

Séance 3 de

**Mécanique des fluides 2 :
couches limites**

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mf>

Cours :**1 Équations de Prandtl**

Forme « dégénérée simplifiée » des équations de Navier-Stokes,
valable dans les **couches limites**, impliquant certaines relations d'OdG

2 Application au cas d'une plaque plane : couche limite de Blasius

Réduction de la forme de la solution (fonction courant, var. séparées, etc...)

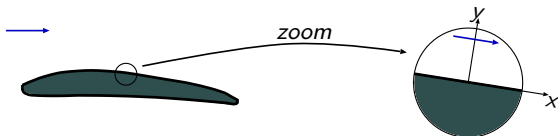
⇒ EDO sur la fonction de couche limite...

Premières propriétés : auto - similarité, validité, **transition vers la turbulence**

TD : Pb. 4.1 :**Calcul numérique de la couche de Blasius et étude de ses propriétés**

en utilisant **Matlab** sur vos PC portables pour notamment résoudre la fameuse EDO !..

1 Éq. de Navier-Stokes dans une couche limite 2D stationnaire



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{Inc})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{NS}_x)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{NS}_y)$$

Hypothèses :

- Écoulement extérieur rapide, sur l'échelle L des variations dans la direction x ,

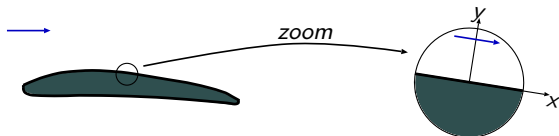
$$Re_{\text{extérieur}} = \frac{UL}{\nu} \gg 1.$$

- Couche limite** d'épaisseur dans la direction y

$$\delta \ll L,$$

dans laquelle $\text{OdG}(\text{effets visqueux}) = \text{OdG}(\text{effets inertiels})$.

1 Équations de Prandtl d'une couche limite 2D stationnaire



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{Inc})$$

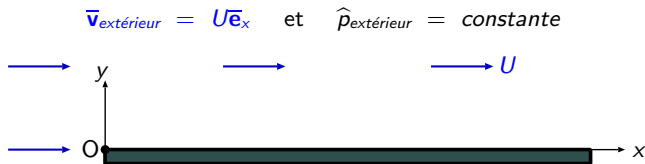
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{P}_x)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \quad (\text{P}_y)$$

avec

$$u \sim U, \quad v \sim \frac{\delta}{L} U, \quad \frac{U^2}{L} \sim \frac{\nu U}{\delta^2} \iff \delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re_L}} = \sqrt{\frac{\nu L}{U}}.$$

2 Couche limite de Blasius au dessus d'une plaque plane



Coordonnée transverse réduite $\zeta = \frac{y}{\delta}$ avec $\delta = \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$

Fonction courant à variables séparées $\psi(x,y) = P(x) f(\zeta) = \sqrt{\nu U x} f(\zeta)$

$$\implies u = Uf'(\zeta) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} [\zeta f'(\zeta) - f(\zeta)]$$

Équation de Prandtl (P_x) \implies **équation de Blasius**

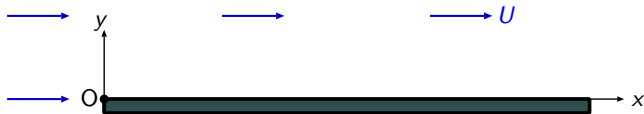
$$2f'''(\zeta) + f(\zeta)f''(\zeta) = 0$$

adhérence : $f(0) = f'(0) = 0$, raccord écoulement extérieur : $f'(+\infty) = 1$.

Solution **auto-similaire**

$$(x, y) \longmapsto (x', y') = (\alpha_x x, \alpha_y y) \iff (u, v) \longmapsto (u', v') = (\alpha_u u, \alpha_v v) .$$

2 Couche limite de Blasius au dessus d'une plaque plane

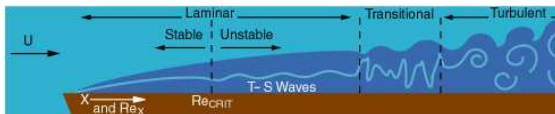


Condition de validité du modèle :

$$\delta(x) \ll x \iff Re_{\text{extérieur}} = \frac{Ux}{\nu} \gg 1.$$

NB : $Re_{\text{extérieur}} = Re_{\text{local}}^2$ avec $Re_{\text{local}} = \frac{U\delta}{\nu}$.

Attention, si Re trop grand : **transition vers la turbulence !**



Via, souvent, l'amplification d'**ondes de Tollmien-Schlichting**, pour

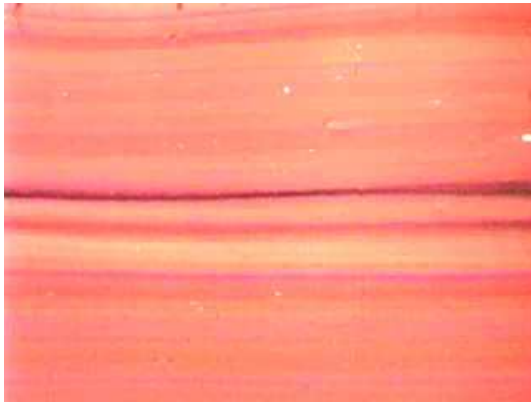
$$Re_{\text{local}} \geq 300 \iff Re_{\text{extérieur}} \geq 9 \cdot 10^4.$$

[DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004]

2 Couche limite de Blasius laminaire

Expérience de l'ONERA avec injection d'une nappe de colorant.

Visualisation près du bord d'attaque, $Re_{\text{extérieur}} \simeq 6 \cdot 10^4$:



[DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004]

2 Couche limite de Blasius en transition vers la turbulence

Expérience de l'ONERA avec injection d'une nappe de colorant.

Visualisation plus loin du bord d'attaque :



[DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004]

2 Couche limite de Blasius en **transition vers la turbulence**

Expérience de l'ONERA avec injection d'une nappe de colorant.

Visualisation encore plus loin du bord d'attaque :



[DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004]

+ d'éléments sur les **ondes TS** et la **transition vers la turbulence**
dans le module 3A *Transition to turbulence* !..

TD : Pb. 4.1 : Calcul et étude de la couche limite de Blasius

$$\bar{\mathbf{v}}_{\text{extérieur}} = U\bar{\mathbf{e}}_x \quad \text{et} \quad \hat{p}_{\text{extérieur}} = \text{constante}$$



Coordonnée transverse réduite $\zeta = \frac{y}{\delta}$ avec $\delta = \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$

$$u = Uf'(\zeta) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}[\zeta f'(\zeta) - f(\zeta)]$$

Équation de Prandtl (P_x) \implies **équation de Blasius**

$$2f'''(\zeta) + f(\zeta)f''(\zeta) = 0$$

adhérence : $f(0) = f'(0) = 0$, raccord écoulement extérieur : $f'(+\infty) = 1$.

Chargé de TD	Salle
Mathieu Jenny	P303-305
Hervé Combeau	P306
Jean-Sébastien Kroll-Robotin	P304

TD suivant

Mercredi 19 décembre :

- **TD de 15h15 à 18h sur Matlab :**

Pb. 4.2 *Couches limites de Falkner-Skan*

Travail préparatoire : lire très attentivement l'énoncé, et résoudre par vous-même les questions 1.1 et 1.2.

- **« Cours » de 18h à 18h15 :**

Éléments de solution du TD

Compléments concernant essentiellement le décollement des couches limites.