

10<sup>ème</sup> séance de **Mécanique des fluides****Écoulements de Stokes ou « écoulements dominés par la viscosité »**

Modèle valable si les effets inertiels sont négligeables i.e.

$$Re = \frac{\rho \left( \overline{\overline{\nabla \mathbf{v}}} \right) \cdot \overline{\mathbf{v}}}{\eta \overline{\Delta \mathbf{v}}} = \frac{VL}{\nu} = \frac{t_{\text{visqueux}}}{t_{\text{advection}}} = \frac{L^2/\nu}{L/V} \ll 1$$

$$N = \frac{\rho \partial \overline{\mathbf{v}} / \partial t}{\eta \overline{\Delta \mathbf{v}}} = \frac{L^2}{\nu t_{\text{évolution}}} = \frac{t_{\text{visqueux}}}{t_{\text{évolution}}} = \frac{L^2/\nu}{t_{\text{évolution}}} \ll 1$$

⇒ équation de Navier-Stokes dégénère en **équation de Stokes**

$$\eta \overline{\Delta \mathbf{v}} = \overline{\nabla \hat{p}}$$

à munir de conditions limites

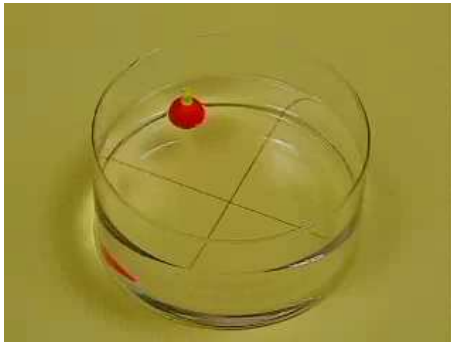
$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}^d(\overline{\mathbf{x}}, t) \quad \text{sur } \partial D_t, \quad p = p^d(\overline{\mathbf{x}}_b, t) \quad \text{en un point de } \partial D_t.$$

Dans cette approximation « quasi statique » ce sont les conditions extérieures, souvent les conditions limites, qui gouvernent l'écoulement.

## Exemple d'écoulement avec effets visqueux seulement

Huile silicone disposée dans un bac cylindrique solidaire d'une table tournante

$$\eta_{\text{huile}} = 10000 \eta_{\text{eau}}$$

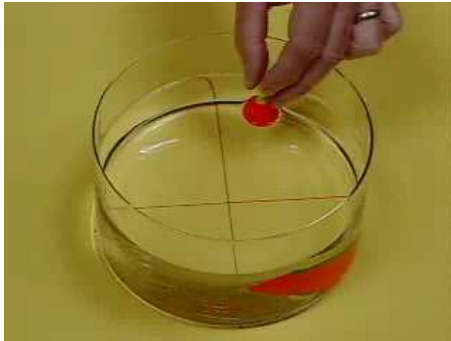


[ DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004, Cambridge University Press  
Film de Munson, Stanford University ]

## Exemple d'écoulement avec effets visqueux et inertiels

Huile silicone disposée dans un bac cylindrique solidaire d'une table tournante

$$\eta_{\text{huile}} = 10 \eta_{\text{eau}}$$



[ DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004, Cambridge University Press  
Film de Munson, Stanford University ]

## Le modèle des écoulements de Stokes ou « écoulements dominés par la viscosité »

Modèle valable si les effets inertiels sont négligeables i.e.

$$Re = \frac{VL}{\nu} \ll 1 \quad \text{et} \quad N = \frac{L^2}{\nu t_{\text{évolution}}} \ll 1$$

⇒ équation de Navier-Stokes dégénère en **équation de Stokes**

$$\eta \overline{\Delta \mathbf{v}} = \overline{\nabla \hat{p}}$$

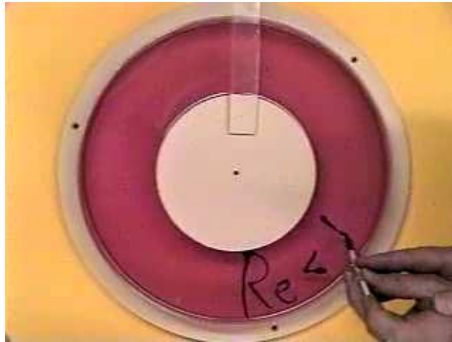
à munir de conditions limites

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^d(\mathbf{x}, t) \quad \text{sur} \quad \partial D_t, \quad p = p^d(\mathbf{x}_b, t) \quad \text{en un point de} \quad \partial D_t.$$

