

## Séance 2 de **Mécanique des fluides 2 : ondes d'interface**

Emmanuel Plaut, Hervé Combeau, Jean-Sébastien Kroll-Rabotin

Page web : <http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mf>

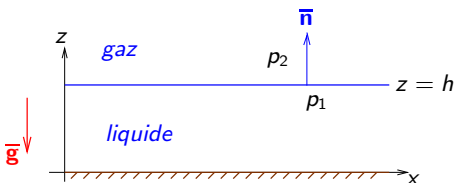
### Buts :

- les **ondes** elles-mêmes...
- continuer à pratiquer des **analyses linéaires de stabilité** :  
cours : **ondes neutres**  
TD : **ondes amplifiées**  $\longleftrightarrow$  **instabilités !**
- manipuler des **conditions d'interface**  
 $\longleftrightarrow$  introduction aux **écoulements diphasiques**

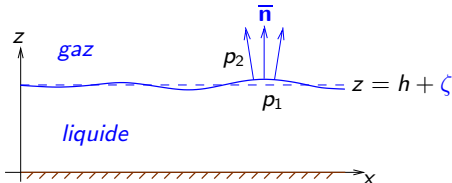
**NB** : dorénavant on considérera toujours des **fluides incompressibles**.

## Ondes d'interface : système étudié

Configuration de base :



Configuration perturbée :



- Système 2D  $xz$
- Fluides parfaits initialement au repos en écoulements potentiels
- Gaz supérieur non pesant

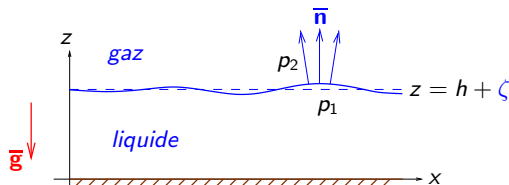
⇒ **second théorème de Bernoulli :**

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho g H = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{\vec{v}^2}{2} + \hat{p} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{\vec{v}^2}{2} + p + \rho g z \text{ est indépendant de } \vec{x}$$

dans tout le domaine du fluide

⇒ dans le gaz 2 :  $p_2 = p_0$  ⇒ calculs dans le liquide 1 seulement.

## Ondes d'interface : mode normal de perturbation dans le cadre de l'analyse linéaire de stabilité



Perturbation de l'interface :

$$\zeta = \zeta(x,t) = \text{Re}[A \exp(ikx + \sigma t)] \quad \text{avec } A \ll \text{petite},$$

$k$  nombre d'onde,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  longueur d'onde.

## Ondes d'interface : mode normal de perturbation dans le cadre de l'analyse linéaire de stabilité

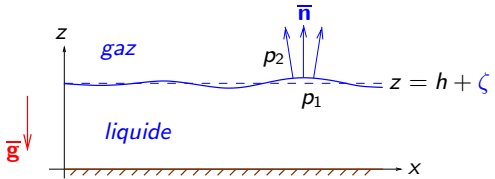
Pour simplifier,  $A \in \mathbb{R}$  ;  $\sigma = \sigma(k) = \sigma_r + i\sigma_i \Rightarrow \zeta = A \cos(kx + \sigma_i t) \exp(\sigma_r t)$

- $\sigma_r > 0 \leftrightarrow$  mode **amplifié** ; configuration de base **instable** ;  
 $\sigma_r$  taux de croissance ;
- $\sigma_r = 0 \leftrightarrow$  mode **neutre** ; configuration de base marginalement stable vis-à-vis de ce mode ;
- $\sigma_r < 0 \leftrightarrow$  mode **amorti** ; configuration de base stable vis-à-vis de ce mode ;  
 $-\sigma_r$  taux d'amortissement.
- $\sigma_i > 0, \sigma_i = \omega \leftrightarrow$  **onde gauche** de vitesse de phase  $-\omega/k$  ;
- $\sigma_i = 0 \leftrightarrow$  mode **non propagatif** ;
- $\sigma_i < 0, \sigma_i = -\omega \leftrightarrow$  **onde droite** de vitesse de phase  $\omega/k$  ;  
 $|\omega|$  fréquence angulaire.

Modes normaux qui permettent d'écrire aux temps courts la réponse (linéaire) du système à n'importe quelles « perturbations initiales » :

$$\zeta(x, t = 0) = \sum_k A(k) \exp(ikx) \implies \zeta(x, t > 0) = \sum_k A(k) \exp(ikx + \sigma(k)t).$$

## Ondes d'interface : mode normal de perturbation dans le cadre de l'analyse linéaire de stabilité



**Perturbation de l'interface :**  $\zeta = \zeta(x,t) = \text{Re}[A \exp(ikx + \sigma t)]$ .

Forme de mode normal du **potentiel** :  $\phi = \text{Re}[f(z) \exp(ikx + \sigma t)]$ .

