11$^{ème}$ séance de **Mécanique des fluides**

## Écoulements de Stokes ou « écoulements dominés par la viscosité »

- ▷ **Unicité**
- ▷ **Minimum de dissipation**
- ▷ **TD**

**Bilan du test 1** (cf. la page ARCHE)

# Cours : écoulements de Stokes ou « rampants »

- **Effets visqueux** $\gg$ effets inertiels : $t_{\text{visqueux}} \ll t_{\text{convectif}},\ t_{\text{évolution}}$ .
- Gouvernés par l'**équation de Stokes**

$$\boxed{\eta \overline{\boldsymbol{\Delta}}\overline{\mathbf{v}} \ = \ \overline{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p}} \quad \text{dans} \quad D,$$

qui doit être munie de conditions limites de la forme

$$\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}) \ = \ \overline{\mathbf{v}}^{\text{donnée}}(\overline{\mathbf{x}}) \quad \text{sur} \ \ \partial D \ , \quad p(\overline{\mathbf{x}}_b) \ = \ p^{\text{donnée}} \quad \text{en} \quad \overline{\mathbf{x}}_b \in \partial D.$$

Attention on suppose toujours ici le fluide **incompressible**, donc

$$\mathrm{div}\overline{\mathbf{v}} \ = \ 0 \quad \text{dans} \quad D.$$

- **Linéarité** par rapport à $\overline{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p}$ et $\overline{\mathbf{v}}^{\text{donnée}}$

$\Longrightarrow$ **réversibilité cinématique**.

# Cours : écoulements de Stokes ou « rampants »

- **Équation de Stokes**

$$\boxed{\eta \overline{\boldsymbol{\Delta}}\overline{\mathbf{v}} \;=\; \overline{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p}} \quad \text{dans} \quad D,$$

qui doit être munie de conditions limites de la forme

$$\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}) \;=\; \overline{\mathbf{v}}^{\text{donnée}}(\overline{\mathbf{x}}) \quad \text{sur} \;\; \partial D \;, \quad p(\overline{\mathbf{x}}_b) \;=\; p^{\text{donnée}} \quad \text{en} \quad \overline{\mathbf{x}}_b \in \partial D.$$

**H** fluide **incompressible** $\mathrm{div}\overline{\mathbf{v}} \;=\; 0 \quad \text{dans} \quad D.$

- **Unicité** de la solution.

Par différence, montrer que

$$\eta \overline{\boldsymbol{\Delta}}\overline{\mathbf{v}} \;=\; \overline{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p} \quad \text{dans} \quad D, \qquad (\overline{\mathbf{S}})$$

$$\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}) \;=\; \overline{\mathbf{0}} \quad \text{sur} \;\; \partial D \;, \quad p(\overline{\mathbf{x}}_b) \;=\; 0 \quad \text{en} \quad \overline{\mathbf{x}}_b \in \partial D$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}} \quad \text{et} \quad p = 0 \quad \text{dans} \quad D \;.$$

1$^{\text{ère}}$ étape :

$$\iiint_D (\overline{\mathbf{S}}) \cdot \overline{\mathbf{v}} \; d^3x \quad \Longleftrightarrow \quad \eta \iiint_D (\overline{\boldsymbol{\Delta}}\overline{\mathbf{v}}) \cdot \overline{\mathbf{v}} \; d^3x \;=\; \iiint_D (\overline{\boldsymbol{\nabla}}\widehat{p}) \cdot \overline{\mathbf{v}} \; d^3x$$

# Cours : écoulements de Stokes ou « rampants »

$$\boxed{\eta \underline{\Delta} \underline{v} = \underline{\nabla} \widehat{p}} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad \text{dans} \quad D,$$

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}^{\text{donnée}}(\underline{x}) \quad \text{sur} \ \partial D \ , \quad p(\underline{x}_b) = p^{\text{donnée}} \quad \text{en} \quad \underline{x}_b \in \partial D \ .$$

La loi du **minimum de dissipation** fait référence
au bilan global d'énergie cinétique