### Propriétés

- ▶ Linéarité
- ▶ Réversibilité cinématique

# Réversibilité cinématique dans un écoulement de Couette cylindrique à bas nombre de Reynolds



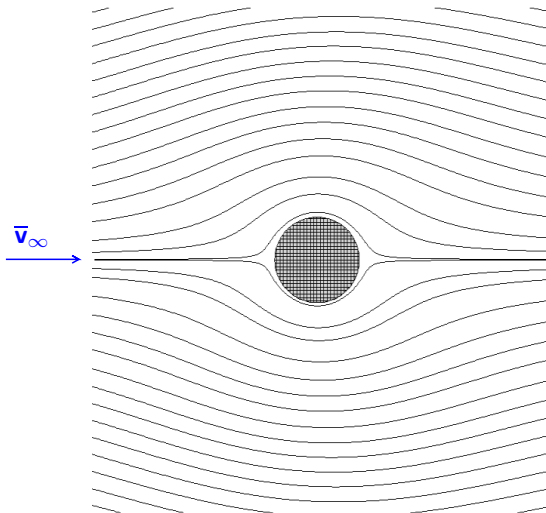
[ DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004, Cambridge University Press  
Film de Munson, Stanford University ]

**Irréversibilité cinématique**  
**dans un écoulement de Couette cylindrique**  
**à nombre de Reynolds « élevé »**



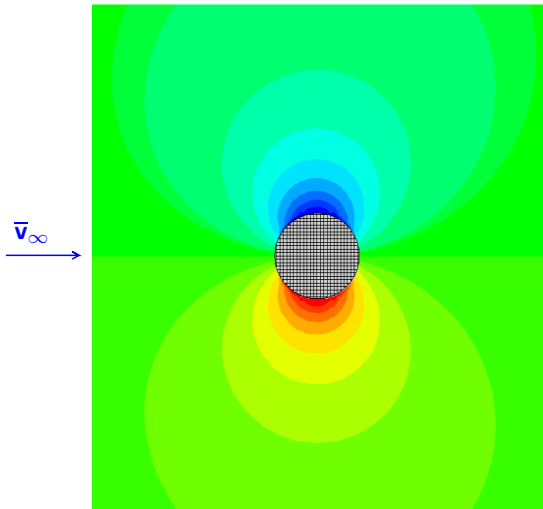
[ DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004, Cambridge University Press  
Film de Munson, Stanford University ]

# Symétrie des lignes de courant d'un écoulement autour d'un obstacle symétrique cylindre à $Re = 0$



[ Code LS-STAG  
du Lemta  
par Cheny & Botella ]

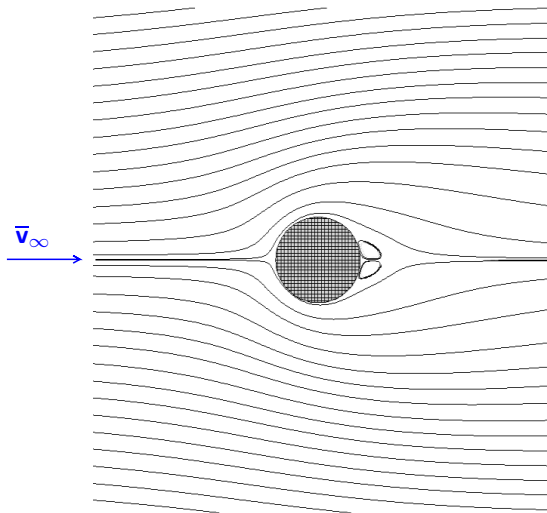
# Symétrie du champ de vorticité d'un écoulement autour d'un obstacle symétrique cylindre à $Re = 0$



[ Code LS-STAG  
du Lemta  
par Cheny & Botella ]



