7 \cdot 10^{-3} \text{ N m}$$

$$\Rightarrow P_{\text{moteur}} = P_{\text{dissipée}} = 33,5 \text{ mW}$$

Attention : $\Omega \uparrow \Rightarrow$ **transition vers la turbulence**

À bas Ω : écoulement laminaire : À + haut Ω : **vortex de Taylor** :



A priori

$$\Gamma_{\text{moteur}} = \frac{P_{\text{dissipée}}}{\Omega} \uparrow \text{ avec la transition !}$$

[Princeton Gas Dynamics Lab]

Rappel : Bilan global d'énergie interne

$$\frac{dE_i}{dt} = P_{\text{dissipée}} + \dot{Q}$$

$$E_i = \iiint_{D_t} \rho e_i d^3x, \quad \frac{dE_i}{dt} = \iiint_{D_t} \frac{\partial(\rho e_i)}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial D_t} \rho e_i \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S,$$

$de_i = c dT$ avec c **capacité calorifique massique**,

$$\dot{Q} = \iiint_{D_t} r d^3x - \iint_{\partial D_t} \bar{\Phi}_{\text{chal}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S,$$

r = taux volumique de production de chaleur,

$\bar{\Phi}_{\text{chal}}$ = vecteur densité de flux de chaleur = $-\lambda \bar{\nabla} T$,

λ **conductivité thermique**.

Rappel : Bilan local d'énergie interne

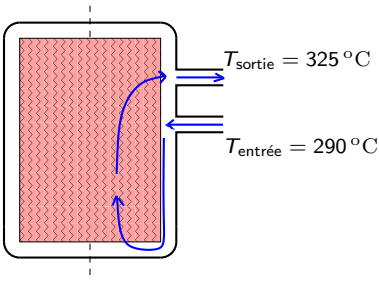
$$\rho c \frac{dT}{dt} = 2\eta \bar{\mathbf{D}} : \bar{\mathbf{D}} + r + \lambda \Delta T$$

Rappel : Bilan global d'énergie interne

$$\frac{dE_i}{dt} = P_{\text{dissipée}} + \dot{Q}$$

$$\frac{dE_i}{dt} = \iiint_{D_t} \frac{\partial(\rho e_i)}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial D_t} \rho e_i \mathbf{\bar{v}} \cdot \mathbf{\bar{n}} d^2S, \quad de_i = c dT \dots$$

Applicat° : débit dans l'1 des 3 boucles du circuit primaire d'1 réacteur nucléaire 900 MWe



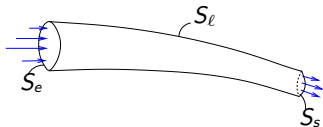
$$\iint_{S_e} \rho e_i \mathbf{\bar{v}} \cdot \mathbf{\bar{n}} d^2S + \iint_{S_s} \rho e_i \mathbf{\bar{v}} \cdot \mathbf{\bar{n}} d^2S \simeq \dot{Q}$$

$$\dot{m} [e_i(\text{sortie}) - e_i(\text{entrée})] \simeq \dot{Q}$$

$$\dot{m} c [T(\text{sortie}) - T(\text{entrée})] \simeq \dot{Q}$$

$$\text{Applicat° num. : } \dot{Q} \simeq 900 \text{ MW}$$

$$\Rightarrow \dot{m} \simeq 6 \text{ t/s}$$

Bilan d' E_c en écoulement ouvert permanent dans un tube de courant

▷ Écoulements **unidirectionnels normaux** ($\bar{\mathbf{v}} \parallel \bar{\mathbf{n}}$) en entrée et sortie

$$\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} \simeq \dot{m} \left(\frac{1}{2} \alpha_s V_s^2 - \frac{1}{2} \alpha_e V_e^2 \right),$$

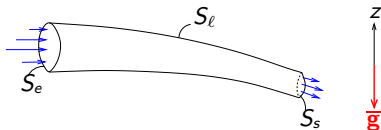
$$V_e = \frac{1}{A_e} \iint_{S_e} v \, d^2S = \frac{q}{A_e} = \text{vitesse débitante sur } S_e,$$

$$\langle v^3 \rangle_e = \frac{1}{A_e} \iint_{S_e} v^3 \, d^2S = \text{vitesse cubique moyenne sur } S_e,$$

$$\alpha_e = \frac{\langle v^3 \rangle_e}{V_e^3} = \text{coefficient d'énergie cinétique sur } S_e,$$

idem sur S_s .

