Séance 10 de $\boxed{\text{Mécanique des fluides}}$

Écoulements de Stokes ou « écoulements dominés par la viscosité »

Modèle valable si les effets inertiels sont négligeables i.e.

$$Re = \frac{\rho\left(\overline{\overline{\nabla}}\overline{\mathbf{v}}\right)\cdot\overline{\mathbf{v}}}{\eta\overline{\mathbf{\Delta}}\overline{\mathbf{v}}} = \frac{V\ell}{\nu} = \frac{t_{\text{visqueux}}}{t_{\text{advection}}} = \frac{\ell^2/\nu}{\ell/V} \ll 1$$

$$N = \frac{\rho\partial\overline{\mathbf{v}}/\partial t}{\eta\overline{\mathbf{\Delta}}\overline{\mathbf{v}}} = \frac{\ell^2}{\nu t_{\text{évolution}}} = \frac{t_{\text{visqueux}}}{t_{\text{évolution}}} = \frac{\ell^2/\nu}{t_{\text{évolution}}} \ll 1$$

$\Longrightarrow$ équation de Navier-Stokes dégénère en **équation de Stokes**

$$\boxed{\eta\overline{\mathbf{\Delta}}\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{\nabla}}\widehat{p}}$$

à munir de conditions limites

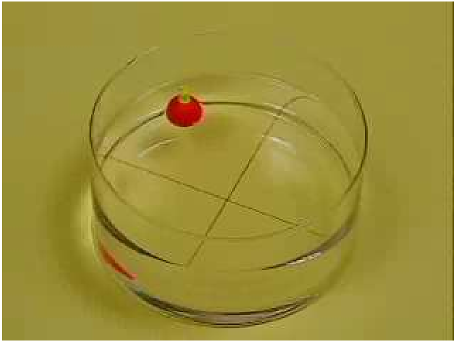
$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}^d(\overline{\mathbf{x}},t) \quad \text{sur } \partial D_t \,, \quad p = p^d(\overline{\mathbf{x}}_b,t) \text{ en un point de } \partial D_t \,.$$

Dans cette approximation « quasi statique » ce sont les conditions extérieures, souvent les conditions limites, qui gouvernent l'écoulement.

Exemple d'écoulement avec effets visqueux seulement

Huile silicone disposée dans un bac cylindrique solidaire d'une table tournante

$$\eta_{\text{huile}} = 10000\ \eta_{\text{eau}}$$

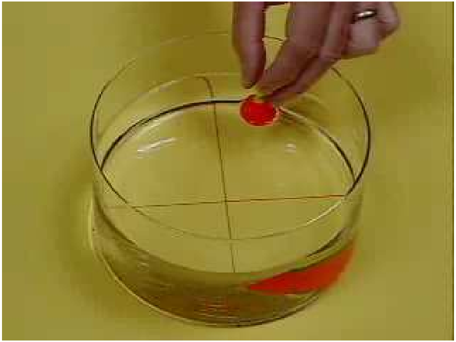


[DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004, Cambridge University Press
Film de Munson, Stanford University]

Exemple d'écoulement avec effets visqueux et inertiels

Huile silicone disposée dans un bac cylindrique solidaire d'une table tournante

$$\eta_{\text{huile}} = 10\ \eta_{\text{eau}}$$



[DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004, Cambridge University Press
Film de Munson, Stanford University]

Le modèle des écoulements de Stokes ou « écoulements dominés par la viscosité »

Modèle valable si les effets inertiels sont négligeables i.e.

$$Re = \frac{VL}{\nu} \ll 1 \quad \text{et} \quad N = \frac{L^2}{\nu t_{\text{évolution}}} \ll 1$$

$\Longrightarrow$ équation de Navier-Stokes dégénère en **équation de Stokes**

$$\boxed{\eta \overline{\boldsymbol{\Delta}} \overline{\mathbf{v}} = \overline{\boldsymbol{\nabla}} \widehat{p}}$$

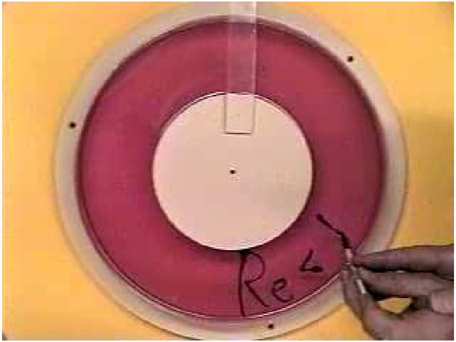
à munir de conditions limites

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}^d(\overline{\mathbf{x}}, t) \quad \text{sur} \ \partial D_t \ , \quad p = p^d(\overline{\mathbf{x}}_b, t) \text{ en un point de } \partial D_t \ .$$