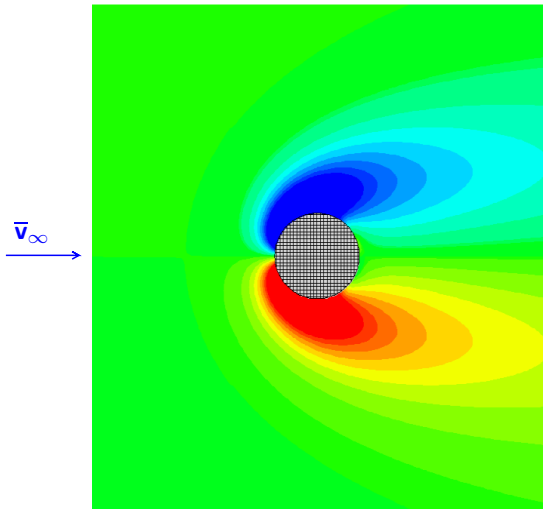
# Asymétrie des lignes de courant d'un écoulement autour d'un obstacle symétrique cylindre à $Re = 10$



Apparition  
d'une **recirculation** !

[ Code LS-STAG  
du Lemta  
par Cheny & Botella ]

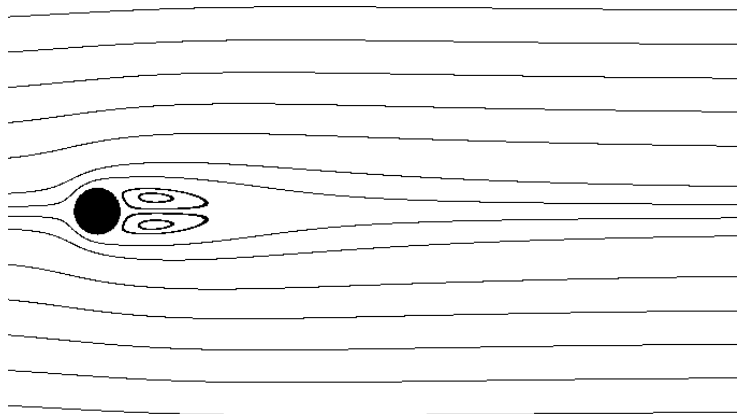
# Asymétrie du champ de vorticité d'un écoulement autour d'un obstacle symétrique cylindre à $Re = 10$



Apparition  
d'une **recirculation** !

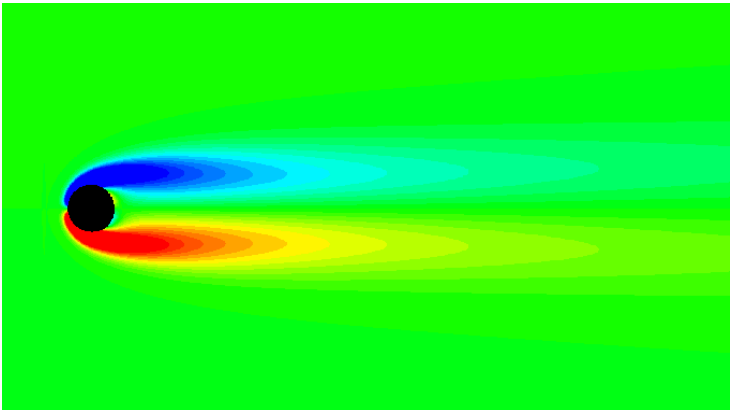
[ Code LS-STAG  
du Lemta  
par Cheny & Botella ]

## L'asymétrie des lignes de courant s'accentue à $Re = 40$



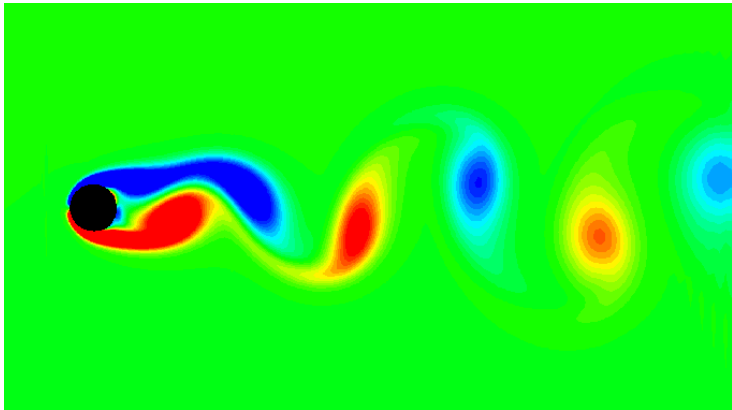
[ Code LS-STAG du Lemta par Cheny & Botella ]