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{volumique}} + P_{\text{surfaciques}} - P_{\text{dissipée}}}$$

$$E_c = \iiint_D \rho e_c \ d^3x \ , \quad \frac{dE_c}{dt} = \iiint_D \frac{\partial(\rho e_c)}{\partial t} \ d^3x + \iint_{\partial D} \rho e_c \underline{v} \cdot \underline{n} \ d^2S$$

$$P_{\text{volumique}} = \iiint_D \rho \underline{g} \cdot \underline{v} \ d^3x$$

$$P_{\text{surfaciques}} = \iint_{\partial D} \underline{T} \cdot \underline{v} \ d^2S$$

$$P_{\text{dissipée}} = 2\eta \iiint_D \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} \ d^3x \geq 0$$

# Loi du minimum de dissipation

Si $\overline{\mathbf{v}}$ est solution du problème de Stokes

$$\boxed{\eta \overline{\boldsymbol{\Delta}} \overline{\mathbf{v}} \;=\; \overline{\boldsymbol{\nabla}} \widehat{p}} \quad \text{et} \quad \mathrm{div} \overline{\mathbf{v}} \;=\; 0 \quad \text{dans} \quad D,$$

$$\overline{\mathbf{v}}(\overline{\mathbf{x}}) \;=\; \overline{\mathbf{v}}^{\text{donnée}}(\overline{\mathbf{x}}) \quad \text{sur} \;\; \partial D \;,$$

$\overline{\mathbf{v}}'$ vérifie seulement $\quad \mathrm{div} \overline{\mathbf{v}}' \;=\; 0 \quad \text{dans} \quad D$

et les mêmes conditions limites

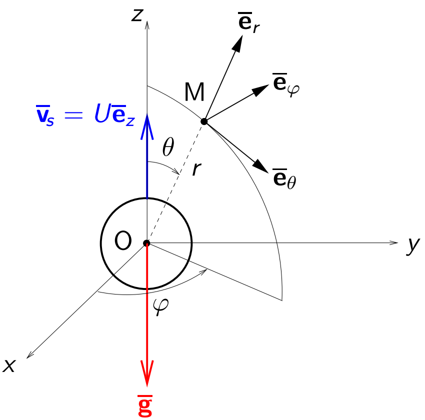
$$\overline{\mathbf{v}}'(\overline{\mathbf{x}}) \;=\; \overline{\mathbf{v}}^{\text{donnée}}(\overline{\mathbf{x}}) \quad \text{sur} \;\; \partial D \;,$$

alors

$$P_{\text{dissipée}}(\overline{\mathbf{v}}) \;=\; 2\eta \iiint_D \overline{\overline{\mathbf{D}}} : \overline{\overline{\mathbf{D}}} \; d^3x \;\leq\; P_{\text{dissipée}}(\overline{\mathbf{v}}') \;=\; 2\eta \iiint_D \overline{\overline{\mathbf{D}}}' : \overline{\overline{\mathbf{D}}}' \; d^3x \;.$$

- survit au cas de cond. lim. instationnaires (avec cond. sur $t_{\text{évolution}}$)
- pas valable en **écoulements turbulents** qui **dissipent beaucoup** !

# TD : Pb. 4.1 : retour sur l'écoulement de Stokes autour d'une sphère dans le référentiel où le fluide est au repos à l'infini




$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{r\sin\theta}(\overline{\boldsymbol{\nabla}}\psi)\wedge\overline{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\overline{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\overline{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\psi = f(r)\,g(\theta)$$

$$g(\theta) = \sin^2\theta$$

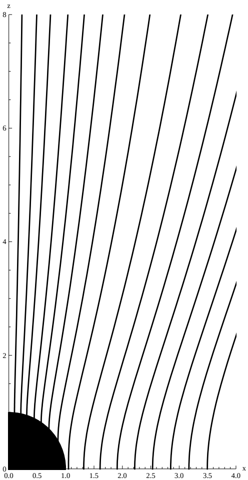
$$f(r) = \frac{Ua}{4}\left(3r - \frac{a^2}{r}\right)$$

