

# Mécanique des fluides

Emmanuel Plaut

<http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mf>

**1 Rappels sur les bases vues en séance 1**

**2 Équation de Navier-Stokes**

**3 Retour sur le calcul tensoriel en coordonnées cylindriques**

Sur l'ex. 1.4 *Écoulement laminaire en tuyau*, objet du TD !..

# 1 Rappel : plan du module

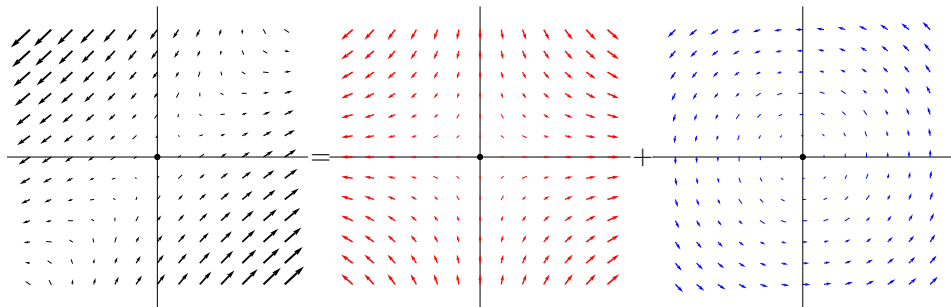
Séance	Contenu : cours - TD	Polys
S1 - S2 - S3 Aéro 1	<b>Bases</b> : cinématique → bilan d'énergie interne - dissipation <i>Poussée moteur fusée - Écoulements en tuyau - de Couette cylindrique</i>	MMC MF1
S4 - S5	<b>Pertes et gains de charge</b> - analyse dimensionnelle appliquée <i>Similitude turbopropulseur - Vidange d'un réservoir (expérience de TD)</i>	MMC MF1
S6 - S7	<b>Fluides parfaits</b> : écoulements potentiels, applications à l'aéro (Aéro 2) <i>STEP - Écoulements oscillants en canal</i>	MMC MF1
S8	<b>Fluides parfaits</b> : ondes interfaciales - analyse de stabilité <i>Instabilités de Kelvin-Helmholtz et Rayleigh-Taylor</i>	MF1
S9	<b>Fluides parfaits</b> : ondes sonores <i>Ondes sonores planes - Coup de bélier</i>	MF1
<b>Test 1</b>	<b>lundi 31 octobre</b>	
S10 - S11	<b>Écoulements de Stokes</b> <i>Sédimentation - ascension d'une sphère</i>	MF2
S12 - S13 Aéro 3	<b>Couches limites</b> <i>Couches limites de Blasius et Falkner-Skan</i>	MF2
S14 - S15 Aéro 4	<b>Écoulements turbulents</b> <i>Ordres de grandeur - Turbulence en proche paroi - Turbulence de grille</i>	MF2
<b>Test 2</b>	<b>lundi 5 décembre</b>	
<b>Conférence</b>	<b>jeudi 19 janvier Wind Energy &amp; Turbulence par J. Peinke</b>	
<b>TP</b>	<b>fin janvier Ailes en soufflerie - Couche limite par ALD (Aéro 5)</b>	

# 1 Rappels : bases

1. Le modèle du milieu continu fluide
2. Cinématique... interprétation du tenseur des taux de déformation  $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ ...

cf. la décomposition locale du champ de vitesse :

$$d\overline{\mathbf{v}} = \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} = \underbrace{\overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}}_{\text{déformation}} + \underbrace{\frac{1}{2} \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} \wedge d\overline{\mathbf{x}}}_{\text{rotation}}$$



# 1 Rappels : bases

## 3. Bilan de masse global

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho d^3x = \iiint_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{\mathbf{v}}) \right] d^3x = 0$$

et local

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{\mathbf{v}}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0$$