Bilan d' E_c en écoulement ouvert permanent dans un tube de courant



- ▷ Sections d'entrée-sortie **peu étendues dans la direction z**

$$\implies P_{\text{poids}} \simeq \dot{m}(gz_e - gz_s)$$

- ▷ Fluide parfait ou surface latérale paroi en fluide visqueux

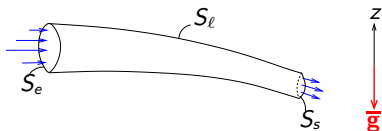
$$\implies P_{\text{surfaciques}} \simeq q(p_e - p_s)$$

$$\implies \dot{m} \left(\frac{1}{2} \alpha_s V_s^2 - \frac{1}{2} \alpha_e V_e^2 \right) \simeq \dot{m}(gz_e - gz_s) + \frac{\dot{m}}{\rho} (p_e - p_s) - P_{\text{dissipée}}$$

$$\iff -\frac{dE_c}{dt} + P_{\text{poids}} + P_{\text{surf}} = \dot{m}g \delta H = \dot{m}g (H_e - H_s) \simeq P_{\text{dissipée}}$$

$$H_e = z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_e V_e^2}{g} = \text{charge au niveau de } S_e$$

Perte de charge en écoulement ouvert permanent dans tube de courant



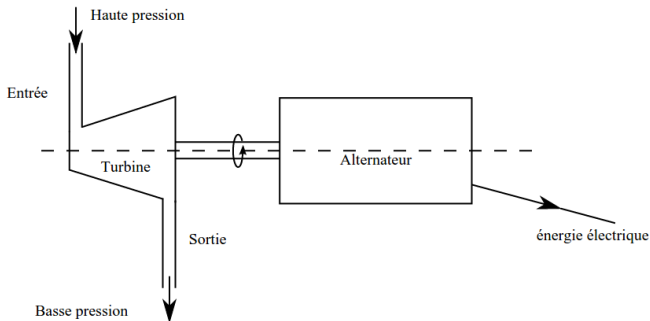
$$-\frac{dE_c}{dt} + P_{\text{poids}} + P_{\text{surf}} = \dot{m}g \delta H = \dot{m}g (H_e - H_s) \simeq P_{\text{dissipée}}$$

$$H_e = z_e + \frac{p_e}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{\alpha_e V_e^2}{g} = \text{charge au niveau de } S_e$$

$$H \simeq z + \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \equiv \ell \quad \leftrightarrow \text{ hauteur de liquide} \quad \leftrightarrow \text{ densité d'énergie}$$

$$\underbrace{\rho g H}_{\text{enthalpie totale}} \simeq \underbrace{\rho g z}_{\text{énergie potentielle de pesanteur}} + \underbrace{p}_{\text{énergie de pression}} + \underbrace{\frac{1}{2} \rho V^2}_{\text{énergie cinétique}} \equiv E/\ell^3$$

Perte de charge en écoulem^t ouvert quasi perman^t dans une turbine

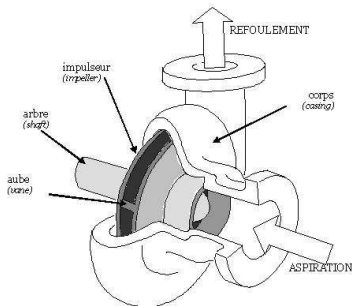


$$\dot{m}g (H_e - H_s) + P_{\text{turbine} \rightarrow \text{liquide}} \simeq 0$$

$$P_{\text{liquide} \rightarrow \text{turbine}} = P_{\text{turbine}} \simeq \dot{m}g (H_e - H_s) = \dot{m}g \delta H$$