**Q 4 :** lignes de courant ?

$$r = \sqrt{x^2+z^2},\ \sin\theta = x/r = x/\sqrt{x^2+z^2}$$

$$\hookrightarrow\ \psi = \psi(x,z) = \textit{constante}...$$

# TD : Pb. 4.1 : retour sur l'écoulement de Stokes autour d'une sphère dans le référentiel où le fluide est au repos à l'infini




$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{r\sin\theta}(\overline{\boldsymbol{\nabla}}\psi)\wedge\overline{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\overline{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\overline{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\psi = f(r)\,g(\theta)$$

$$g(\theta) = \sin^2\theta$$

$$f(r) = \frac{Ua}{4}\left(3r - \frac{a^2}{r}\right)$$

**Q 5 :** et dans le référentiel lié à la sphère ?

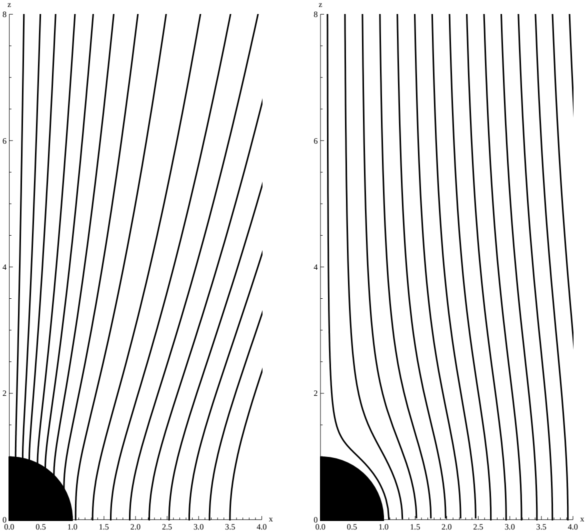
Composition des vitesses - loi de Galilée $\rightarrow$ $\overline{\mathbf{v}}_r$

$\hookrightarrow$ $\psi_r = \psi_r(x,z) = $ *constante...*

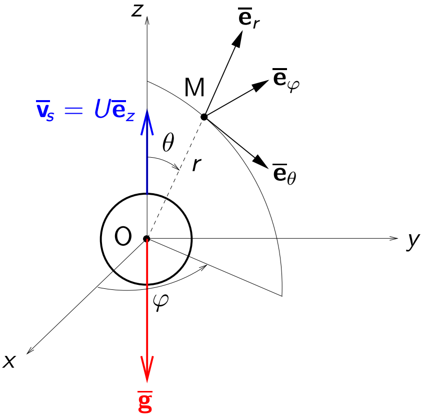
# TD : Pb. 4.1 : retour sur l'écoulement de Stokes autour d'une sphère

Réf. lié au fluide
$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}}$ à l'$\infty$

Réf. lié à la sphère
$\overline{\mathbf{v}} = -U\overline{\mathbf{e}}_z$ à l'$\infty$



# TD : Pb. 4.1 : retour sur l'écoulement de Stokes autour d'une sphère dans le référentiel où le fluide est au repos à l'infini




$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{r\sin\theta}(\overline{\boldsymbol{\nabla}}\psi)\wedge\overline{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\overline{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\overline{\mathbf{e}}_\theta$$