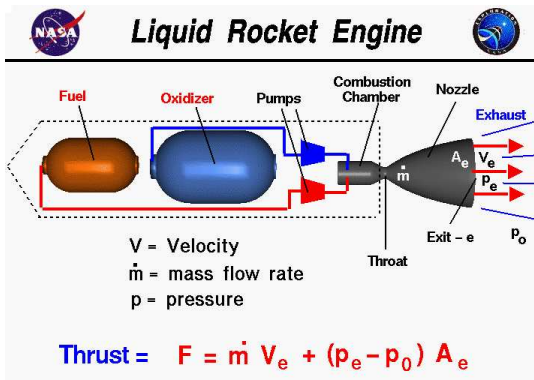
d'où formule de transport d'1 quantité définie par densité massique

$$E = \iiint_{D_t} \rho e d^3x \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \iiint_{D_t} \rho \frac{de}{dt} d^3x$$

# 1 Rappels : bases

## 4. Bilan de quantité de mouvement

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{D_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{D_t} \frac{\partial(\rho\bar{\mathbf{v}})}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial D_t} \rho\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S = \sum \bar{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$$



# 1 Rappels : bases

## 5. Bilan dynamique global

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{D_t} \bar{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} d^3x + \iint_{\partial D_t} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\mathbf{n}} d^2S$$

et local

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \bar{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} + \bar{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

## 6. Loi de comportement des fluides newtoniens incompressibles

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = -p\bar{\mathbf{1}} + 2\eta\bar{\mathbf{D}}$$

(compressibles dans le poly !)

→ dans la loi locale : équation de Navier-Stokes !

## 2 Équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \bar{\mathbf{g}} - \bar{\nabla} p + \eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}}$$

soit avec  $\hat{p} = p + \rho g z$

$$\underbrace{\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt}}_{\text{termes inertiels}} = \rho \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left( \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}} \right] = \underbrace{-\bar{\nabla} \hat{p}}_{\text{terme de pression}} + \underbrace{\eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}}}_{\text{terme visqueux}}$$

$$\text{Nombre de Reynolds} = Re = \frac{\rho \left( \bar{\nabla} \bar{\mathbf{v}} \right) \cdot \bar{\mathbf{v}}}{\eta \bar{\Delta} \bar{\mathbf{v}}} = \frac{T_{\text{visqueux}}}{T_{\text{advection}}} = \frac{L^2/\nu}{L/V} = \frac{VL}{\nu}$$

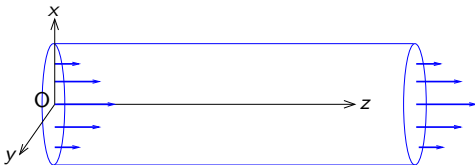
Équation d'ordre 2 en espace : condition limite à une paroi :

$$\text{adhérence à la paroi : } \bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{\mathbf{v}}_{\text{paroi}}(\bar{\mathbf{x}}, t) .$$

### 3 Équation de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques ?

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = - \nabla \hat{p} + \eta \overline{\Delta \bar{\mathbf{v}}}$$

Exemple : écoulement laminaire dans un tuyau (ex. 1.4) :



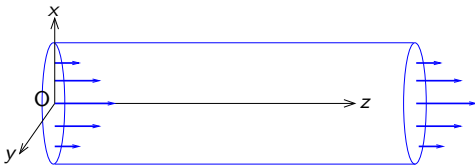
Par symétries :  $\bar{\mathbf{v}} = v(r) \bar{\mathbf{e}}_z \dots$



## TD : Ex. 1.4 : Éléments de solution

Bilan de quantité de mouvement pour un écoulement laminaire en tuyau :

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{D_t} \rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{D_t} \frac{\partial(\rho\bar{\mathbf{v}})}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial D_t} \rho\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) d^2S = \sum \bar{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$$



$$\bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{F}}_{\text{pressions entrée sortie}} + \bar{\mathbf{F}}_{\text{frottements visqueux latéraux}}$$

$$\iff \delta p \pi a^2 = GL \pi a^2 = \tau_p 2\pi a L .$$