$$P_{\text{turbine}} \simeq \dot{m}g (H_e - H_s) = \dot{m}g \delta H$$

Gain de charge en écoulement ouvert quasi permanent dans une pompe



Pompe centrifuge
[LEMEN - Wikipedia]

$$\dot{m}g (H_e - H_s) + P_{\text{pompe} \rightarrow \text{liquide}} \simeq 0$$

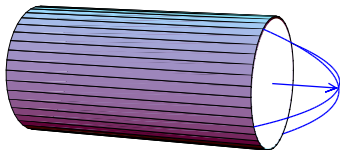
$$P_{\text{pompe} \rightarrow \text{liquide}} = P_{\text{pompe}} \simeq \dot{m}g (H_s - H_e) = \dot{m}g H_{\text{pompe}}$$

avec H_{pompe} la **hauteur manométrique**

▷ Aspiration et refoulement dans conditions similaires

$$\Rightarrow \boxed{P_{\text{pompe}} = \dot{m}g H_{\text{pompe}} = q(p_s - p_e)} \iff \boxed{p_s - p_e = \rho g H_{\text{pompe}}}$$

Perte de charge en écoulement^t ouvert perman^t dans un tuyau ?



$$\delta H = \frac{\delta \hat{p}}{\rho g} = \frac{P_{\text{dissipée}}}{\dot{m}g} = ?$$

Recours au théorème π (ou de Vaschy-Buckingham)
de l'analyse dimensionnelle !

Théorème π (VB) : réduction de $\phi = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$

- Soit un système physique dépendant de **paramètres de contrôle** $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ numérotés d. s. q. les 3 premières colonnes de la **matrice des exposants des dimensions**

| | | | | | | | |
|-----|------------|------------|------------|---------|------------|---------|------------|
| | ϕ_1 | ϕ_2 | ϕ_3 | \dots | ϕ_k | \dots | ϕ_n |
| m | α_1 | α_2 | α_3 | \dots | α_k | \dots | α_n |
| l | β_1 | β_2 | β_3 | \dots | β_k | \dots | β_n |
| t | γ_1 | γ_2 | γ_3 | \dots | γ_k | \dots | γ_n |

forment une matrice 3×3 inversible

$\iff \phi_1, \phi_2, \phi_3$ **grandeurs fondamentales**

dimensionnellement indépendantes.

- **Adimensionner** les autres **paramètres de contrôle** en introduisant des **groupements π**

$$\pi_k = \frac{\phi_k}{\phi_1^{a_k} \phi_2^{b_k} \phi_3^{c_k}} \equiv 1 \text{ pour } k = 4, \dots, n.$$

Théorème π (VB) : réduction de $\phi = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$

- **Adimensionner** les autres **paramètres de contrôle** en introduisant des **groupements π**

$$\pi_k = \frac{\phi_k}{\phi_1^{a_k} \phi_2^{b_k} \phi_3^{c_k}} \equiv 1 \quad \text{pour } k = 4, \dots, n.$$

- **Adimensionner** de même la **grandeur physique dépendante d'intérêt ϕ** , i.e. introduire

$$\pi_0 = \frac{\phi}{\phi_1^{a_0} \phi_2^{b_0} \phi_3^{c_0}} \equiv 1.$$

- Alors la relation $\phi = f(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ doit pouvoir s'écrire

$$\pi_0 = F(\text{mes}(\phi_1), \text{mes}(\phi_2), \text{mes}(\phi_3), \pi_4, \dots, \pi_n)$$

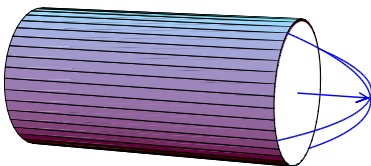
$$\pi_0 = F\left(\frac{\phi_1}{\Phi_1}, \frac{\phi_2}{\Phi_2}, \frac{\phi_3}{\Phi_3}, \pi_4, \dots, \pi_n\right)$$

$$\pi_0 = F(\pi_4, \dots, \pi_n).$$

Application aux écoulements en tuyau droit à section circulaire

$$\delta H = \frac{\delta \hat{p}}{\rho g} = \frac{P_{\text{dissipée}}}{\dot{m}g} = ?$$