Propriétés

- Linéarité
- Réversibilité cinématique

Réversibilité cinématique dans un écoulement de Couette cylindrique à bas nombre de Reynolds

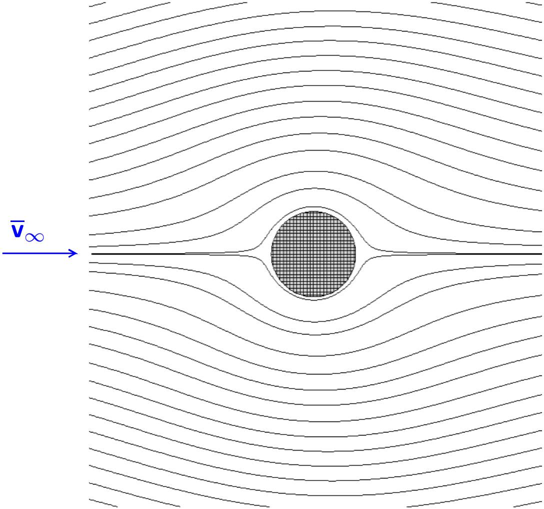


[DVD ‘Multimedia Fluid Mechanics’, Homsy et al. 2004, Cambridge University Press
Film de Munson, Stanford University]

Irréversibilité cinématique
dans un écoulement de Couette cylindrique
à nombre de Reynolds « élevé »

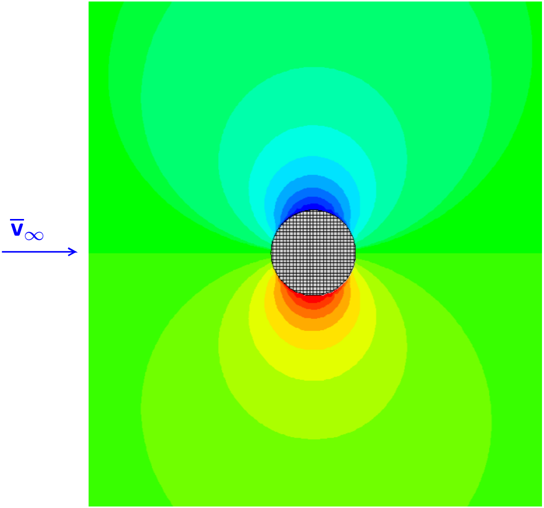
[DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004, Cambridge University Press
Film de Munson, Stanford University]

Symétrie des lignes de courant
d'un écoulement autour d'un obstacle symétrique cylindre
à Re $= 0$



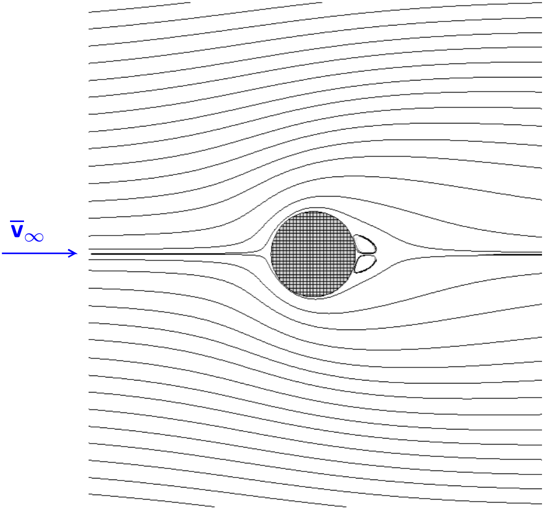
[Code LS-STAG
du Lemta
par Cheny & Botella]

Symétrie du champ de vorticité d'un écoulement autour d'un obstacle symétrique cylindre à Re $= 0$



[Code LS-STAG
du Lemta
par Cheny & Botella]

Asymétrie des lignes de courant d'un écoulement autour d'un obstacle symétrique cylindre à Re $= 10$

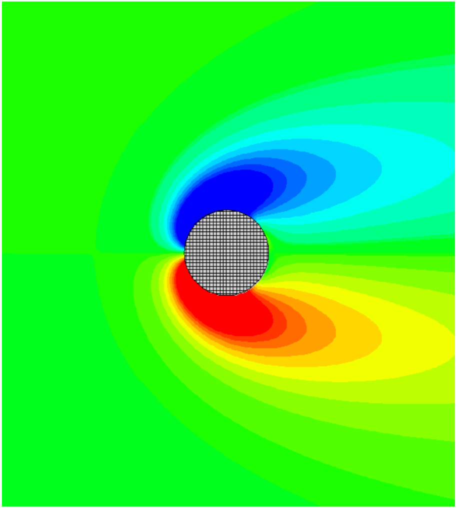


Apparition d'une **recirculation** !