## On a aussi **asymétrie** à $Re = 40$ du champ de vorticité

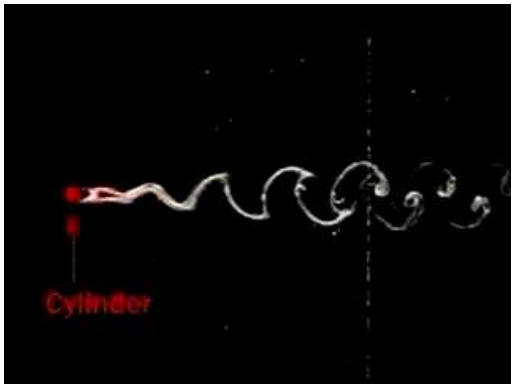


[ Code LS-STAG du Lemta par Cheny & Botella ]

À  $Re$  plus élevé (ici 100)  
cet écoulement stationnaire est **instable**,  
au profit d'un écoulement oscillant :



Ce lâcher régulier de tourbillons de Bénard-Von-Karman est aussi vu expérimentalement, ici à  $Re \simeq 200$  :



[ DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004, Cambridge University Press  
Film de l'ONERA ]

## Le modèle des écoulements de Stokes ou « écoulements dominés par la viscosité »

Modèle valable si les effets inertiels sont négligeables i.e.

$$Re = \frac{VL}{\nu} \ll 1 \quad \text{et} \quad N = \frac{L^2}{\nu t_{\text{évolution}}} \ll 1$$

⇒ équation de Navier-Stokes dégénère en **équation de Stokes**

$$\eta \overline{\Delta \mathbf{v}} = \overline{\nabla \hat{p}}$$

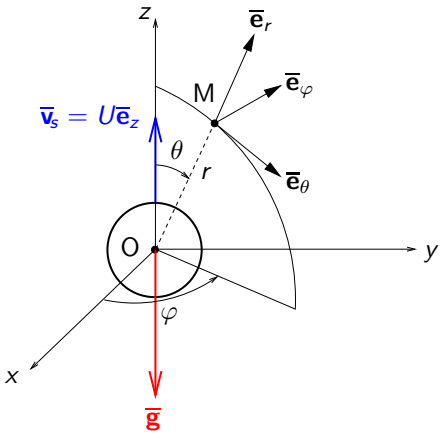
à munir de conditions limites

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}^d(\overline{\mathbf{x}}, t)} \quad \text{sur } \partial D_t, \quad p = p^d(\overline{\mathbf{x}}_b, t) \quad \text{en un point de } \partial D_t.$$

### Propriétés

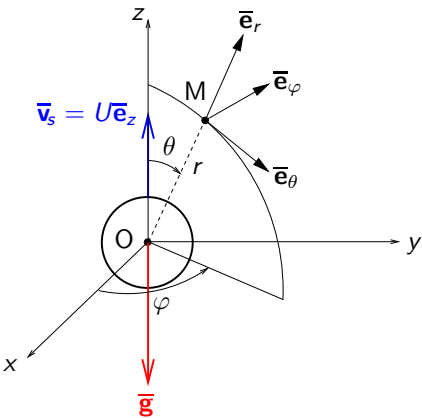
- ▶ Linéarité
- ▶ Réversibilité cinématique
- ▶ Unicité de la solution

# TD : Pb 4.1 Écoulement de Stokes autour d'une sphère





# Écoulement de Stokes autour d'une sphère dans le référentiel où le fluide est au repos à l'infini



**Q 1 :**  $\bar{v} = \frac{1}{r \sin \theta} (\nabla \psi) \wedge \bar{e}_\varphi$

$$\bar{v} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \bar{e}_r - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \bar{e}_\theta$$

**Q 3 :**  $\psi = f(r) g(\theta)$

$$g(\theta) = \sin^2 \theta$$

$$f(r) = \frac{Ua}{4} \left( 3r - \frac{a^2}{r} \right)$$

**Q 4 :** lignes de courant ?