On rappelle que l'écoulement **laminaire** a une **forme universelle**, celle de l'**écoulement de Hagen-Poiseuille** (cf. l'ex. 1.4) :

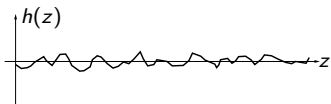


$$\bar{\mathbf{V}} = W_0 (1 - 4r^2/d^2) \bar{\mathbf{e}}_z, \quad \hat{p} = \hat{p}_0 - Gz, \quad W_0 = Gd^2/(16\eta).$$

Ici, **étude d'écoulements généraux éventuellement turbulents...**

Application aux écoulements en tuyau droit à section circulaire

- ▶ 3 grandeurs fondamentales : **diamètre** d , **masse volumique** ρ , **vitesse débitante** V ;
- ▶ 3 paramètres adimensionnels : **longueur réduite** $\pi_4 = L/d \gg 1$, **rugosité relative des parois** $\pi_5 = \varepsilon = e/d$ avec $e = \sqrt{\langle h^2 \rangle_z}$



inverse de la viscosité réduite $\pi_6 = \nu/(Vd)$
nombre de Reynolds $1/\pi_6 = Re = Vd/\nu$.

- ▶ Grandeur dépendante **perte de pression**

$$\pi_0 = \frac{\delta \hat{p}}{\rho V^2} = \mathcal{F}(\pi_4, \pi_5, 1/\pi_6) = \mathcal{F}\left(\frac{L}{d}, \varepsilon, Re\right) = \frac{1}{2} \frac{L}{d} \lambda(Re, \varepsilon),$$

λ **coefficient de perte de charge**,

$$\delta H = \frac{\delta \hat{p}}{\rho g} = \frac{V^2}{2g} \frac{L}{d} \lambda(Re, \varepsilon)$$

Pertes de charge en écoulements en tuyau droit

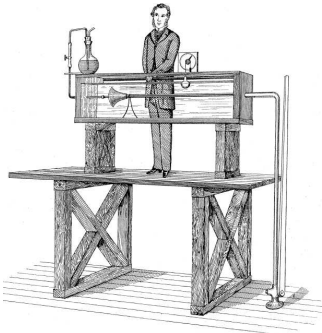
Avec λ **coefficient de perte de charge** :

$$\delta H = \frac{\delta \hat{p}}{\rho g} = \frac{V^2}{2g} \frac{L}{d} \lambda(Re, \varepsilon) = \frac{P_{\text{dissipée}}}{\dot{m}g}$$

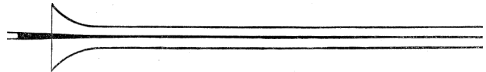
- ▶ Paramètres adimensionnels Re et ε égaux \iff systèmes **similaires**.
- ▶ En écoulement **laminaire**, $\lambda = 64/Re$,
comme on peut le démontrer de deux manières, cf. la q. 5 de l'ex. 1.4...

Transition vers la turbulence en écoulements en tuyau droit

Expérience de Reynolds



$q < q_t$:



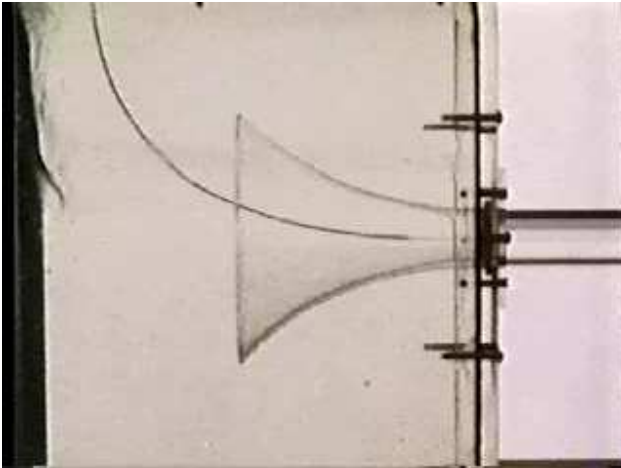
$q > q_t$:



[Reynolds 1883 An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philos. Trans. R. Soc London* **174**, 935]

Transition vers la turbulence en tuyau : expérience de Reynolds

Cas laminaire $q < q_t$:

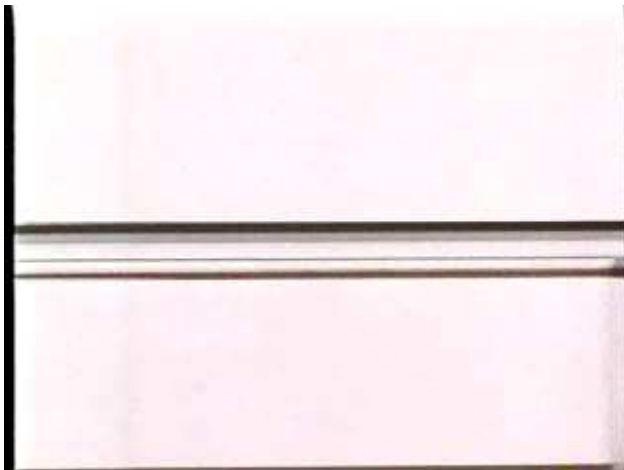


[Educational Development Center

Homsy et al. 2004 DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Cambridge University Press]

Transition vers la turbulence en tuyau : expérience de Reynolds

Cas laminaire $q < q_t$:

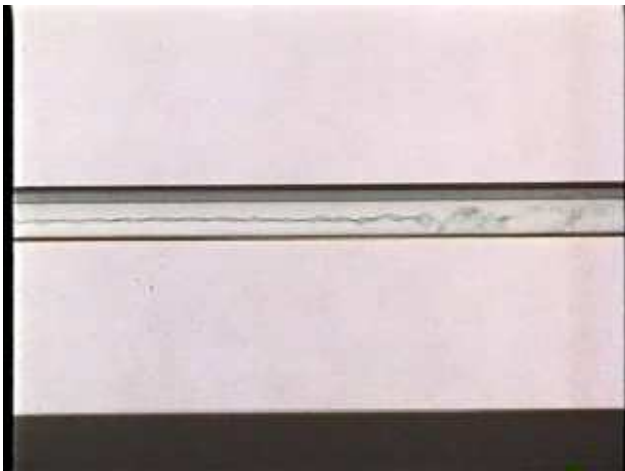


[Educational Development Center

Homsy et al. 2004 DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Cambridge University Press]

Transition vers la turbulence en tuyau : expérience de Reynolds

Cas avec **transition vers la turbulence** $q > q_t$:

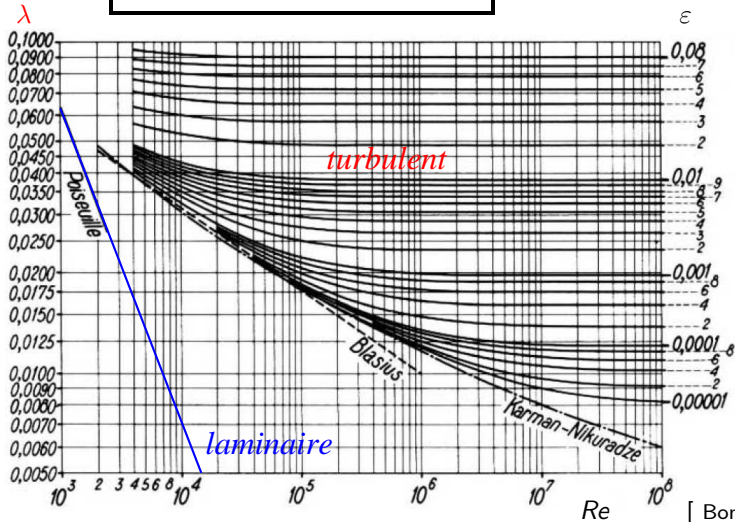


[Educational Development Center

Homsy et al. 2004 DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Cambridge University Press]