Incompressibilité :

$$\Delta\phi = 0 \iff -k^2 f + f'' = 0 \iff f = a_+ e^{kz} + a_- e^{-kz} .$$

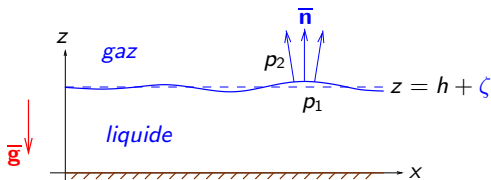
CL fond imperméable :  $v_z(z=0) = 0 \implies f(z) = a \cosh(kz)$ .

**Cond. d'interface cinématique : pas de transfert de masse :**

1 particule fluide qui s'y trouve y reste tjrs : **v normale fluide = v normale interface**

$$z = h + \zeta \implies \frac{d}{dt}[z - (h + \zeta)] = 0 \iff v_z = \frac{d\zeta}{dt} \iff a = \frac{\sigma A}{k \sinh(kh)} .$$

## Ondes d'interface : mode normal de perturbation dans le cadre de l'analyse linéaire de stabilité



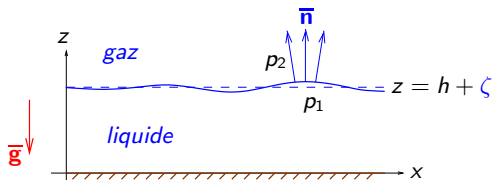
**Perturbation de l'interface :**  $\zeta = \zeta(x,t) = \text{Re}[A \exp(ikx + \sigma t)]$ .

**Potentiel :**  $\phi = \text{Re}\left\{A \frac{\sigma \cosh(kz)}{k \sinh(kh)} \exp(ikx + \sigma t)\right\}$  asservi à la dyn. de l'interface !

**Pression dans le liquide :**

- au repos :  $p_1 = p_0 + \rho_1 g(h - z)$
- avec perturbation :  $p_1 = p_0 + \rho_1 g(h - z) + p'_1$
- **second théorème de Bernoulli**  $\implies p'_1 = -\rho_1 \frac{\partial \phi}{\partial t}$  asservi idem !

## Ondes d'interface : mode normal de perturbation dans le cadre de l'analyse linéaire de stabilité



Cond. d'interface dynamique :

interface en équilibre mécanique local avec **tension superficielle** :

$$p_1 - p_2 = \gamma \operatorname{div}(\bar{\mathbf{n}}) \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{n}} = \frac{\nabla[z - (h + \zeta)]}{\|\nabla[z - (h + \zeta)]\|} = \bar{\mathbf{e}}_z - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \bar{\mathbf{e}}_x + O(A^2)$$

$$p_1 - p_2 = -\gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + O(A^2)$$

Après linéarisation à l'ordre  $A$  :

$$\rho_1 g A + \frac{\rho_1 \sigma^2 A}{k \tanh(kh)} = -\gamma k^2 A.$$

## Ondes d'interface : équation caractéristique

$$\rho g A + \frac{\rho \sigma^2 A}{k \tanh(kh)} = -\gamma k^2 A$$

Indépendante de  $A$ , normal pour des modes « linéaires » !..

$$\rho \sigma^2 = -\rho g k \tanh(kh) - \gamma k^3 \tanh(kh)$$

$\Rightarrow \sigma \in i\mathbb{R}$ ,  $\sigma = -i\omega$  avec  $\omega \in \mathbb{R} \iff$  **ondes neutres.**

**Vitesse de phase**  $c = \omega/k$  donnée par la relation

$$c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \underbrace{\frac{g}{k} \tanh(kh)}_{\text{terme de gravité}} + \underbrace{\frac{\gamma k}{\rho} \tanh(kh)}_{\text{terme capillaire}} \quad (*)$$

Vitesse de phase **dépend de**  $k$  donc ces ondes sont **dispersives**,  
 la relation (\*) est une « **relation de dispersion** ».