[Code LS-STAG du Lemta par Cheny & Botella]

Asymétrie du champ de vorticité d'un écoulement autour d'un obstacle symétrique cylindre à **Re** $= 10$

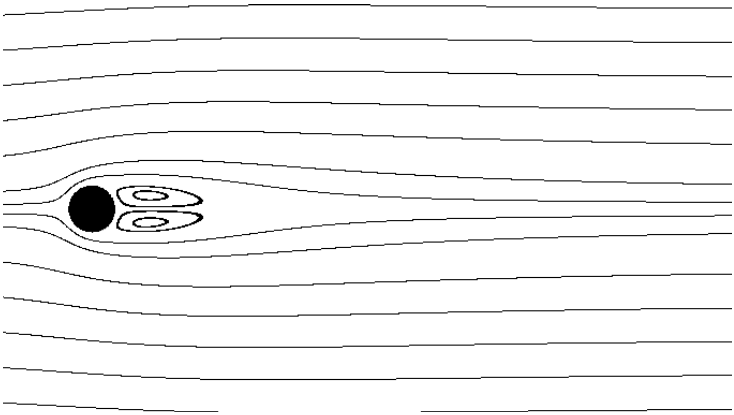
$\overline{\mathbf{v}}_\infty$



Apparition d'une **recirculation** !

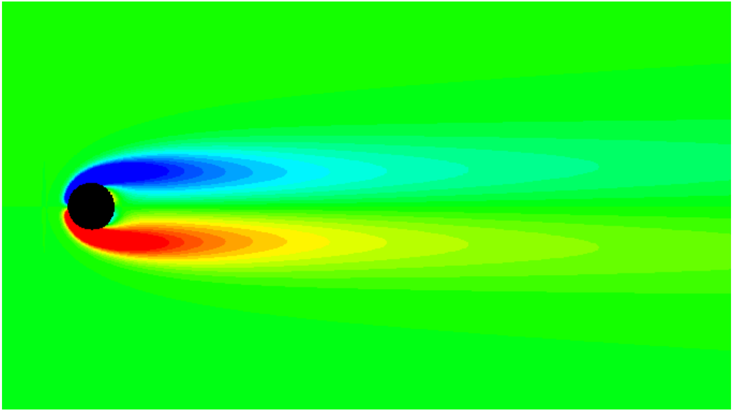
[Code LS-STAG du Lemta par Cheny & Botella]

L'asymétrie des lignes de courant s'accentue à Re $= 40$



[Code LS-STAG du Lemta par Cheny & Botella]

On a aussi asymétrie à Re $= 40$ du champ de vorticité

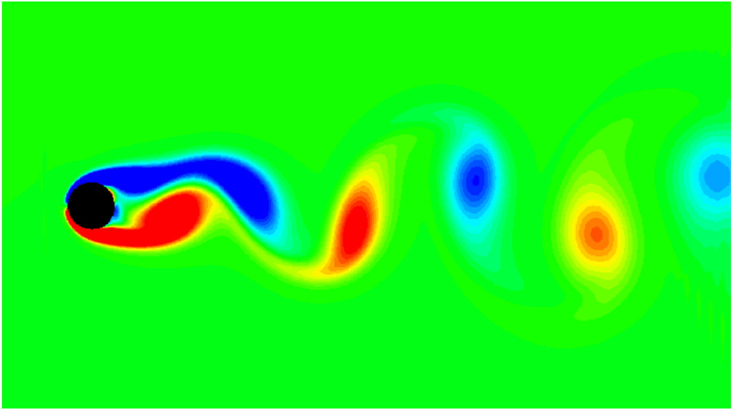


[Code LS-STAG du Lemta par Cheny & Botella]

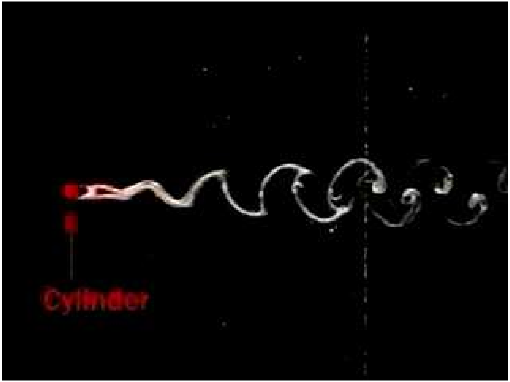
À Re plus élevé (ici 100)

cet écoulement stationnaire est instable,

au profit d'un écoulement oscillant :