Pertes de charge en écoulements en tuyau droit

$$\delta H = \frac{\delta \hat{p}}{\rho g} = \frac{V^2}{2g} \frac{L}{d} \lambda(Re, \epsilon) = \frac{P_{\text{dissipée}}}{\dot{m}g}$$

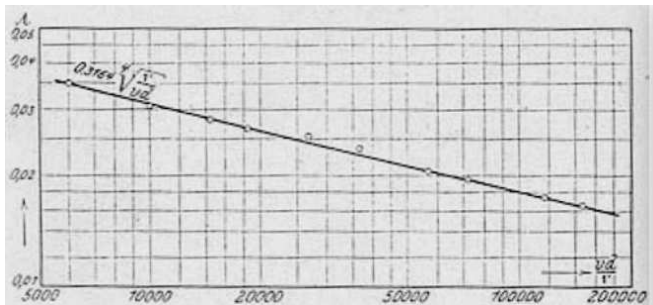


Pertes de charge en écoulements en tuyau droit :
diverses corrélations existent, par exemple celle de Blasius :

$$\delta H = \frac{\delta \hat{p}}{\rho g} = \frac{V^2}{2g} \frac{L}{d} \lambda(Re, \varepsilon) = \frac{P_{\text{dissipée}}}{\dot{m}g}$$

En tuyau lisse ($\varepsilon = 0$), pour $3000 \leq Re \leq 100000$, Blasius établit en 1912 que

$$\lambda \simeq 0,316 Re^{-1/4} .$$



[Hager 2003 Blasius: A life in research and education. *Expe. Fluids*]

Éléments théoriques sur la transition vers la turbulence

Soit une petite perturbation $\bar{\mathbf{v}}$ de la vitesse laminaire $\bar{\mathbf{V}}$.

Au début elle évolue suivant l'équation de Navier-Stokes linéarisée (simplifiée) :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \underbrace{\left(\overline{\nabla \mathbf{V}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} + \left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}}}_{\text{termes d'advection}} = \underbrace{\nu \overline{\Delta \bar{\mathbf{v}}}}_{\text{terme visqueux}} .$$

Si le terme visqueux domine,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} \simeq \nu \overline{\Delta \bar{\mathbf{v}}} ,$$

la perturbation **diffuse** donc est **amortie**.

Si les termes d'advection dominent,

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} \simeq - \left(\overline{\nabla \mathbf{V}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} - \left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}} ,$$

la perturbation peut être **amplifiée** \longleftrightarrow **instabilité** !

Éléments théoriques sur la transition vers la turbulence dans un tuyau

Éq. de Navier-Stokes linéarisée pour une petite perturbation $\bar{\mathbf{v}}$ de $\bar{\mathbf{V}}$:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \underbrace{\left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} + \left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}}}_{\text{termes d'advection}} = \underbrace{\nu \overline{\Delta \bar{\mathbf{v}}}}_{\text{terme visqueux}} .$$

On s'attend à avoir transition lorsque

$$\text{odg}(\text{termes d'advection}) \gg \text{odg}(\text{terme visqueux})$$

$$\iff \frac{V}{d} \nu \gg \nu \frac{\nu}{d^2}$$

$$\iff Re = \frac{\text{odg}(\text{termes d'advection})}{\text{odg}(\text{terme visqueux})} = \frac{Vd}{\nu} \gg 1 .$$

De fait, **dans un tuyau**, seul Re détermine le **régime d'écoulement** :

$Re \lesssim 2000 \iff$ écoulement **laminaire**,

$4000 \lesssim Re \iff$ écoulement **turbulent**.

Bémols : malheureusement la transition vers la turbulence est plus compliquée

On ne peut la décrire à partir de l'étude de l'éq. de Navier-Stokes linéarisée pour une petite perturbation $\bar{\mathbf{v}}$ de $\bar{\mathbf{V}}$:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{V}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} + \left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{V}} + \left(\overline{\nabla \bar{\mathbf{v}}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} = - \nabla p + \nu \Delta \bar{\mathbf{v}}$$

- \exists perturbation de pression !
- le terme fortement non linéaire joue un rôle crucial !
- l'amplitude des perturbations joue aussi !...