## Relation de dispersion

$$c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \underbrace{\frac{g}{k} \tanh(kh)}_{\text{terme de gravité}} + \underbrace{\frac{\gamma k}{\rho} \tanh(kh)}_{\text{terme capillaire}} \quad (*)$$

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) \left(1 + \frac{k^2}{k_c^2}\right) = \frac{g}{k} \tanh(kh) \left(1 + 4\pi^2 \frac{\ell_c^2}{\lambda^2}\right) \quad (*)$$

avec  $k_c = 1/\ell_c$

$\ell_c = \text{longueur capillaire} = \sqrt{\gamma/(\rho g)} = 2,7 \text{ mm si interface eau-air}$

Si  $k \ll k_c$  i.e.  $\lambda \gg \ell_c$  : **ondes de gravité**

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh)$$

Si  $k \gg k_c$  i.e.  $\lambda \ll \ell_c$  : **ondes capillaires**

$$c^2 = \frac{\gamma k}{\rho} \tanh(kh)$$

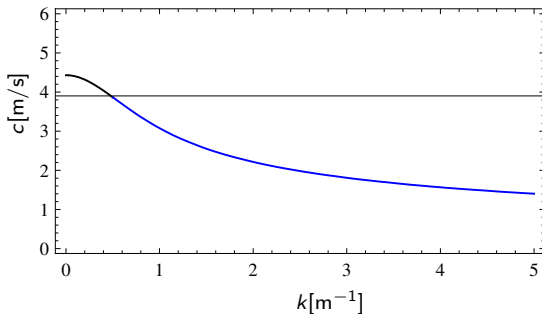
## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = g \frac{\tanh(kh)}{k} \simeq gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$

$$\simeq \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas d'un bassin ou près de la plage :  $h = 2$  m :

$$\sqrt{gh} = 4,4 \text{ m/s} :$$



Fréquences correspondantes ?

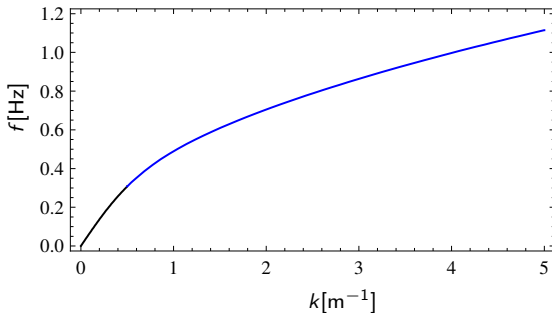
## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = g \frac{\tanh(kh)}{k} \approx gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$

$$\approx \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas d'un bassin ou près de la plage :  $h = 2$  m :

$$f = ck/(2\pi) = \sqrt{gk \tanh(kh)}/(2\pi) :$$



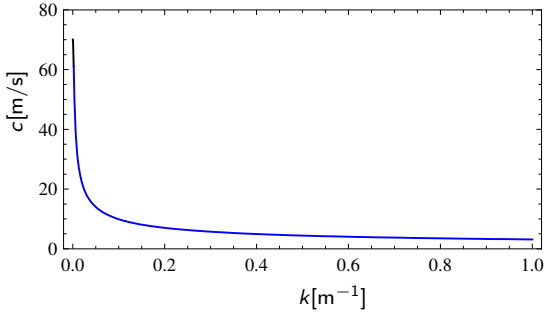
$f(k)$  strictement croissante est **bijective** : 1 fréquence  $\leftrightarrow$  1 longueur d'onde.

## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = g \frac{\tanh(kh)}{k} \approx gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$
$$\approx \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas de la mer ou de l'océan :  $h = 500$  m :

$$\sqrt{gh} = 70 \text{ m/s} :$$



Quid de **grandes ondes excitées par un mouvement de terrain de grande échelle ?..**

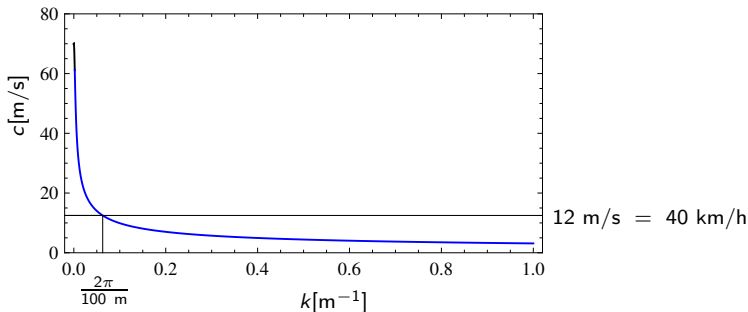
## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = g \frac{\tanh(kh)}{k} \simeq gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$

$$\simeq \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas de la mer ou de l'océan :  $h = 500$  m :

$$\sqrt{gh} = 70 \text{ m/s} :$$



Regardons plutôt ici la « **houle** » !..