Ce lâcher régulier de tourbillons de Bénard-Von-Karman est aussi vu expérimentalement, ici à Re $\simeq 200$:



[DVD 'Multimedia Fluid Mechanics', Homsy et al. 2004, Cambridge University Press
Film de l'ONERA]

Le modèle des écoulements de Stokes ou « écoulements dominés par la viscosité »

Modèle valable si les effets inertiels sont négligeables i.e.

$$Re = \frac{V\ell}{\nu} \ll 1 \quad \text{et} \quad N = \frac{\ell^2}{\nu t_{\text{évolution}}} \ll 1$$

$\Longrightarrow$ équation de Navier-Stokes dégénère en **équation de Stokes**

$$\boxed{\eta \overline{\mathbf{\Delta}}\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{\nabla}}\widehat{p}}$$

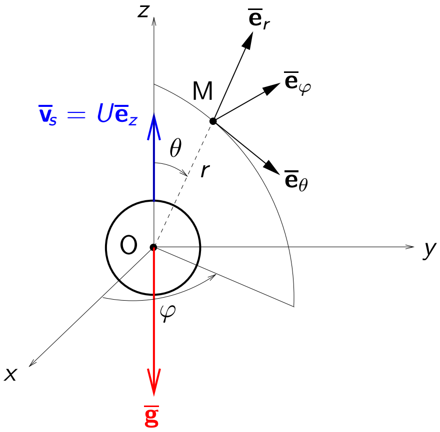
à munir de conditions limites

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}^d(\overline{\mathbf{x}},t) \quad \text{sur } \partial D_t \ , \quad p = p^d(\overline{\mathbf{x}}_b,t) \text{ en un point de } \partial D_t \ .$$

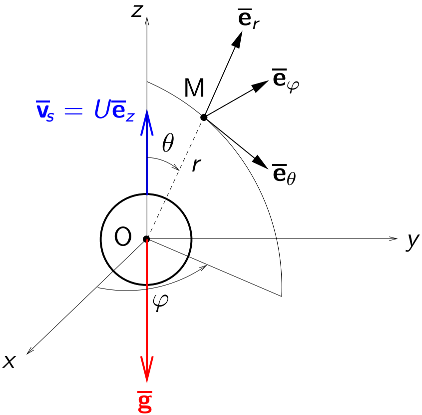
Propriétés

- Linéarité
- Réversibilité cinématique
- Unicité de la solution (à voir mercredi !)

TD : Pb 4.1 Écoulement de Stokes autour d'une sphère



Écoulement de Stokes autour d'une sphère dans le référentiel où le fluide est au repos à l'infini



Q 1 : $\overline{\mathbf{v}} = \dfrac{1}{r\sin\theta}(\overline{\boldsymbol{\nabla}}\psi)\wedge\overline{\mathbf{e}}_\varphi$

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\overline{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\overline{\mathbf{e}}_\theta$$

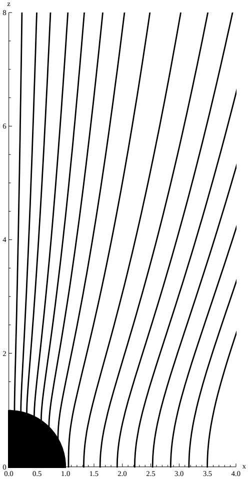
Q 3 : $\psi = f(r)\,g(\theta)$

$$g(\theta) = \sin^2\theta$$

$$f(r) = \frac{Ua}{4}\left(3r - \frac{a^2}{r}\right)$$

Q 4 : lignes de courant ?

Lignes de courant de l'écoulement de Stokes autour d'une sphère dans le référentiel où le fluide est au repos à l'infini



$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{r\sin\theta}(\overline{\boldsymbol{\nabla}}\psi)\wedge\overline{\mathbf{e}}_\varphi$$

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\overline{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\overline{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\psi = f(r)\,g(\theta)$$

$$g(\theta) = \sin^2\theta$$

$$f(r) = \frac{Ua}{4}\left(3r - \frac{a^2}{r}\right)$$

Q 5 : et dans le référentiel lié à la sphère ?

Composition des vitesses - loi de Galilée $\rightarrow$ $\overline{\mathbf{v}}_r$

$$\hookrightarrow\ \psi_r = \psi_r(x,z) = \textit{constante}\ldots$$