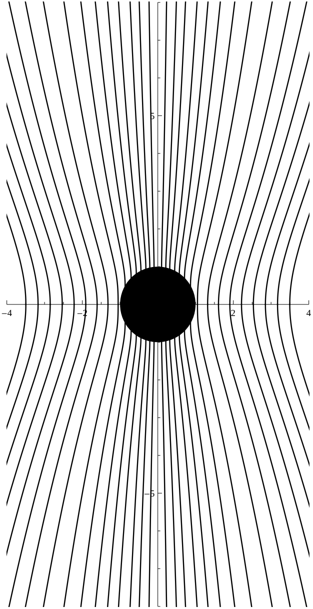
$$\psi = f(r)\,g(\theta)$$

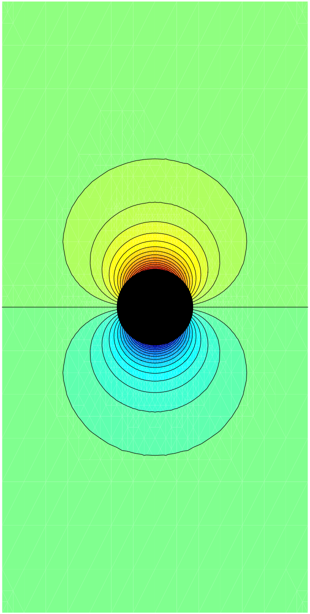
$$g(\theta) = \sin^2\theta$$

$$f(r) = \frac{Ua}{4}\left(3r - \frac{a^2}{r}\right)$$

**Q 6-11 :** étudiez la **dynamique** de ce problème...

# Lignes de courant Champ de pression motrice



## Formule de Stokes :

$$\overline{\mathbf{F}}_{\text{Stokes}} = \underbrace{\overline{\mathbf{F}}_{\alpha}}_{\text{traînée de pression}} + \underbrace{\overline{\mathbf{F}}_{\gamma}}_{\text{traînée de frottement}} = -\underbrace{6\pi}_{\text{mobilité}}\ \eta\ a\ \overline{\mathbf{v}}_s$$

## Application à la sédimentation : bilan de forces :

$$\overline{\mathbf{0}} = \rho_{\text{objet}}\mathcal{V}_{\text{objet}}\overline{\mathbf{g}} + \rho_{\text{fluide}}\mathcal{V}_{\text{objet}}(-\overline{\mathbf{g}}) - 6\pi\eta\ a\ \overline{\mathbf{v}}_s$$

$\rightarrow$ vitesse de **sédimentation** $\quad \overline{\mathbf{v}}_s = \dfrac{2}{9}\dfrac{\rho_{\text{objet}} - \rho_{\text{fluide}}}{\eta}\ a^2\ \overline{\mathbf{g}}$

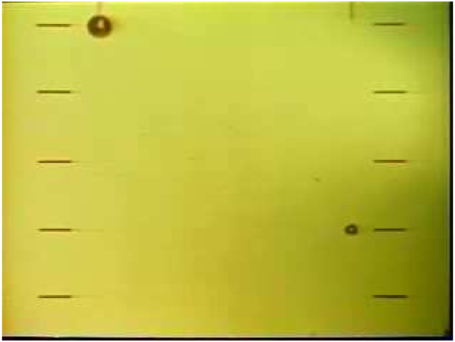
## Formule de Stokes :

$$\overline{\mathbf{F}}_{\text{Stokes}} = \underbrace{\overline{\mathbf{F}}_{\alpha}}_{\text{traînée de pression}} + \underbrace{\overline{\mathbf{F}}_{\gamma}}_{\text{traînée de frottement}} = -\underbrace{6\pi}_{\text{mobilité}}\ \eta\ a\ \overline{\mathbf{v}}_s$$

## Application à la sédimentation : bilan de forces :

$$\overline{\mathbf{0}} = \rho_{\text{objet}}\mathcal{V}_{\text{objet}}\overline{\mathbf{g}} + \rho_{\text{fluide}}\mathcal{V}_{\text{objet}}(-\overline{\mathbf{g}}) - 6\pi\eta\ a\ \overline{\mathbf{v}}_s$$

$\rightarrow$ vitesse de **sédimentation** $\quad \overline{\mathbf{v}}_s = \frac{2}{9}\frac{\rho_{\text{objet}} - \rho_{\text{fluide}}}{\eta}\ a^2\ \overline{\mathbf{g}}$



# Consignes pour ce mercredi après-midi

- Tout le monde apporte son **PC portable** avec **Mathematica**, car l'essentiel du TD se fera avec **Mathematica**

  $\Longrightarrow$ « réviser » les TP de rentrée **Mathematica**, la syntaxe de **Mathematica**, etc...

- Ceux qui auraient des réclamations sur leur copie de test 1 la ramènent, je recevrai d'éventuelles réclamations à 14h30...