Séance 2 de $\boxed{\text{Mécanique des fluides}}$

E. Plaut

http://emmanuelplaut.perso.univ-lorraine.fr/mf

1 Retour sur certaines bases vues en séance 1

2 Équation de Navier-Stokes

3 Retour sur le calcul tensoriel en coordonnées cylindriques

Sur l'ex. 1.4 *Écoulement laminaire en tuyau*, objet du TD !..

1 Bases : bilans de masse - formule de transport

Bilan global

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{\Omega_t} \rho \, d^3x = \iiint_{\Omega_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \overline{\mathbf{v}})\right] d^3x = 0$$

et local

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \overline{\mathbf{v}}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \, \mathrm{div}\overline{\mathbf{v}} = 0}$$

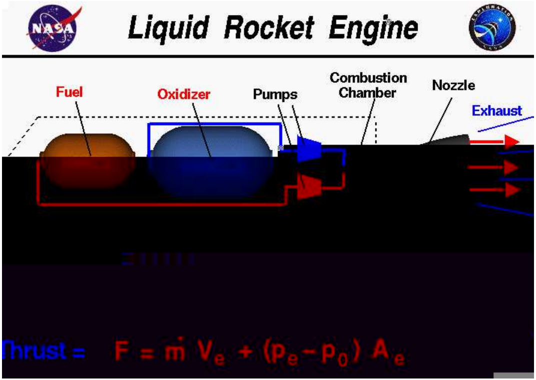
$\Longrightarrow$ formule de transport d'1 quantité définie par densité massique

$$E = \iiint_{\Omega_t} \rho e \, d^3x \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{dE}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{de}{dt} \, d^3x}$$

1 Bases : bilan global de quantité de mouvement

$$\frac{d\overline{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} d^3x = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial(\rho\overline{\mathbf{v}})}{\partial t} d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \rho\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{v}}\cdot\overline{\mathbf{n}}) d^2S = \sum \overline{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$$

cf. ex. 1.1 Poussée d'un moteur fusée :



1 Bases : bilans dynamiques

Bilan global

$$\frac{d\overline{\mathbf{p}}}{dt} = \iiint_{\Omega_t} \overline{\mathbf{f}}_{\text{volumique}}\ d^3x + \iint_{\partial\Omega_t} \overline{\overline{\sigma}} \cdot \overline{\mathbf{n}}\ d^2S$$

et local

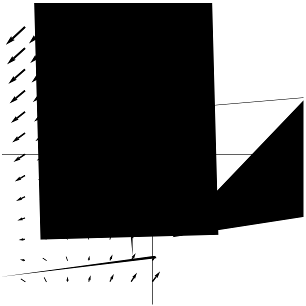
$$\boxed{\rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \overline{\mathbf{f}}_{\text{volumique}} + \overline{\mathbf{div}}\ \overline{\overline{\sigma}}}$$

1 Bases : loi de comportem^{t} d'un fluide newtonien incompressible

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\overline{\overline{\mathbf{1}}} + \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} \quad \text{avec} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}} = \text{tenseur des contraintes visqueuses} = 2\eta\overline{\overline{\mathbf{D}}}$$

Interprétation des contraintes visqueuses : analyse locale du champ de vitesse :

$$d\overline{\mathbf{v}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\overline{\mathbf{v}} \cdot d\overline{\mathbf{x}} = \underbrace{\overline{\overline{\mathbf{D}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}}_{d\overline{\mathbf{v}}_{\text{déf}}} + \underbrace{\overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} \cdot d\overline{\mathbf{x}}}_{d\overline{\mathbf{v}}_{\text{rot}}}$$



2 Équat° de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible

$$\boxed{\rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \overline{\mathbf{g}} + \overline{\mathbf{div}}\ \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\overline{\overline{\mathbf{1}}} + 2\eta \overline{\overline{\mathbf{D}}}}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \rho \overline{\mathbf{g}} - \overline{\boldsymbol{\nabla}} p + \eta \overline{\boldsymbol{\Delta}} \overline{\mathbf{v}}}$$

Cas d'un fluide newtonien **compressible** : cf. poly !..

2 Équat° de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible

$$\boxed{\rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \rho\overline{\mathbf{g}} - \overline{\nabla} p + \eta\overline{\Delta}\overline{\mathbf{v}}} \qquad \text{et} \qquad \widehat{p} = \text{pression motrice} = p + \rho g z$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\underbrace{\rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt}}_{\text{termes inertiels}} = \rho\left[\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{v}}\right)\cdot\overline{\mathbf{v}}\right] = \underbrace{-\overline{\nabla}\widehat{p}}_{\text{terme de pression}} + \underbrace{\eta\overline{\Delta}\overline{\mathbf{v}}}_{\text{terme visqueux}}}$$

Équation d'ordre 2 en espace : condition limite à une paroi :

adhérence à la paroi : $\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}},t) = \overline{\mathbf{v}}_{\text{paroi}}(\overline{\mathbf{x}},t)$.

Équation scalaire : équation d'incompressibilité :

$$\boxed{\operatorname{div}\overline{\mathbf{v}} = 0}$$

Condition limite associée à la pression :

$$p(\overline{\mathbf{x}},t) = p_{\text{donnée}}(\overline{\mathbf{x}},t) \quad \text{en} \quad \overline{\mathbf{x}} \text{ point du bord.}$$

2 Équat° de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible

$$\boxed{\underbrace{\rho\frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt}}_{\text{termes inertiels}} = \rho\left[\frac{\partial\overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\overline{\mathbf{v}}\right)\cdot\overline{\mathbf{v}}\right] = \underbrace{-\overline{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p}}_{\text{terme de pression}} + \underbrace{\eta\overline{\boldsymbol{\Delta}}\overline{\mathbf{v}}}_{\text{terme visqueux}}}$$

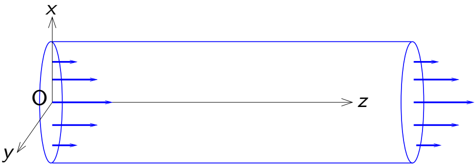
$$\text{Nombre de Reynolds} = Re = \frac{\rho\left(\overline{\overline{\boldsymbol{\nabla}}}\overline{\mathbf{v}}\right)\cdot\overline{\mathbf{v}}}{\eta\overline{\boldsymbol{\Delta}}\overline{\mathbf{v}}} = \frac{t_{\text{visqueux}}}{t_{\text{advection}}} = \frac{\ell^2/\nu}{\ell/V} = \frac{V\ell}{\nu}$$

- $Re \gg 1 \iff t_{\text{visqueux}} \gg t_{\text{advection}}$
  $\iff$ effets d'advection dominent $\iff$ termes inertiels dominent : fluides parfaits (chap. 3)
  ou écoulements turbulents aux grandes échelles (chap. 6)
- $Re \ll 1 \iff t_{\text{visqueux}} \ll t_{\text{advection}}$
  $\iff$ effets visqueux dominent $\iff$ termes visqueux dominent : écoulements de Stokes (chap. 4)

3 Équation de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques ?

$$\boxed{\rho \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} \;=\; -\;\overline{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p} \;+\; \eta\overline{\boldsymbol{\Delta}}\overline{\mathbf{v}}}$$

Exemple : écoulement laminaire dans un tuyau (ex. 1.4) :



Par symétries : $\overline{\mathbf{v}} \;=\; v(r)\,\overline{\mathbf{e}}_z$ ...

TD : Ex. 1.4 : Éléments de solution