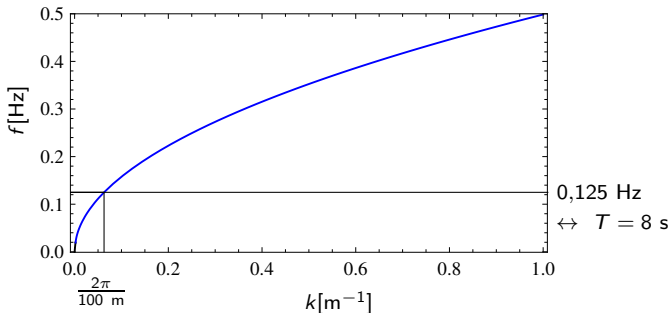
## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = g \frac{\tanh(kh)}{k} \approx gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$

$$\approx \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas de la mer ou de l'océan :  $h = 500$  m :

$$f = ck/(2\pi) = \sqrt{gk \tanh(kh)}/(2\pi) :$$



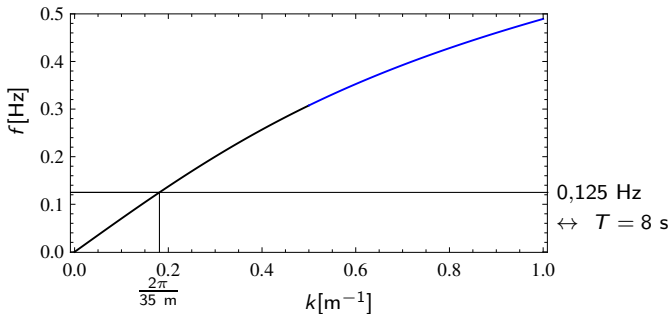
## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) \simeq gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$

$$\simeq \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas d'un bassin ou près de la plage :  $h = 2$  m :

$$f = ck/(2\pi) = \sqrt{gk \tanh(kh)}/(2\pi) :$$



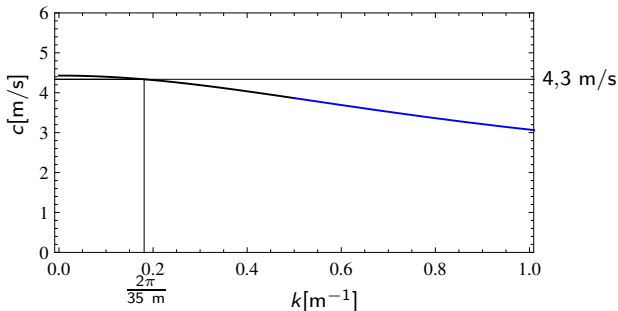
## Cas des ondes de gravité $k \ll k_c$ i.e. $\lambda \gg \ell_c$

$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) \simeq gh \text{ en eau peu profonde si } kh \ll 1 \text{ i.e. } h \ll \lambda$$

$$\simeq \frac{g}{k} \text{ en eau profonde si } kh \gg 1 \text{ i.e. } h \gg \lambda$$

Cas d'un bassin ou près de la plage :  $h = 2$  m :

$$\sqrt{gh} = 4,4 \text{ m/s} :$$

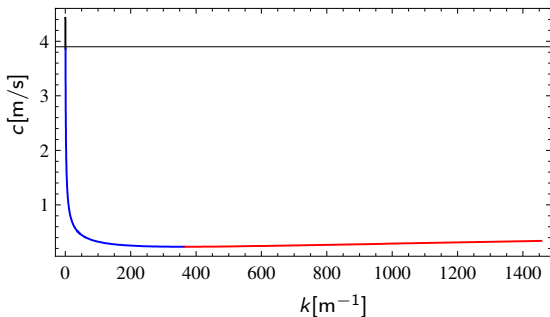




## Vers les ondes capillaires

$$c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \underbrace{\frac{g}{k} \tanh(kh)}_{\text{terme de gravité}} + \underbrace{\frac{\gamma k}{\rho} \tanh(kh)}_{\text{terme capillaire}}$$

Pour les voir il faut aller très haut en  $k$ ,  
 toujours dans le cas d'un bassin ou près de la plage :  $h = 2$  m :  $\sqrt{gh} = 4,4$  m/s :



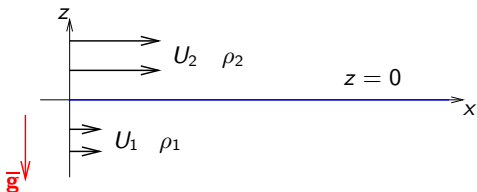


## TD de 16h30 à 18h30

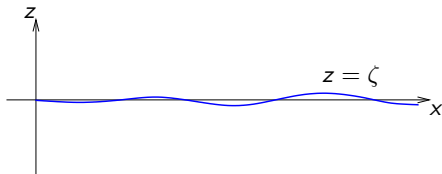
Chargé de TD	Salle
Hervé Combeau	P306
Jean-Sébastien Kroll-Rabotin	P304

### Pb 3.3 *Instabilités de Rayleigh-Taylor et Kelvin-Helmholtz*

Configuration de base :



Configuration perturbée :



Configuration avec écoulements de base, en bloc, de 2 fluides pesants

⇒ dans certains cas, certaines ondes sont **amplifiées**

⇔ configuration de base est **instable**